উপক্রমণিকা

মহান দেশনায়ক সুভাষচন্দ্র বসুর নামাঙ্কিত এই মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনে আপনাকে স্বাগত। ২০২১-এ এই প্রতিষ্ঠান দেশের সর্বপ্রথম রাজ্য সরকারি মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় হিসেবে ন্যাক (NAAC) মূল্যায়নে 'এ' গ্রেড প্রাপ্ত হয়েছে এবং ২০২৪-এ সমগ্র দেশের মুক্ত শিক্ষাব্যবস্থা ক্ষেত্রে NIRF মূল্যায়নে দ্বিতীয় স্থান অধিকার করেছে। পাশাপাশি, ২০২৪-এই 12B-র অনুমোদন প্রাপ্তি ঘটেছে।

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশন প্রকাশিত জাতীয় শিক্ষানীতি (NEP, ২০২০)-র নির্দেশনামায় সিবিসিএস পাঠক্রম পদ্ধতির পরিমার্জন ঘটানো হয়েছে। জাতীয় শিক্ষানীতি অনুযায়ী Curriculum and Credit Framework for Undergraduate Programmes (CCFUP)-এ চার বছরের স্নাতক শিক্ষাক্রমকে ছ'টি পৃথক প্রকরণে বিন্যস্ত করার কথা বলা হয়েছে। এগুলি হল— 'কোর কোর্স', 'ইলেকটিভ কোর্স', 'মাল্টি ডিসিপ্লিনারি কোর্স' 'স্কিল এনহান্সমেন্ট কোর্স', 'এবিলিটি এনহ্যান্সমেন্ট কোর্স' এবং ভ্যালু অ্যাডেড কোর্স। ক্রেডিট পদ্ধতির ভিত্তিতে বিন্যস্ত এই পাঠক্রম শিক্ষার্থীর কাছে নির্বাচনাত্মক পাঠক্রম পাঠ গ্রহণের সুবিধে এনে দেবে। এরই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে ষান্মাসিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা এবং ক্রেডিট ট্রান্সফারের সুযোগ। জাদতীয় শিক্ষানীতি পরিমাণগত মানোন্নয়নের পাশাপাশি গুণগত মানের বিকাশ ঘটানোর লক্ষ্যে National Higher Education Qualifications Framework (NEQF) এবং National Skills Qualification Framework (NSQF)-এর সঙ্গে সাযুজ্য রেখে চার বছরের স্নাতক পাঠক্রম প্রস্তুতির দিশা দেখিয়েছে। শিক্ষাথী-কেন্দ্রিক এই ব্যবস্থা মূলত গ্রেড-ভিত্তিক, যা অভিচ্ছিন্ন ও অব্যন্তরীণ মূল্যায়নের মাধ্যমে সার্বিক মূল্যায়নের দিকে অগ্রসর হবে এবং শিক্ষার্থীকে বিষয় নির্বাচনের ক্ষেত্রে যথোপযুক্ত সুবিধা দেবে। শিক্ষাক্রমের প্রসারিত পরিসরে বিবিধ বিষয় চয়নের সক্ষমতা শিক্ষার্থীকে দেশের অন্যান্য উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আন্তঃব্যবস্থায় অর্জিত ক্রেডিট স্থানান্তরে সাহায্য করবে। শিক্ষার্থীর অভিযোজন ও পরিগ্রহণ ক্ষমতা অনুযায়ী পাঠক্রমের বিন্যাসই এই জাতীয় শিক্ষানীতির লক্ষ্য। উচ্চশিক্ষার পরিসরে এই পদ্ধতি এক বৈকল্পিক পরিবর্তনের সূচনা করেছে। আগামী ২০২৫-২৬ শিক্ষাবর্ষ থেকে স্নাতক স্তরে এই নির্বাচনভিত্তিক পাঠক্রম কার্যকরী করা হবে, এই মর্মে নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে। বর্তমান পাঠক্রমগুলি উচ্চশিক্ষা ক্ষেত্রের নির্ণায়ক কৃত্যকের যথাবিহিত প্রস্তাবনা ও নির্দেশাবলী অনুসারে রচিত ও বিন্যস্ত হয়েছে। বিশেষ গুরুত্বারোপ করা হয়েছে সেইসব দিকগুলির প্রতি যা ইউ.জি.সি-র জাতীয় শিক্ষানীতি, ২০২০ কর্তৃক চিহ্নিত ও নির্দেশিত।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ক্ষেত্রে স্ব-সিক্ষা পাঠ-উপকরণ শিক্ষার্থী-সহায়ক পরিষেবার একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। সি.বি.সি.এস পাঠক্রমের এই পাঠ-উপকরণ মূলত বাংলা ও ইংরেজিতে লিখিত হয়েছে। শিক্ষার্থীদের সুবিধে্ কথা মাথায় রেখে আমরা ইংরেজি পাঠ-উপকরণের বাংলা অনুবাদের কাজেও এগিয়েছি। বিশ্ববিদ্যালযের আভ্যন্তরীণ শিক্ষকরাই মূলত পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির ক্ষেত্রে অগ্রণী ভূমিকা নিয়েছেন, যদিও পূর্বের মতোই অন্যান্য বিদ্যায়তনিক প্রতিষ্ঠানের সঙ্গে সংযুক্ত অভিজ্ঞ বিশেষজ্ঞ শিক্ষকদের সাহায্য আমরা অকুণ্ঠচিত্তে গ্রহণ করেছি। তাঁদের এই সাহায্য পাঠ-উপকরণের মানোন্নয়নে সহায়ক হবে বলেই বিশ্বাস। নির্ভরযোগ্য ও মূল্যবান বিদ্যায়তনিক সাহায্যের জন্য আমি তাঁদের আন্তরিক অভিনন্দন জানাই। এই পাঠ-উপকরণ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষণ পদ্ধতি প্রকরণে নিঃসন্দেহে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নেবে। উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনের পঠন প্রক্রিয়ায় সংযুক্ত সকল শিক্ষকের সদর্থক ও গঠমুমূলক মতামত আমাদের আরও সমৃদ্ধ করবে। মুক্ত শিক্ষাক্রমে উৎকর্ষে প্রশ্নে অমরা প্রতিশ্রুতিবদ্ধ।

পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির সঙ্গে সংশ্লিষ্ট সকল শিক্ষক, আধিকারিক ও কর্মীদের আমি আন্তরিক অভিনন্দন জানাই এবং ছাত্রদের সর্বাঙ্গীণ সাফল্য কামনা করি।

অধ্যাপক ইন্দ্রজিৎ লাহিড়ি
ক্ষমতাপ্রাপ্ত উপাচার্য,
নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

Netaji Subhas Open University

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

Four Year Undergraduate Degree Programme

Under National Higher Education Qualifications Framework (NHEQF)
& Curriculum and Credit Framework for Undergraduate Programmes

Bachelor of Commerce (Honours) (Commerce) [NCO]

Course Type: Discipline Specific Elective (DSE)

Course Title: Business Mathematics and Statistics for Business Decisions

Course Code: NEC-MG-04

প্রথম মুদ্রণ : মার্চ 2025
1st Print: March, 2025

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations of the University Grants Commission - Distance Education Bureau

পরিচিতি

Netaji Subhas Open University

Four Year Undergraduate Degree Programme

Under National Higher Education Qualifications Framework (NHEQF)
& Curriculum and Credit Framework for Undergraduate Programmes

Bachelor of Commerce (Honours) (Commerce) [NCO]

Course Type: Discipline Specific Elective (DSE)

Course Title: Business Mathematics and Statistics for Business Decisions

Course Code: NEC-MG-04

: বিষয় সমিতি :

সদস্যবৃন্দ

ড. অনির্বাণ ঘোষ
Professor of Commerce
Netaji Subhas Open University (Chairperson)

ড. উত্তম কুমার দত্ত
Professor of Commerce
Netaji Subhas Open University

ড. সজল কুমার মাইতি
Professor of Commerce (PG Dept.)
Hooghly Mohsin College

ড. আশিষ কুমার সানা
Professor of Commerce
University of Calcutta

ড. চিত্তরঞ্জন সরকার
Professor of Commerce
Netaji Subhas Open University

ড. বিশ্বজিৎ ভদ্র
Associate Professor of Commerce
Netaji Subhas Open University

সি.এ. শুভায়ন বসু
Assistant Professor of Commerce
Ananda Mohan College

ড. সুদর্শন রায়
Assistant Professor of Commerce
Netaji Subhas Open University

Course : Business Mathematics and Statistics for Business Decisions

Course Code : NEC-MG-04

: রচনা :

গোবিন্দলাল মণ্ডল
Associate Professor of Mathematics
New Alipore College

: সম্পাদনা :

ড. প্রেমানন্দ জানা
Ex-Professor
MCKV Institute of Engineering

: বিন্যাস সম্পাদনা :

ড. অনির্বান ঘোষ, NSOU

Notification

All rights reserved. No part of this Self-Learning Material (SLM) should reproduce in any form without permission in writing from the Registrar of Netaji Subhas Open University.

Ananya Mitra
Registrar (Add'l Charge)

নেতাজি সুভাষ
মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

UG : Commerce
(NCO)

Course : Business Mathematics and Statistics for Business Decisions [NCrF]

Code : NEC-MG-04

পর্যায়—1

একক	1	❒	চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest) এবং বার্ষিকী (Annuities)	9-21
একক	2	❒	সমীকরণ (Equation)	22-39
একক	3	❒	বিন্যাস এবং সমবায় (Permutation and Combination)	40-49
একক	4	❒	অবকলন ও অপেক্ষকের বিস্তৃতি (Differentiation)	50-72

পর্যায়—2

একক	5	❒	রাশিতথ্যের অর্থ ও রাশিতথ্যের সংকলন ও উপস্থাপন	75-109
একক	6	❒	কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ (Measure of Central Tendency)	110-135
একক	7	❒	বিস্তৃতির পরিমাপ (Measure of Dispersion)	136-150
একক	8	❒	সহগতি ও নির্ভরন (Correlation & Regression)	151-170

পর্যায়—1

একক 1 ❑ চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest) এবং বার্ষিকী (Annuities)

গঠন

1.1 উদ্দেশ্য

1.2 চক্রবৃদ্ধি সুদ কী

1.3 সরল সুদের সূত্র

1.4 চক্রবৃদ্ধি হারের সূত্র

  1.4.1 উদাহরণমালা

1.5 বার্ষিকী বা বার্ষিক বৃত্তি

  1.5.1 বার্ষিকীর সংজ্ঞা

  1.5.2 বার্ষিক বৃত্তির সূত্র

  1.5.3 বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য

  1.5.4 উদাহরণমালা

1.6 অনুশীলনী

1.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন—

- সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধি সুদের ব্যাখ্যা দিতে পারবেন এবং এই দুই ধরনের সুদের রাশিমালাগুলি নির্ণয় করতে পারবেন।
- আসল, দুই ধরনের হার ও সুদের পরিমাণ সম্পর্কিত প্রশ্নগুলির সমাধান করতে পারবেন।
- বার্ষিক বৃত্তির পরিমাণ ও বর্তমান মূল্যের হিসাব করতে পারবেন।

1.2 চক্রবৃদ্ধি সুদ কী

কোন ব্যক্তি বা সংস্থা থেকে অর্থ ঋণ নিলে ঋণগ্রহিতা ঐ অর্থ আপন প্রয়োজনে ব্যবহার করার জন্য উক্ত ব্যক্তি বা সংস্থাকে প্রতিশ্রুতিমত কিছু অতিরিক্ত অর্থ প্রদান করে। এই অতিরিক্ত অর্থকে সুদ (Interest) এবং ঋণকৃত অর্থকে আসল (Principal) বলে। সাধারণত সুদ স্থিরিকৃত সমান সময়ের ব্যবধানে দেওয়া হয়ে থাকে। সুদ বৎসরান্তে, প্রতি ছয় মাস অন্তে বা তিন মাস অন্তে ইত্যাদি দেওয়া হয়ে থাকে। সময়ের

উল্লেখ না থাকলে ব্যবধান 1 বৎসরের ধরা হয়। একটি নির্দিষ্ট সময় অন্তর যে নির্দিষ্ট পরিমাণ সুদ দেওয়া হয় তাকে সুদের হার বলে। যখন শুধু আসলই সুদ উৎপন্ন করে তখন সেই সুদকে সরল সুদ বলে। সুদ এবং আসলের সমষ্টিকে সবৃদ্ধিমূল বলে। যখন প্রতি নির্দিষ্ট সময় অন্তর পরবর্তী নির্দিষ্ট সময়ের জন্য সবৃদ্ধিমূলের উপর সুদ নির্ধারিত হয় তখন তাকে চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest) বলে।

1.3 সরল সুদের সূত্র

মনে করি, আসল = P_0, সুদের শতকরা বার্ষিক হার (অর্থাৎ 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ) = r, বৎসর সংখ্যা = n এবং n বৎসর পর সুদ + আসল = P_n.

P_0 টাকার n বৎসরের সুদ (বার্ষিক হার r) = $\frac{P_0 rn}{100}$

$$\therefore\ P_n = P_0 + \frac{P_0 rn}{100}$$

বা, $$\boxed{P_n = P_0\left(1+\frac{rn}{100}\right)}$$

1.4 চক্রবৃদ্ধি হারের সূত্র

1 বৎসর পরে সুদ-আসল (সরল সুদের সূত্র থেকে) = $P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)$

2য় বর্ষে আসল = $P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)$ এবং সুদ $P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{r}{100}$

$$\therefore\ \text{2য় বর্ষে সুদ-আসল} = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)+P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)\frac{r}{100}$$

$$= P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$$

অনুরূপে n বৎসর পরে সুদ-আসল $\boxed{P_n = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$ ....(1)

যদি কোন রাশির (বা বস্তুর) মান r% হারে কমে, তবে n বৎসর পরে মান, $P_n = P_0\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$

দ্রষ্টব্য : P-এর একক টাকা না হয়ে অন্য কোন একক হলেও সূত্রটি সত্য।

পূর্ব পৃষ্ঠার সূত্র থেকে পাই $\boxed{P_0 = P_n\left(1+\frac{r}{100}\right)^{-n}}$ ....(2)

(1) অনুসারে P_0 পরিমাণ টাকা n বৎসর পরে P_n পরিমাণ টাকায় পরিণত হয়, সুতরাং P_0কে, P_n পরিমাণ টাকার বর্তমান মূল্য (Present Value) বলে। (2) বর্তমান মূল্য নির্ণয়ের সূত্র।

যদি সুদ বৎসরান্তে আসলের সাথে যুক্ত না হয়ে 6 মাস অন্তর, 3 মাস অন্তর বা 1 মাস অন্তর আসলের সাথে যুক্ত হয় এবং i = 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ হয়—

$$P_n = P_0\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2n}, \text{ যেখানে } i = \frac{r}{100}$$

[সুদ ছয় মাস অন্তর আসলের সাথে যুক্ত হলে]

$$P_n = P_0\left(1+\frac{i}{4)}\right)^{4n}$$, সুদ তিন মাস অন্তর আসলের সাথে যুক্ত হলে।

$$P_n = P_0\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12n}$$, সুদ এক মাস অন্তর আসলের সাথে যুক্ত হলে।

1.4.1 উদাহরণ মালা

উদা. 1. বার্ষিক 8% চক্রবৃদ্ধি হারে 12 বৎসর পরে 200 টাকা সমূল চক্রবৃদ্ধি কত হবে?

এখানে P_0 = 200 টাকা, r = 8, n = 12 বৎসর।

$$\therefore p_n = P_{12} = P_0\left(1+\frac{r}{100)}\right)^n = 200\left(1+\frac{8}{100}\right)^{12} = 200\times(1\cdot08)^{12}$$

$$\therefore \log P_{12} = \log 200 + 12\log 1\cdot08$$
$$= \log 2\times10^2 + 12\log 1\cdot08 = \log 2 + 2\log_{10}10 + 12\log 1\cdot08$$
$$= \cdot3010 + 2 + 12\times\cdot0334$$
$$= 2\cdot3010 + 12\times\cdot0334 = 2\cdot7018$$

$\therefore P_{12}$ = অ্যান্টিলগ (2·7018) = 503·2

নির্ণেয় সমূল-চক্রবৃদ্ধি = 503·20 টাকা।

উদা. 2. কী হারে কোন টাকা 15 বৎসরে তিনগুণ হবে যদি সুদ 3 মাস অন্তর দেওয়া হয়?

মনে করি আসল টাকার পরিমাণ P_0 এবং বার্ষিক সুদের হার r%.

এখানে $n = 15$ এবং $P_{15} = 3P_0$.

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $P_{15} = 3P_0 = P_0\left(1+\frac{r}{100\times 4}\right)^{60}$

বা, $3 = \left(1+\frac{r}{400)}\right)^{60}$

বা, $\log 3 = 60\log\left(1+\frac{r}{400}\right)$

বা, $\log\left(1+\frac{r}{400}\right) = \frac{\log 3}{60} = \frac{0{\cdot}4771}{60} = 0{\cdot}007952$

বা, $1+\frac{r}{400} =$ অ্যান্টিলগ $(0{\cdot}007952)$

$= 1{\cdot}01848$

বা, $r = 400 \times 0{\cdot}01848 = 7{\cdot}4$ (প্রায়)

$\therefore$ বার্ষিক সুদের হার $7{\cdot}4\%$

উদা. 3. কত টাকার সমূল চক্রবৃদ্ধি 4% বার্ষিক হারে 18 বৎসরে 10,000 টাকা হবে?

এখানে $P_{18} = 10{,}000$ টাকা, $r = 4$, $n = 18$ বৎসর, $P_0 = ?$

$\therefore 10{,}000 = P_0\left(1+\frac{4}{100}\right)^{18} = (1{\cdot}04)^{18}$

$\therefore \quad \log 10^4 = \log P_0 + 18\log 1{\cdot}04$

বা, $4 = \log p_0 + 18 \times {\cdot}0170 = \log P_0 + {\cdot}3060$

বা, $\log p_0 = 3{\cdot}6940$.

$\therefore$ P_0 = অ্যান্টিলগ $(3{\cdot}6940) = 4943$ টা. (প্রায়)।

উদা. 4. যদি সুদ 6 মাস অন্তর দেওয়া হয়, তবে বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত টাকা 8 বৎসরে সুদে-আসলে 1000 টাকা হবে?

মনে করি আসল টাকার পরিমাণ P_0.

দেওয়া আছে $n = 8$, $r = 5$ এবং $P_8 = 1000$.

$$\therefore P_8 = 1000 = P_0\left(1+\frac{5}{100\times 2}\right)^{2\times 8}$$

বা, $P_0\ (1{\cdot}025)^{16} = 1000$

বা, $\log P_0 + 16 \times \log(1{\cdot}025) = \log 10^3$

বা, $\log P_0 + 0{\cdot}17158 = 3$

বা, $\log P_0 = 2{\cdot}82842$

বা, P_0 = অ্যান্টিলগ (2·82842) = 673·60 (প্রায়)

∴ আসল টাকার পরিমাণ 673·60 টাকা।

উদা. 5. সুদ বৎসরান্তে দেয় এইরূপ চক্রবৃদ্ধিতে লগ্নী করার ফলে কোন টাকার দ্বিতীয় বৎসর অন্তে 2704 টাকা এবং তৃতীয় বৎসর অন্তে 2812 টা. 16 প. সমূল চক্রবৃদ্ধি হয়। সুদের হার এবং মূলধন নির্ণয় করুন।

প্রশ্নানুসারে, $2704 = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ এবং $2812.16 = P_0\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$

$\therefore \frac{2812{\cdot}16}{2704} = 1+\frac{r}{100}$ বা, $1{\cdot}04 = 1+\frac{r}{100}$

বা, $r = 100 \times {\cdot}04 = 4\%$ উপরের যে কোন একটিতে r-এর মান বসিয়ে পাই $P_0 = 2500$ টাকা।

উদা. 6. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে কত সময়ে সবৃদ্ধিমূল আসলের দ্বিগুণ হবে?

এখানে $P_0 = 2P_0$, $r = 5$, n = নির্ণেয় বৎসর।

$$\therefore 2P_0 = P_0\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$$

বা, $2 = (1{\cdot}05)^n$ বা, $\log 2 = n\log 1{\cdot}05$

বা, ${\cdot}3010 = n \times {\cdot}0212$ বা, $n = \frac{3010}{212} = 14{\cdot}2$ বৎসর (প্রায়)।

উদা. 7. একটি যন্ত্রের আয়ু 10 বৎসর এবং ক্রয়মূল্য 10,000 টাকা। যদি প্রতি বৎসর 10% হারে অবচয় হয়, তবে 10 বৎসর পরে যন্ত্রটির মূল্য কত হবে?

যেহেতু চক্রবৃদ্ধি হারে মূল্য কমছে সুতরাং $P_n = P_0\left(1-\frac{10}{100)}\right)^{10} = 10000\times(1-1)^{10} = 10000\times({\cdot}9)^{10}$

$\therefore \log P_n = \log 10^4 + 10\log.9 = 4 + 10 \times (-1 + {\cdot}9542) = 3{\cdot}542$

$\therefore$ P_n = অ্যান্টিলগ (3·542) = 3483 টাকা (প্রায়)।

উদা. 8. কোন রাজ্যের লোক সংখ্যার বাৎসরিক বৃদ্ধি প্রতি হাজারে 25 এবং বর্তমান লোক সংখ্যা 26,24,000। 3 বৎসর পরে লোক সংখ্যা কত হবে? এক বৎসর পূর্বে তা কত ছিল?

এখানে $p_o = 26{,}24{,}000$, $n = 3$, $r = 2.5$, $P_n = ?$

আমরা জানি, $P_n = 26{,}24{,}000\left(1+\frac{2\cdot5}{100}\right)^3$

$$= 2624 \times 10^3 \times (1\cdot025)^3$$

$\therefore \log P_n = 3 + \log 2624 + 3\log 1\cdot025$

$$= 3 + 3\cdot4190 + 3 \times \cdot0107 = 6\cdot4511$$

P_n = অ্যান্টিলগ (6·4511) = 28,26,000.

মনে করি, এক বৎসর আগে ঐ রাজ্যের লোকসংখ্যা ছিল P_{-1}

এখন, $P_0 = P_{-1}(1 + \cdot025)$

$$\therefore P_{-1} = \frac{p_0}{1\cdot025} = \frac{2624000}{1\cdot025} = 25{,}60{,}000$$

উদা. 9. কোন ব্যক্তি টাকা প্রতি বাৎসরিক *r* টাকা হার সুদে P টাকা ধার করল। যদি প্রতি বৎসর সে ঐ বৎসরের সুদ এবং ঐ সুদের সমপরিমাণ আসল শোধ করে তবে দেখান যে *n* বৎসর পরে তার ধার থাকবে $P(1 - r)^n$ টাকা।

প্রথম বৎসর পরে ঐ ব্যক্তির ঋণ $P_1 = P(1 - r)$

দ্বিতীয় বৎসর পরে ঐ ব্যক্তির ঋণ $P_2 = P(1 - r) - P(1 - r).r$

$$= P(1 - r)(1 - r)$$

এইভাবে মনে করি x বৎসর পরে ঐ ব্যক্তির ঋণ P_x এবং $x + 1$ বৎসর পরে ঐ ব্যক্তির ঋণ P_{x-1}

এখন, $P_{x+1} = P_x - P_x.r = P_x(1 - r)$

$$\therefore\ P_n = (1 - r).\ p_{n-1}$$
$$P_{n-1} = (1 - r)\ P_{n-2}$$
$$P_{n-2} = (1 - r)P_{n-3}$$
$$P_2 = (1 - r)P_1$$
$$P_1 = P(1-r)$$
$$\therefore\ P_n = (1 - r)^n P.$$

1.5 বার্ষিকী বা বার্ষিক বৃত্তি (Annuities)

1.5.1 বার্ষিক বৃত্তির সংজ্ঞা (Annuities)

কোনও শর্তাধীনে প্রতি বৎসর অন্তর দেয় কোনও নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থকে বার্ষিকী বলে। যে সামগ্রিক সময়ের জন্য বার্ষিকী দেওয়া হয় তাকে মেয়াদ বলে। এই মেয়াদ কয়েক বৎসর হতে পারে, আবার চিরকালও হতে পারে।

বার্ষিক বৃত্তির মেয়াদ যদি অসীম হয় তবে কিস্তির সংখ্যাও অসীম হবে অর্থাৎ কোন কিস্তিই শেষ কিস্তি নয়, একে চিরস্থায়ী কিস্তি বলে।

1.5.2 বার্ষিক বৃত্তির সূত্র

বার্ষিক বৃত্তি P যদি n বৎসর স্থগিত থাকে তবে চক্রবৃদ্ধি ধরে মোট বৃত্তি নির্ণয় :

মনে করি, $i = 1$ টাকার 1 বৎসরের সুদ। যেহেতু বার্ষিক কিস্তি n বৎসর স্থগিত থাকবে সুতরাং প্রথম কিস্তি যা 1 বৎসর পরে দেয় তা $(n–1)$ বৎসর স্থগিত থাকবে। এর সমূল চক্রবৃদ্ধি হবে $P(1 + i)^{n–1}$, দ্বিতীয় কিস্তি $(n–2)$ বৎসরের জন্য স্থগিত থাকবে এবং এর সমূল চক্রবৃদ্ধি হবে $P(1+i)^{n–2}$। অনুরূপে তৃতীয় কিস্তিতে সমূল চক্রবৃদ্ধি হবে $P(1+i)^{n–3}$ এবং এইরূপে শেষ কিস্তির সমূল-চক্রবৃদ্ধি হবে P

সুতরাং এই n-সংখ্যক সমূল চক্রবৃদ্ধির সমষ্টি A হলে,

$$A = P(1 + i)^{n–1} + P(1 + i)^{n–2} + ... + P.$$

এই একটি গুণোত্তরীয় প্রগতি। এখানে প্রথম পদ = $P(1 + i)^{n–1}$ সাধারণ অনুপাত = $(1 + i)^{–1}$ এবং পদসংখ্যা n.

$$\therefore A = \frac{p}{i}\left[(1+i)^n - 1\right]$$

যদি বৎসরে p বার অর্থপ্রদান করা হয় (অর্থাৎ প্রতি কিস্তি $\frac{p}{p}$ টাকা), তবে

$$\boxed{\therefore A = \frac{P}{i}\left[\left(1+\frac{i}{p}\right)^{np} - 1\right]}$$

1.5.3 বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য (Present Value of an Annuity)

কোন বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য বলতে বিভিন্ন পর্ব শেষে প্রদেয় টাকার বর্তমান মূল্যসমূহের যোগফল বোঝায়।

ধর কোন সংস্থার 15 বছরের প্রতি বছরের শেষে 5000 টাকা প্রাপ্য। কিন্তু যদি ঐ সংস্থা তার পরিবর্তে থোক টাকা নিতে চায়, তবে যে পরিমাণ টাকা সংস্থার প্রাপ্য হবে তাকেই বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য বলা হবে।

সূত্র : n বৎসর মেয়াদী সাধারণ বার্ষিক কিস্তি P হলে চক্রবৃদ্ধি ধ'রে বর্তমান মূল্য নির্ণয় :

মনে করি, T_n = নির্ণেয় বর্তমান মূল্য

i = 1 টাকার 1 বৎসরের সুদ।

$\therefore$ 1 বৎসর পরে দেয় প্রথম কিস্তি P-এর বর্তমান মূল্য = $\dfrac{P}{1+i}$

2 বৎসর পরে দেয় দ্বিতীয় কিস্তি P-এর বর্তমান মূল্য = $\dfrac{P}{(1+i)^2}$ ইত্যাদি n বৎসর পরে দেয় শেষ কিস্তি P-এর বর্তমান মূল্য = $\dfrac{P}{(1+i)^n}$

$$\therefore T_n = P\left[\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

বা, $$T_n = \frac{P}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}\right] = \frac{P}{i}[1-(1+i)^{-n}]$$ [∵ গুণোত্তরীয় শ্রেণী]

যদি বৎসরে p বার অর্থ দেওয়া হয় তবে প্রদত্ত কিস্তি হয় $\dfrac{P}{p}$ এবং এক্ষেত্রে,

$$T_n = \left\{\left(\frac{P}{p}\right)\Big/\left(\frac{i}{p}\right)\right\}\times\left[1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}\right]$$

বা, $$\boxed{T_n = \frac{P}{i}\left[1-\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np}\right]}$$

চিরস্থায়ী বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য

$$\boxed{T_\infty = \frac{P}{i}}\left[\because \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{p}\right)^{-np} = 0\right]$$

1.5.4 উদাহরণমালা

উদা. 1. 4% চক্রবৃদ্ধি হারে 1000 টাকার বার্ষিক বৃত্তির 15 বৎসরের মোট অঙ্ক নির্ণয় করুন।

এখানে P = 1000, n = 15 এবং $i = \frac{4}{100} = .04$

$\therefore$ মোট অঙ্ক $A = \frac{P}{i}\left[(1+i)^n - 1\right] = 1000 \times 25\left[(1.04)^{15} - 1\right]$

মনে করি, $x = (1.04)^{15}$ $\therefore$ $\log x = 15 \log 1.04$

$\therefore \log x = 15[\log 10.4 - \log 10] = 15[\log 10.4 - 1]$

$= 15 \times .017 = .255.$

$\therefore$ x = অ্যান্টিলগ (.255) = 1.799

$\therefore$ A = 1000 × 25 [1.799 – 1] = 1000 × 25 × .799 = 25 × 799 = 19,975 টাকা

উদা. 2. বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি হারে 10 বৎসরে দেয় একটি বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য 15,000 টাকা হলে বার্ষিকীর পরিমাণ কত?

এখানে T_n = 15,000, $i = \frac{6}{100} = \cdot 06$

n = 10, P = ?

আমরা জানি, $T_n = \frac{P}{i}\left[1-(1+i)^{-8}\right]$

এখানে $15,000 = \frac{P}{\cdot 06}\left[1-(1\cdot 06)^{-10}\right]$

মনে করি, $x = (1{\cdot}06)^{-10}$ $\therefore \log x = -10 \log 1{\cdot}06$

বা, $\log x = -10[\log 10{\cdot}6 - 1] = -10\,[1{\cdot}0235 - 1]$

$= -10 \times {\cdot}0235 = -{\cdot}253 + 1 - 1$

$= \bar{1}{\cdot}747$

$\therefore$ x = অ্যান্টিলগ $(\bar{1}{\cdot}747) = {\cdot}5585$

$$\therefore 15{,}000 = \frac{P}{{\cdot}06}\left[1 - {\cdot}5585\right] = \frac{P}{{\cdot}06} \times {\cdot}4415$$

$$\therefore \text{P} = \frac{{\cdot}06 \times 15{,}000}{{\cdot}4415} = 2{,}038$$ টাকা (প্রায়)

উদা. 3. 12 বৎসর মেয়াদী 150 টাকার নিয়মিত বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় করুন।

[**প্রদত্ত :** $(1{\cdot}035)^{12} = 1{\cdot}511056$]

আমরা জানি, $T_n = \frac{P}{i}\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$

এখানে P = 150, n = 12, $i = \frac{3.5}{100} = .035$

$$\therefore T_n = \frac{150 \times 100}{3{\cdot}5}\left[1 - \frac{1}{(1{\cdot}035)^{12}}\right] = 1449{\cdot}50$$ টাকা।

উদা. 4. এক ব্যক্তি 50,000 টাকা মূল্যে একটি বাড়ী কিনতে ইচ্ছুক। তিনি নগদ 20,000 টাকা এবং বাকী টাকা 10টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে দিতে প্রস্তুত। যদি 8% হারে বার্ষিক সুদ ধার্য হয় তবে ঐ ব্যক্তিকে বার্ষিক কত টাকা দিতে হবে? [প্রদত্ত : $1/(1.08)^{10} = .4634$]

আমরা জানি, $T_n = \frac{P}{i}\left[1 - \frac{1}{(1_i)^{\text{n}}}\right]$

এখানে, T_n = 30,000, $i = \frac{8}{100} = .08, n = 10$, P = ?

$$\therefore 30{,}000 = \frac{P}{{\cdot}08}[1 - {\cdot}4634] = \frac{P}{{\cdot}08} \times {\cdot}5366$$

$$\therefore P = \frac{30{,}000 \times {\cdot}08}{{\cdot}5366} = 4472$$ টাকা।

উদা. 5. এক ব্যক্তি 10,000 টাকা ঋণ নিলেন। বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে বাৎসরিক 1000 টাকার কিস্তিতে তা শোধ করবেন। কত বৎসরে ঐ ঋণ শোধ হবে?

আমরা জানি, $T_n = \frac{P}{i}\left[1-(1+i)^{-n}\right]$

এখানে P = 1000, $i = \frac{5}{100} = .05,\ T_n = 10,000,\ n = ?$

$$\therefore 10,000 = \frac{1000}{\cdot 05}\left[1-(1\cdot 05)^{-n}\right]$$

$$= 1000 \times 20[1-(1\cdot 05)^{-n}]$$

বা, $\frac{1}{2} = 1-(1\cdot 05)^{n}$ বা, $(1\cdot 05)^{-n} = \frac{1}{2}$ বা, $(1\cdot 05)^{n} = 2$

$\therefore\ n \log(1\cdot 05) = \log 2 \quad \therefore n = \frac{\log 2}{\log 1\cdot 05} = 14\cdot 2$ বৎসর (প্রায়)।

1.6 অনুশীলনী

1. এক ব্যক্তি বার্ষিক 3% হারে সরল সুদে কিছু টাকা ধার করে 5% চক্রবৃদ্ধি হাকে সেই টাকা অন্যকে ধার দিল। যদি 3 বৎসর পরে 541 টাকা লাভ হয়ে থাকে, তবে সে কত টাকা ধার করেছিল?

[উঃ 8000 টাকা (প্রায়)

2. কোন ব্যক্তি সেভিংস ব্যাঙ্কে 5000 টাকা জমা রাখেন। চক্রবৃদ্ধি সুদের হার প্রথম 2 বৎসর বার্ষিক $4\frac{1}{2}\%$ এবং পরের 3 বৎসরে বার্ষিক 5%। 5 বৎসর পরে তার মোট কত টাকা হবে?

[উঃ 6320·78 টাকা]

3. চক্রবৃদ্ধিতে লগ্নী করার ফলে কোন টাকার দ্বিতীয় বৎসর শেষে 2704 টাকা এবং তৃতীয় বৎসর শেষে 2812.16 টাকা সমূল চক্রবৃদ্ধি হল। সুদের বাৎসরিক হার এবং মূলধন নির্ণয় করুন।

[উঃ 4%, 2500 টাকা]

4. বার্ষিক 6% হার সুদে 250 টাকার 10 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর, যখন সুদ তিন মাস অন্তর আসলের সাথে যোগ হয়। [উঃ 453·45 টাকা]

5. একটি বাড়ী নগদ 1,50,000 টাকা ও 5 বৎসর পরে 3,00,000 টাকা দিয়ে কেনা যায়। বার্ষিক 12.5% হারে সুদ যদি বৎসরান্তে আসলের সাথে যুক্ত হয় তবে বাড়ীটির দাম কত হওয়া উচিত।

[উঃ 3,16,380 টাকা]

6. যদি কোন শহরের লোকসংখ্যা প্রতি বৎসর ঐ বৎসরের শুরুতে যে লোকসংখ্যা ছিল তার 2% বৃদ্ধি পায়, তবে কত সময়ে জনসংখ্যা 40% বৃদ্ধি পাবে? [উঃ 17 বৎসর (প্রায়)]

7. একটি মেসিনের প্রারম্ভিক মূল্যের উপর 10% অবচয় ঘটে। মেসিনটির ক্রয়মূল্য 5810 টাকা এবং কিছুদিন ব্যবহার করার পরে 2250 টাকায় বিক্রয় করা হয়েছিল। মেসিনটি কত বৎসর ব্যবহার করা হয়েছিল? [উঃ 9 বৎসর (প্রায়)]

8. পোষ্ট অফিস 5 বৎসর মেয়াদের স্থায়ী জমার জন্য 14% হারে সরল সুদে দেয়। এই সুদ অর্ধ বৎসরান্তে দেয় চক্রবৃদ্ধির সমান হলে সুদের বার্ষিক হার কত? [উঃ 10.8%]

9. প্রতি বৎসরের শেষে অবচয় ধার্য করার পর কোন যন্ত্রের মূল্য যন্ত্রটির মূল্যের 90% হল। যন্ত্রটির ক্রয়মূল্য 12000 টাকা এবং ধাতুমূল্য 200 টাকা। যন্ত্রটি কতকাল ব্যবহার করা হয়েছিল?

[উঃ 38.8 বৎসর (প্রায়)]

10. কোন লোক সংখ্যার ক্ষেত্রে বার্ষিক জন্ম ও মৃত্যুর হার প্রতি হাজারে যথাক্রমে 39.4 এবং 19.4। কোন বহিরাগমন এবং নির্গমন না ঘটলে কত বৎসরে ঐ লোকসংখ্যা দ্বিগুণ হবে?

[উঃ 35 বৎসর]

11. কত মূল্যে 4 বৎসর মেয়াদের 1050 টাকার বার্ষিক বৃত্তি ক্রয় করা যাবে, যদি চক্রবৃদ্ধি হার বার্ষিক

$3\frac{1}{2}\%$ হয়? [উঃ 3846 টাকা]

12. বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে বৎসরান্তে দেয় এবং দশ বৎসর মেয়াদী 500 টাকার বার্ষিক বৃত্তির বর্তমান মূল্য নির্ণয় করুন। [উঃ 3862 টাকা]

13. বার্ষিক 4% হারে 15 বৎসরের মেয়াদের 150 টাকার বার্ষিক বৃত্তির মোট অঙ্ক নির্ণয় করুন। বৃত্তি এবং সুদ প্রতি অর্ধ বৎসর অন্তে দেওয়া হয়। [উঃ 3041·25 টাকা]

14. একটি কোম্পানী 10,000 টাকা এই শর্তে ধার করল যে বার্ষিক 5% হার সুদে তা 1000 টাকার বার্ষিক কিস্তিতে শোধ করা হবে। কত বৎসরে ধার শোধ হবে? [উঃ 14.2 বৎসর (প্রায়)]

15. এক ব্যক্তি 6% চক্রবৃদ্ধি হার সুদে 40,000 টাকা ধার নিলেন। তিনি প্রথম চার বৎসর প্রতি বৎসরে 9000 টাকা করে শোধ করবেন এবং বাকী টাকা পঞ্চম বৎসরের শেষে শোধ করবেন। শেষ কিস্তিতে তিনি কত টাকা দেবেন? [উঃ 11,800 টাকা]

16. এক ব্যক্তি 40,000 টাকা মূল্যের একটি বাড়ী ক্রয় করলেন। তিনি 10,000 টাকা নগদ দেবেন এবং ক্রয়ের দিন থেকে 1 বৎসর পরে প্রথম কিস্তিসহ 10টি সমান বার্ষিক কিস্তিতে অবশিষ্ট টাকা শোধ করবেন। বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হার হলে, প্রত্যেক কিস্তির পরিমাণ নির্ণয় করুন।

[উঃ 3884 টাকা (প্রায়)]

17. কোন কোম্পানী 10 বৎসর পরে দেয় 60,000 টাকার ডিবেঞ্চার পরিশোধ করবার জন্য বৎসরে 5000 টাকা জমা রাখে। তা বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে জমতে থাকলে ডিবেঞ্চার শোধ করে কত টাকা উদ্বৃত্ত থাকবে? [উঃ 2900 টাকা]

18. 25 বৎসরের শেষে 54,000 টাকা মূল্যের কিছু যন্ত্রপাতি বদলাবার জন্য একটি ঋণ পরিশোধ তহবিল (Sinking Fund) গঠন করা হল। যদি লগ্নী থেকে বার্ষিক 5% চক্রবৃদ্ধি হারে আয় হয় তবে প্রতি বৎসর লাভ থেকে কত পরিমাণ অর্থ ঐ তহবিলে জমা দেওয়া উচিত যদি ঐ সময় অন্তে যন্ত্রপাতির ধাতুমূল্য হিসাবে 4000 টাকা পাওয়া যায়? [উঃ 1047 টাকা (প্রায়)]

19. এক ব্যক্তি প্রতি বৎসর অন্তে 300 টাকা মূল্যের একটি বৃত্তি বিতরণ করবার জন্য একটি যৌতুক তহবিল (Endowment Fund) গঠন করতে ইচ্ছুক। বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি হারে তহবিলের টাকা লগ্নী করলে যৌতুকের টাকার পরিমাণ নির্ণয় করুন। [উঃ 3000 টাকা]

20. বার্ষিক $2\frac{3}{4}\%$ চক্রবৃদ্ধি হারে 5500 টাকা লগ্নী করে কত টাকার চিরস্থায়ী কিস্তি ক্রয় করা যাবে?

[উঃ 151 টাকা]

একক 2 ❑ সমীকরণ (Equation)

গঠন

2.1 উদ্দেশ্য

2.2 সমীকরণের সংজ্ঞা, সরল সমীকরণ ও দ্বিঘাত সমীকরণ

2.3 কয়েকটি বিশেষ উপপাদ্য

2.4 দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

2.4.1 দ্বিঘাত সমীকরণে পরিবর্তিত করা যায় এরূপ সমীকরণ

2.4.2 প্রশ্নমালা

2.4.3 দ্বিঘাত সমীকরণের তত্ত্ব

2.4.4 উদাহরণমালা

2.4.5 প্রশ্নমালা

2.5 প্রতিসম রাশিমালা

2.4.1 প্রশ্নমালা

2.6 একঘাতবিশিষ্ট সহ সমীকরণ

2.7 সহদ্বিঘাত সমীকরণ ঃ দুটি অজ্ঞাত রাশি

2.8 সহসমীকরণ ঃ তিনটি অজ্ঞাত রাশি

2.9 অনুশীলনী

2.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন সমীকরণ কী এবং তার প্রয়োগ, দ্বিঘাত সমীকরণ ও তার ব্যবহার, সমাধানের উপায় জানতে পারবেন।

2.2 সমীকরণ ঃ সরল এবং দ্বিঘাত

এক বা একাধিক চলরাশির সমন্বয়ে গঠিত দুটি বীজগাণিতিক রাশির সমতা যদি চলরাশিগুলির কতগুলি নির্দিষ্ট মানের জন্য সিদ্ধ হয় তবে সমতাটিকে সমীকরণ বলে। উদাহরণ স্বরূপ $5x + 22 = 12x + 1$ একটি সমীকরণ কারণ উহা চলরাশি x এর মান 3 এর জন্য সত্য। 3 কে সমীকরণটির একটি বীজ বলা হয়। যখন পূর্বে উল্লেখিত সমতাটি চলরাশিগুলির যেকোন মানের জন্য সত্য হবে তখন সমতাটিকে অভেদ বলা হবে। যথা $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ একটি অভেদ।

যে সমীকরণে একটি একঘাত অজ্ঞাত রাশি (x) থাকে তাকে একঘাত সমীকরণ বা সরল সমীকরণ বলা হয়।

দ্বিতীয় এবং তৃতীয় ঘাতের সমীকরণকে যথাক্রমে দ্বিঘাত (quadratic) এবং ত্রিঘাত (cubic) সমীকরণ বলে।

$7x + 2 = 0$ বা $ax + b = 0$ সরল সমীকরণ। $ax^2 + bx + c = 0, \ (a \neq 0)$ বা $x^2 + y^2 = r^2$ দ্বিঘাত সমীকরণ। $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

2.3 কয়েকটি বিশেষ উপপাদ্য

ভাগশেষ উপপাদ্য (Remainder Theorem) ঃ বাস্তব সহগযুক্ত কোন বহুপদ রাশিমালাকে $(x - h)$ দ্বারা ভাগ করলে, ভাগশেষটি ঐ রাশিমালায় x-এর স্থানে h বসিয়ে পাওয়া যায়।

উৎপাদক উপপাদ্য (Factor Theorem) ঃ x-চলরাশিযুক্ত কোন বহুপদ রাশিমালায় x-এর স্থলে h বসালে যদি রাশিমালাটির মান শূন্য হয়, তবে $(x - h)$ রাশিমালাটির একটি উৎপাদক।

বীজগণিতের মৌল উপপাদ্য (Fundamental Theorem of Algebra) ঃ বাস্তব সহগযুক্ত সকল সমীকরণের অন্ততঃ একটি বীজ থাকে।

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন ঃ

$$\frac{3x}{4} - 8 = \frac{2x}{5} + 3$$

বা, $\dfrac{3x - 32}{4} = \dfrac{2x + 15}{5}$ বা, $5(3x - 32) = 4(2x + 15)$

বা, $15x - 160 = 8x + 60$

বা, $7x = 220$ বা, $x = \frac{220}{7} = 31\frac{3}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 31\frac{3}{7}$

উদাহরণ ঃ 2. $3(x+3)^2 + 5(x+5)^2 = 8(x+8)^2$

বা, $3(x^2 + 6x + 9) + 5(x^2 + 10x + 25) = 8(x^2 + 16x + 64)$

বা, $18x + 27 + 50x + 125 = 128x + 512$

বা, $60x = 360$ বা, $x = \frac{360}{60} = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 6$

2.4 দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

একটি চলরাশিযুক্ত দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ সমাধানের প্রধানতঃ দুটি পদ্ধতির সাহায্য নেওয়া হয় ঃ

(i) উৎপাদক পদ্ধতি (ii) বর্গ নির্ণয় পদ্ধতি।

(i) একটি উদাহরণ নেওয়া যাক।

$3x^2 - 8x + 4 = 0$

বা, $3x^2 - 6x - 2x + 4 = 0$ বা, $3x(x-2) - 2(x-2) = 0$

বা, $(x-2)(3x-2) = 0$

সুতরাং, $x - 2 = 0$

অথবা, $(3x - 2) = 0$

বা, $x = 2$ অথবা, $x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 2$ বা $\frac{2}{3}$

(ii) $ax^2 + bx + c = 0$ (আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণ) $(a \neq 0)$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

বা, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a^2}$ বা, $x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

সুতরাং xএর দুটি মান $x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এবং $x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

উদাহরণ ঃ 3. সমাধান করুন ঃ $3x^2-10x+6=0$

এখানে, $a=3,\ b=-10,\ c=6$

$\therefore\ x=\frac{10\pm\sqrt{100-72}}{6}=\frac{10\pm\sqrt{28}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}$

2.4.1 দ্বিঘাত সমীকরণে পরিবর্তিত করা যায় এরূপ সমীকরণ

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন ঃ $4^x-5\cdot2^{x+2}+64=0$

বা, $(2^x)^2-20,\ 2^x+64=0$ মনে করি, $2^x=y$

$\therefore\ y^2-20y+64=0$, বা, $(y-4)(y-16)=0$

$\therefore\ y=4$, বা, $y=16$,

$\therefore\ 2^x=4$ বা, $2^x=2^2$ বা, $x=2$,

আবার, $2^x=16$, বা, $2^x=2^4$, বা, $x=4$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=2,\ 4$

উদাহরণ ঃ 2. সমাধান করুন ঃ $\sqrt{2x-5}-\sqrt{x-6}=3$

বা, $\sqrt{2x+5}=3+\sqrt{x-6}$ বর্গ নিয়ে পাই,

$$2x+5=\left(3+\sqrt{x-6}\right)^2=9+6\sqrt{x-6}+x-6$$

$$=x+3+6\sqrt{x-6}$$

বা, $x+2=6\sqrt{x-6}$ পুনরায় বর্গ নিয়ে পাই,

$(x+2)^2=36(x-6)$ বা, $x^2+4x+4=36x-216$

বা, $x^2-32x+220=0$ বা $(x-10)(x-22)=0$

বা, $x=10$ এবং $x=22$

উদাহরণ ঃ 3. সমাধান করুন ঃ $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)-9=0$

পুনরায় সাজিয়ে, $\{(x+2)(x+8)\}\{(x+4)(x+6)\}-9=0$

বা, $(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)-9=0$

$y=x^2+10x$ ধরে পাই,

$(y+16)(y+24)-9=0$

বা, $y^2+40y+375=0$

বা, $(y+25)(y+15)=0$

$\therefore\ y=-25$ বা, -15

যখন $y=-25$, $x^2+10x+25=0$, বা, $(a+5)^2=0$

বা, $x=-5,-5$

যখন $y=-15$, বা, $x^2+10x+15=0$,

বা, $x=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-60}}{2}=-5\pm\sqrt{10}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান -5, -5, $-5\pm\sqrt{10}$

2.4.2 প্রশ্নমালা

সমাধান করুন ঃ

(1) $\sqrt{6x-5}-\sqrt{3x-2}=2$ [উঃ 9]

(2) $2\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+8}=2$ [উঃ ± 5]

(3) $\sqrt{3x^2-7x+30}+\sqrt{3x^2-7x-5}=7$ [উঃ $3,-\frac{2}{3}$]

(4) $x^2+13x+42=0$ [উঃ $x=6$ বা 7]

(5) $x^2 + 2x - 24 = 0$ [উঃ $x = 4, -6$]

(6) $2^{2x} - 3.2^{x+2} + 32 = 0$ [উঃ 2, 3]

(7) $3^x + 3^{3-x} = 12$ [উঃ 1, 2]

(8) $5^{2x} - 6.5^{x+1} + 125 = 0$ [উঃ 1, 2]

(9) $(x+1)(x-3)(4x-3)(4x-5) = 4$ [উঃ 1, 1, $\frac{4 \pm \sqrt{65}}{4}$]

(10) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{7}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = 2$ [উঃ $2 \pm \sqrt{3}$]

2.4.3 দ্বিঘাত সমীকরণের তত্ত্ব (Theory of Quadratic Equation)

আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0,\ (a \neq 0)$

আমরা জানি, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ..... (1)

দ্রষ্টব্য ঃ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি এবং কেবল দুটিই বীজ আছে।

● দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সম্পর্ক

মনে করি, $ax^2 + bx + c = 0,\ (a \neq 0)$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β অতএব,

$$\alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},\quad \beta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \boxed{\alpha + \beta = -\frac{b}{a}} \boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$$

● পূরক বীজ (Conjugate roots) :

যদি $p + \sqrt{q}$ এবং $p - \sqrt{q}$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুটি বীজ হয় তবে একটিকে অপরটির পূরক বীজ বলে।

উপপাদ্য ঃ মূলদ সহগযুক্ত কোন দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ অমূলদ হলে অপর বীজটি তার পূরক হবে।

● বীজদ্বয়ের প্রকৃতি ঃ (i) যদি $b^2 - 4ac > 0$ হয় তবে বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে। [(1) থেকে পাই]

(ii) যদি $b^2 = 4ac$ হয়, তবে বীজদ্বয় বাস্তব এবং সমান।

(iii) যদি $b^2 - 4ac < 0$ হয় তবে বীজদ্বয় অবাস্তব এবং অসমান হবে।

(iv) যদি $b = 0$ তবে বীজদ্বয়ের মান সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।

($b^2 - 4ac$)-কে নিরুপক (Discriminant) বলে।

● **বীজদ্বয় জানা থাকলে সমীকরণ নির্ণয় ঃ**

মনেকরি, α, β, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয়। সমীকরণটি লেখা যায়

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ $[\because a \neq 0]$

বা, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

অর্থাৎ, $x^2 -$ (বীজদ্বয়ের যোগফল) $x +$ বীজদ্বয়ের গুণফল $= 0$

বা, $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

2.4.4 উদাহরণমালা

উদাহরণ ঃ 1. দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার একটি বীজ $3 + \sqrt{4}$

যেহেতু একটি বীজ $3 + \sqrt{4}$ (অমূলদ) অপর বীজটি হবে $3 - \sqrt{4}$

মনেকরি, $\alpha = 3 + \sqrt{4}$ $\beta = 3 - \sqrt{4}$

নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

বা, $x^2 + 6x + 5 = 0$

উদাহরণ ঃ 2. দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজদ্বয় $x^2 - 15x + 56 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় থেকে 2 কম।

মনেকরি, α, β, $x^2 - 15x + 56 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয়,

$\therefore \alpha + \beta = 15, \alpha\beta = 56$

নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha - 2, \beta - 2$

এখন $(\alpha - 2) + (\beta - 2) = \alpha + \beta - 4 = 15 - 4 = 11$

$(\alpha - 2)(\beta - 2) = \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4$

$= 56 - 30 + 4 = 30$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x^2 - 11x + 30 = 0$

উদাহরণ ঃ 3. $ax^2 + bx + c = 0$ এবং $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকবার শর্ত নির্ণয় করুন।

মনেকরি, α দুটি সমীকরণেরই একটি বীজ।

$\therefore\ a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

এবং $a^1\alpha^2 + b^1\alpha + c^1 = 0$

বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই, $\dfrac{\alpha^2}{bc^1 - cb^1} = \dfrac{\alpha}{a^1c - c^1a} = \dfrac{1}{ab^1 - b^1a}$

প্রথম দুইটি সমতা থেকে $\alpha = \dfrac{bc^1 - cb^1}{a^1c - c^1a}$ ......(1)

শেষ দুটি সমতা থেকে $\alpha = \dfrac{ca^1 - ac^1}{ab^1 - ba^1}$ ....(2)

(1) এবং (2) থেকে $\dfrac{bc^1 - cb^1}{a^1c - c^1a} = \dfrac{ca^1 - ac^1}{ab^1 - a^1b}$

বা, $(bc^1 - cb^1)(ab^1 - a^1b) = (ca^1 - ac^1)^2$

এটাই নির্ণেয় শর্ত।

উদাহরণ ঃ 4. $ax^2 + bx + c = 0$ এর বীজদ্বয় ঋণাত্মক হলে দেখান যে a, b, c একই চিহ্ন যুক্ত হবে।

মনেকরি, α, β দুটি বীজ এবং $\alpha = -p^2$ এবং $\beta = -q^2$

$\therefore\ \alpha + \beta = -(p^2 + q^2) = -\dfrac{b}{a}$ বা, $p^2 + q^2 = \dfrac{b}{a}$ এখানে বামপক্ষ ধনাত্মক, সুতরাং a এবং b উভয়েই ধনাত্মক অথবা উভয়েই ঋণাত্মক হবে। আবার $\alpha\beta = (-p^2)(-q^2) = p^2q^2 = \dfrac{c}{a}$

$\therefore\ p^2q^2 = \dfrac{c}{a}$. p^2q^2 ধনাত্মক সুতরাং a এবং c-র একই চিহ্ন হবে। অতএব a, b, c-র একই চিহ্ন হবে।

2.4.5 প্রশ্নমালা

(1) যদি $4x^2 + 9x + c = 0$-এর একটি বীজ অপরটির দ্বিগুণ হয় তবে বীজদ্বয় এবং c নির্ণয় করুন।

[উঃ $-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2}$]

(2) নিম্নের সমীকরণগুলির বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করুন ঃ

(i) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ [উঃ বাস্তব, মূলদ ও সমান]

(ii) $x^2 - 6x + 2 = 0$ [উঃ বাস্তব, অমূলদ ও অসমান]

(3) m-এর কোন মানের জন্য $(m + 2)x^2 + (3m - 2)x + 2m - 3 = 0$-র সমান বীজ থাকবে।

[উঃ 2, 14]

(4) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজদ্বয় $\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}$

[উঃ $12x^2 + x - 6 = 0$]

(5) দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার একটি বীজ $(5-4\sqrt{3})$ [উঃ $x^2 + 10x - 23 = 0$]

(6) দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজ $p \pm \sqrt{p^2 - 4q}$

[উঃ $x^2 - 2px + 4q = 0$]

(7) $ax^2 + bx + c = 0$-এর একটি বীজ যদি অপরটির চারগুণ হয় তবে দেখান যে $4b^2 = 25ac$

(8) যদি $ax^2 + bx + c = 0$-এর বীজদ্বয় $m : n$ অনুপাতে থাকে; দেখান যে,

$$\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 0$$

(9) যদি $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$-এর একটি সাধারণ বীজ থাকে তবে দেখান যে $p = q$ অথবা $p + q + 1 = 0$

(10) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ নির্ণয় করুন যার বীজদ্বয় $3x^2 - 7x + 5 = 0$ বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক।

[উঃ $5x^2 - 7x + 3 = 0$]

2.5 প্রতিসম রাশিমালা (Symmetric Expression)

α, β দুই রাশিযুক্ত যে রাশিমালায় α, β-র স্থান বিনিময়ের ফলেও যদি রাশিমালাটি অপরিবর্তিত থাকে তবে তাকে প্রতিসম বলে। যথা $\alpha^2+\beta^2, \frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$, $\alpha\beta$ ইত্যাদি।

উদাহরণ ঃ 1. যদি α, β $2x^2 - 3x + 4 = 0$ এর দুইটি বীজ হয় তবে $\alpha^3+\beta^3$-এর মান নির্ণয় করুন। এখানে, $\alpha^3+\beta^3 = +\frac{3}{2}$, $\alpha\beta = \frac{4}{2} = 2$

$$\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta) = \frac{27}{8} - 6\times\frac{3}{2} = \frac{27}{8} - - = \frac{-45}{8}$$

উদাহরণ ঃ 2. α, β, $ax^2+bx+c=0$-এর দুটী বীজ হল $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$-এর মান নির্ণয় করুন।

এখানে, $\alpha+\beta = \frac{-b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^2\ 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2-2ac}{ac}$$

উদাহরণ ঃ 3. যদি α এবং β $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের দুটি বীজ হয় তবে $\frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3}$ এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $ax^2+bx+c=0....(1)$ α, β এই সমীকরণের দুটি বীজ। $\therefore \alpha+\beta = -\frac{b}{a}$; $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $a\alpha + a\beta = -b$ বা, $a\alpha + b = -a\beta$ এবং $a\beta + b = -a\alpha$

$$\therefore \frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3} = \frac{1}{(-a\beta)^3}+\frac{1}{(-a\alpha)^3} = -\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\alpha^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{a^3}\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}\right) = -\frac{1}{a^3}\left[\frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^3}\right]$$

$$= -\frac{1}{a^3}\cdot\frac{-\frac{b^3}{a^3}-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)}{\frac{c^3}{a^3}} = \frac{b^3-3abc}{a^3c^3}$$

● **x-এর বাস্তব মানের জন্য $ax^2 + bx + c$-এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান ঃ**

1. a ধনাত্মক হলে $\frac{4ac-b^2}{4a}$ সর্বনিম্ন মান।

2. a ঋণাত্মক হলে $\frac{4ac-b^2}{4a}$ সর্বোচ্চ মান।

$ax^2 + bx + c$-এর চিহ্ন ঃ

(i) যদি উপরের রাশিমালার বীজদ্বয় বাস্তব এবং সমান হয় তবে $ax^2 + bx + c$ এবং a-র চিহ্ন একই হবে।

(ii) যদি বীজদ্বয় বাস্তব এবং অসমান হয়, (ধরি $\alpha > \beta$) তবে x, α এবং β-র মধ্যে না থাকলে a এবং $ax^2 + bx + c$-এর একই চিহ্ন হবে এবং x, α এবং β-র মধ্যে থাকলে a এবং $ax^2 + bx + c$-এর বিপরীত চিহ্ন হবে।

উদাহরণ ঃ 1. x বাস্তব হলে, $3x^2 - 5x + 4$-এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন।

মনেকরি, $y = 3x^2 - 5x + 4 \quad \therefore \quad 3x^2 - 5x + 4 - y = 0$

নিরূপক $= 25 - 12(4 - y) = 12y - 23 = 12\left(y - \frac{23}{12}\right)$

x বাস্তব সুতরাং নিরূপক ঋণাত্মক হবে না অর্থাৎ $y \geq \frac{23}{12}$

$\therefore$ $3x^2 - 5x + 4$-এর সর্বনিম্ন মান $\frac{23}{12}$

উদাহরণ ঃ 2. $1 + 8x - 6x^2$-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করুন।

মনেকরি, $y = 1 + 8x - 6x^2 \quad \therefore \quad (1-y) + 8x - 6x^2 = 0$

বা, $6x^2 - 8x + (y-1) = 0$

নিরূপক $= 64 - 24(y - 1) = 64 + 24 - 24y = 88 - 24y = 4(22 - 6y)$

সুতরাং $(22 - 6y)$ ঋণাত্মক হবে না।

$\therefore$ $\frac{22}{6}$ বা $\frac{11}{3}$ সর্বোচ্চ মান।

উদাহরণ ঃ 3. দেখান যে x-এর বাস্তব মানের জন্য $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ এর মান 5 এবং 9-এর মধ্যে থাকতে পারে না।

মনেকরি, $y = \frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$

বা, $x^2(1-y) + 2x - (17-y) + 7y - 71 = 0$

নিরূপক $= 4(17-y)^2 - 4(1-y)(7y-71)$

$= 32(y-9)(y-5)$

x বাস্তব, সুতরাং নিরূপক ঋণাত্মক হবে না।

যদি $y > 9$ বা $y < 5$ হয় তবে নিরূপক ধনাত্মক হয়। যদি $y > 5$, কিন্তু $y < 9$ নিরূপক ঋণাত্মক হবে। সুতরাং y-এর মান 5 এবং 9-এর মধ্যে থাকতে পারে না।

2.5.1 প্রশ্নমালা

(1) যদি α ও β, $ax^2 + bx + c = 0$ এর বীজদ্বয় হয় তবে $\frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{\beta^2}{\alpha}$ এর মান নির্ণয় করুন।

[উঃ $\pm\frac{(b^2-ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^2c}$]

(2) $1 + 8x - 6x^2$-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{11}{3}$]

(3) $x^2 - 6x + 10$-এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করুন। [উঃ 1]

(4) দেখান x-এর বাস্তব মানের জন্য $\frac{6x^2-22x+21}{5x^2-18+17}$ -এর মান 1 এবং $\frac{5}{4}$ -এর মধ্যে থাকে।

(5) দেখান x-এর বাস্তব মানের জন্য $\frac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$ -এর মান 1 এবং –7-এর মধ্যে থাকতে পারে না।

2.6 একঘাত বিশিষ্ট সহ-সমীকরণ (Simultaneous Linear Equations)

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ......(1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ......(2)

একটি একঘাত সহ-সমীকরণ গঠন করে। x ও y-এর মান নির্ণয় করতে হবে যা (1) এবং (2)-কে সিদ্ধ করে।

(1) এবং (2)-থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই

$$\frac{x}{b_1c_2 - c_1b_2} = \frac{y}{c_1a_2 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

$$\therefore \quad x = \frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - b_1a_2}, y = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \quad [a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0]$$

এই হ'ল নির্ণেয় সমাধান।

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন ঃ $3x + 2y + 17 = 0, \; 5x - 6y - 9 = 0$

বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই $\dfrac{x}{-18+102} = \dfrac{y}{85+27} = \dfrac{1}{-18+10}$

বা, $\dfrac{x}{84} = \dfrac{y}{112} = \dfrac{-1}{28} \qquad \therefore \; x = -\dfrac{84}{28} = -3$

$$y = \frac{-112}{28} = -4$$

উদাহরণ ঃ 2. সমাধান করুন ঃ

$$\frac{3}{x} + \frac{7}{y} = 6 \text{ .....(1)}, \; \frac{5}{x} + \frac{8}{y} = 7\frac{19}{21} = 7 + \frac{19}{21} \text{ .....(2)}$$

$$(1) \times 5, \quad \frac{15}{x} + \frac{35}{y} = 30$$

$$(2) \times 3, \quad \frac{15}{x} + \frac{24}{y} = 21 + \frac{19}{7}$$

বিয়োগ ক'রে, $\frac{11}{y} = 9 - \frac{19}{7} = \frac{63-19}{7} = \frac{44}{7}$

$\therefore\ \frac{1}{y} = \frac{4}{7}\quad \therefore\ y = \frac{7}{4}$

(1) এ $\frac{1}{y}$ -এর মান বসিয়ে পাই $x = \frac{3}{2}$

2.7 সহ-দ্বিঘাত সমীকরণ ঃ দুটি অজ্ঞাত রাশি

একটি দ্বিঘাত ও একটি একঘাত ঃ একঘাত সমীকরণ থেকে একটি অজ্ঞাত রাশির মান দ্বিঘাত সমীকরণটিতে বসাতে হবে।

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন ঃ $x^2 + xy = 12$ ......(1), $2x - y = 5.$ ......(2)

(2) থেকে পাই $y = 2x - 5$ (1)-এ বসিয়ে পাই

$x^2 + x(2x - 5) = 12$ বা, $x^2 + 2x^2 - 5x - 12 = 0$

বা, $3x^2 - 5x - 12 = 0$ বা, $(x - 3)(3x + 4) = 0$

$\therefore\ x = 3$ বা, $x = \frac{4}{3}$

যখন $x = 3,\ y = 2.3 - 5 = 1$

যখন $x = -\frac{4}{3}, y = -\frac{4}{3}.2 - 5 = -\frac{8}{3} - 5 = -\frac{23}{3}$

উদাহরণ ঃ 2. সমাধান করুন ঃ $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2}$ ....(1)

$$x + y = 10 \quad ....(2)$$

(1) থেকে $\frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}$ বা, $\frac{10}{\sqrt{xy}} = \frac{5}{2}$ বা, $\frac{1}{\sqrt{xy}} = \frac{1}{4}$

বা, $\sqrt{xy} = 4$, $xy = 16$ ..... (3)

(2) থেকে $x = 10 - y \quad \therefore\ (10 - y)\,y = 16$ বা $10y - y^2 = 16$

বা, $y^2 - 10y + 16 = 0$ বা $(y - 2)(y - 8) = 0 \ \therefore\ y - 2,\ 8$

যখন $y = 2$, (2) থেকে $x = 8$

যখন $y = 8$, (2) থেকে $x = 2$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy. = 100 - 4.16$ [(2) এবং (3) হইতে]

$\therefore\ (x - y)^2 - 36 \quad \therefore\ x - y = \pm 6$ ...(4)

(2) এবং (4) থেকে যোগ ও বিয়োগ দ্বারা x, y নির্ণয় করা যায়।

2.8 সহ-সমীকরণ ঃ তিনটি অজ্ঞাত রাশি

যখন তিনটি সমীকরণের মধ্যে দুইটি x, y, z-এ একঘাত তখন সেই দুটি থেকে x এবং y-কে z-এর সাপেক্ষে প্রকাশ ক'রে তৃতীয় সমীকরণে বসাতে হবে।

উদাহরণ ঃ 1. সমাধান করুন ঃ

$x + y + z = 6$ ....(1)

$2x - y + 5z = 15$ ....(2)

$yz + zx + xy = 11$ ....(3)

(1), (2) যোগ করে পাই $3x + 6z = 21$ বা, $x + 2z = 7$

বা, $x = 7 - 2z$ .... (4)

আবার $(2) - 2 \times (1)$ থেকে পাই $-3y + 3z = 3$

বা, $y = z - 1$ .... (5). (4) এবং (5) থেকে x, y-এর মান (3)-এ বসিয়ে,

$(z - 1)z + z(7 - 2z) + (7 - 2z)(z - 1) = 1$

বা, $z^2 - 5z + 6 = 0$ বা, $(z - 3)(z - 2) = 0 \ \therefore\ z = 3,\ 2.$

(4) এবং (5) থেকে $x = 1,\ 3.$ এবং $y = 2,\ 1.$

দ্রষ্টব্য ঃ একঘাত সমীকরণ দুটিতে যদি ধ্রুবক রাশি না থাকে তখন বজ্রগুণন পদ্ধতি সুবিধাজনক।

উদাহরণ ঃ 2. সমাধান করুন ঃ $xy = a^2,\ yz = b^2,\ zx = c^2,$

$\therefore\ x^2y^2z^2 = a^2b^2c^2$ বা, $xyz = \pm abc$

$\therefore \quad \frac{xyz}{xy} = \pm\frac{abc}{a^2}$ বা, $z = \pm\frac{bc}{a}$

অনুরূপে $x = \pm\frac{ca}{b}, \ y = \pm\frac{ab}{c}$

উদাহরণ ঃ 3. $(y + z)(z + x) = 40$ .....(1)

$(z + x)(x + y) = 36$ .....(2)

$(x + y)(y + z) = 90$ .....(3)

$(1) \times (2) \times (3), \ (y + z)^2 (z + x)^2 (x + y)^2 = 40 \times 36 \times 90$

বা, $(y + z)(z + x)(x + y) = \pm 10\times6\times2\times3 = \pm 360$ ...(4)

(1), (2), (3) এবং (4) থেকে পাই

$x + y = \pm 9, \ y + z = \pm 10, \ z + x = \pm 4$ ...(5)

$\therefore \ 2(x + y + z) = \pm(9 + 10 + 4) = \pm 23$

$\therefore \ x + y + z = \pm\frac{23}{2}$ ...(6)

(5) এবং (6) থেকে $x = \pm\frac{3}{2}, y = \pm\frac{15}{2}, z = \pm\frac{5}{2}$

উদাহরণ ঃ 4. সমাধান করুন ঃ $x^2 - yz = a$ .....(1)

$y^2 - zx = b$ .....(2)

$z^2 - xy = c$ .....(3)

$(1) \times y + (2) \times z + (3) \times x, \quad cx + ay + bz = 0$ .....(4)

$(1) \times z + (2) \times x + (3) \times y, \quad bx + cy + az = 0$ .....(5)

(4) ও (5) থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই $\frac{x}{a^2 - bc} = \frac{y}{b^2 - ca} = \frac{z}{c^2 - ab} = k$ (ধরি)

$\therefore \ x = k(a^2 - bc), \ y = (b^2 - ca), \ z = k(c^2 - ab)$

(1)-এ বসিয়ে পাই $K = \pm\frac{1}{\sqrt{a^3 - b^3 + c^3 - 3abc}}$

$\therefore \ x = \pm\frac{a^2 - bc}{\sqrt{a^3 - b^3 + c^3 - 3abc}}$ অনুরূপ y এবং z পাওয়া যাবে।

2.9 অনুশীলনী

সমাধান করুন ঃ

(1) $x^2 + xy = 15,\ x - y = 1.$ [উঃ $x = 3, -\frac{5}{2}$]

(2) $x^2 + y^2 = 13,\ x + y = 5.$ [উঃ $x = 2,\ 3$]

(3) $2x^2 + 3xy + y^2 = 15,\ 5x + 2y = 12.$ [উঃ $x = 2,\ 14;\ y = 1,\ -29$]

(4) $x + y = \frac{5}{6}, \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$ [উঃ $x = \frac{1}{3}, \frac{5}{2}; y = \frac{1}{2}, \frac{-5}{3}$]

(5) $x - y = 16,\ \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{16}{15}$ [উঃ $x = 25, -9,\ y = 9, -25$]

(6) $x + y + xy = 5,\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$ [উঃ $x = 2,\ y = 1, x = 1,\ y = 2$]

(7) $x + y = 5, x^2 + 2y^2 - xy = 11$ [উঃ $x = 3, \frac{13}{4};\ y = 2, \frac{7}{4}$]

(8) $4x + 5y - 3z = 5,\ 2x - 3y + 4z = 8,\ x^2 + y^2 - z^2 = 14$

[উঃ $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$, বা, $x = 3,\ y = -2,\ z = -1$]

(9) $x(y + z) = 5,\ y(z + x) = 8,\ z(x + y) = 9$

[উঃ $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$, বা, $x = -1,\ y = -2,\ z = -3$]

(10) $y + z = \frac{1}{x},\ z + x = \frac{1}{y},\ x + y = \frac{1}{z}$ [উঃ $x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$]

(11) $xz + y = 7z,\ yz + x = 8z,\ x + y + z = 12$ [উঃ $x = 4, \frac{60}{7},\ x = 6, \frac{66}{7},\ z = 2, -6$]

(12) $x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, y + \frac{1}{z} = \frac{7}{3}, z + \frac{1}{x} = 4$ [উঃ $x = 1, \frac{3}{10};\ y = 2, \frac{5}{6};\ z = 3, \frac{2}{3};$]

(13) $x^2 - yz = 5,\ y^2 - zx = 3,\ z^2 - xy = -1,$ [উঃ $x = 2, -2,\ y = 1, -1,\ z = -1, 1$]

(14) $xy = 56 ;\ yz = 40 ;\ zx = 35,$ [উঃ $x = \pm 7,\ y = \pm 8,\ z = \pm 5$]

(15) একটি সমকোণী ত্রিভুজের পরিসীমা 60 সে. মি. এবং ক্ষেত্রফল 150 বর্গ সে. মি. হলে ত্রিভুজটির বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন। [**উঃ** 15 সে. মি., 20 সে. মি. এবং 25 সে. মি.]

[**সংকেত ঃ** মনে করি সমকোণী ত্রিভুজটির অতিভূজের দৈর্ঘ্য x সেমি এবং অপর দুই বাহুর দৈর্ঘ্য y এবং z সে.মি., তাহলে প্রশ্নানুসারে, $x + y + z = 60$ .... (1) ; $yz = 150$ ....(2) এবং $y^2 + z^2 = x^2$ ....(3) ($\therefore$ ত্রিভুজটি সমকোণী)]

(16) কোন একটি শিল্পে উৎপন্ন সামগ্রীর চাহিদা ও যোগানের সূত্র নীচে দেওয়া হল ঃ

$pq = 100$, $q = 3p + 20$, যেখানে p মূল্য ও q পরিমাণকে প্রকাশ করে। সাম্যাবস্থায় মূল্য ও পরিমাণের মান নির্ণয় করুন। [**উঃ** একক ; 30 একক]

(17) কোন দ্রব্যের চাহিদা সমীকরণ $p - 3q = 22$ এবং যোগান সমীকরণ $q^2 + 2p + 4q = 100$ যেখানে p দ্রব্যটির দাম এবং q দ্রব্যটির পরিমাণ। তা হলে দ্রব্যটির বাজার ভারসাম্য দাম ও বাজার ভারসাম্য পরিমাণ নির্ণয় করুন।

একক 3 ❑ বিন্যাস এবং সমবায় (Permutation and Combination)

গঠন

3.1 উদ্দেশ্য

3.2 বিন্যাস ও সমবায় — প্রাথমিক ধারণা

3.3 বিন্যাস

3.3.1 বিন্যাস সংখ্যার সূত্র

3.3.2 সবগুলি বিভিন্ন নয় এরূপ বস্তুসমূহের বিন্যাস

3.3.3 প্রশ্নমালা

3.4 সমবায়

3.4.1 উদাহরণমালা

3.5 অনুশীলনী

3.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়ে আপনি জানতে পারবেন বিন্যাস ও তার ব্যবহার, সমবায় কী ও তার ব্যবহার, বিন্যাসের সূত্র ও ব্যবহারিক ক্ষেত্রে তার প্রয়োগ।

3.2 বিন্যাস ও সমবায়—প্রাথমিক ধারণা

বিন্যাস (permutation) : কতিপয় বস্তুর সবকটি অথবা কয়েকটি একটি নির্দিষ্ট ক্রম অনুসারে সাজালে ঐ বিশেষ সজ্জিত অবস্থাকে বিন্যাস (Permutation) বলে। মনে করি a, b দুটি বস্তু। দুটিকে নিয়ে ab এবং ba এই দুটি ক্রমে সাজানো যায়। অর্থাৎ এক্ষেত্রে দুটি বিন্যাস পাওয়া যায়। a, b, c তিনটি বস্তু হ'লে নিম্নলিখিত ছয়টি বিন্যাস পাই : abc, acb, bca, bac, cab, cba, a, b, c থেকে দুটি করে নিয়ে নিম্নলিখিত বিন্যাস পাওয়া যায় : ab, ba, bc, cb, ac, ca.

সমবায় (Combination) : কতিপয় বস্তুর সবকটি অথবা কয়েকটি নিয়ে ক্রম নিরপেক্ষ যে বিভিন্ন দল বা সংকলন করা যায় তার প্রতিটিকে একটি সমবায় বলে।

a ও bকে নিয়ে ক্রম নিরপেক্ষ একটি মাত্র দল ab গঠন করা যায়। (এখানে ab এবং ba একই দল)। a, b, c কে নিয়েও একটি মাত্র দলই গঠন করা যায় অর্থাৎ একটি মাত্র সমবায় সম্ভব। আবার, a, b, c থেকে দুটি ক'রে নিয়ে তিনটি সমবায় ab, bc, ca গঠন করা যায়।

একটি সমবায় থেকে একাধিক বিন্যাস পাওয়া যেতে পারে। যথা ab একটি সমবায়। এটা থেকে দুটি বিন্যাস ab ও ba পাওয়া যায়।

উদা. 1. 2, 5, 7, 9 অঙ্কগুলি থেকে তিনটি ক'রে নিয়ে কতগুলি সংখ্যা নির্ণয় করা যায় যাতে একটি অঙ্ক দুবার নেওয়া যাবে না?

শতকের স্থানে চারটি অঙ্কের যে কোন একটি নিতে পারি অর্থাৎ শতকের স্থানটি চারভাবে পূর্ণ করা যায়। শতকের স্থান পূর্ণ হবার পর দশকের স্থানে তিনটি অঙ্কের যে কোন একটি নেওয়া যায় অর্থাৎ, দশকের স্থান তিনভাবে পূর্ণ করা যায়। অনুরূপে এককের স্থান দুইভাবে পূর্ণ করা যায়। অতএব নির্ণেয় সংখ্যা $4 \times 3 \times 2 = 24$.

যেহেতু একটি সংখ্যা 257-এর ক্রম পরিবর্তন করলে অন্য সংখ্যা পাওয়া যায় সুতরাং এক্ষেত্রে আমাদের বিন্যাস বিবেচনা করতে হবে। তিনটি ক'রে নিয়ে 24টি বিন্যাস পান কিনা দেখুন।

উদা. 2. 5 জন সদস্য থেকে 3 জনকে একটি কমিটিতে কত প্রকারে নির্বাচিত করা যায়?

পাঁচজন সদস্যকে 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্ক দ্বারা চিহ্নিত করা যাক। তিনজনের কমিটি তৈরী করতে হবে। এখানে ক্রম বিবেচনা করা অর্থহীন। নিম্নরূপে কমিটি গঠন করা যায় :

সদস্য : 1 2 3 4 5

কমিটি : 123, 124, 125, 134, 135, 145,
234, 235, 345, 245

যেহেতু এখানে সদস্য নির্বাচন ক্রম-নিরপেক্ষ সুতরাং সমবায় বিবেচনা করতে হবে।

3.3 বিন্যাস (Permutation)

উদা. 1 থেকে একটি সূত্র বিবৃত করা যায় :

সূত্র : যদি কোন কাজ m বিভিন্ন প্রকারে করা যায় এবং যদি m প্রকারের মধ্যে যে কোন এক প্রকারে

উক্ত কাজ করা হয় এবং যদি দ্বিতীয় একটি কাজ n উপায়ে করা যায় তবে ঐ দুটি কাজ একটির পর একটি $m \times n$ বিভিন্ন প্রকারে করা যায় ইত্যাদি।

উদা. 2. 2, 5, 7, 9 চারিটি অঙ্ক থেকে তিনটি অঙ্ক দ্বারা গঠিত কতগুলি সংখ্যা নির্ণয় করা যায়? প্রতিটি সংখ্যা পুনরায় ব্যবহার করা যেতে পারে।

উদা. 1-এর মত শতকের স্থান 4 উপায়ে পূর্ণ করা যায়। যেহেতু একটি অঙ্ককে পুনরায় ব্যবহার করা যায়, দশকের স্থানটিও 4 এবং অনুরূপে এককের স্থানটিও 4 উপায়ে পূর্ণ করা যায়। সুতরাং নির্ণেয় উপায় $= 4 \times 4 \times 4 = 64$.

3.3.1 প্রতিপাদ্য

n-সংখ্যক বস্তু থেকে r সংখ্যক ক'রে বস্তু নিয়ে বিভিন্ন বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয় $[r \leq n]$.

এই বিন্যাসের সংখ্যাটিকে ${}^{n}p_{r}$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা যায়। কোন বিন্যাসে একটি বস্তু কেবল একবারই থাকতে পারে।

মনে করি, r সংখ্যক ঘর আছে।

1	2	3		r–1	r
n	n–1	n–2			n–(r–1)

প্রথম ঘরে n বস্তুর যে কোন একটিকে রাখতে পারেন এবং এটি n উপায়ে করা যায়। যেহেতু, এই বস্তুটিকে আর ব্যবহার করা যাবে না সুতরাং দ্বিতীয় স্থান $(n–1)$ উপায়ে একটি বস্তু রাখা যায়। অনুরূপে r-ঘরটিতে $n–(r–1)$ উপায়ে একটি বস্তু রাখা যায়। অতএব, n সংখ্যক বস্তু থেকে r-বস্তু ক'রে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা পূর্বে বিবৃত সূত্র অনুসারে $n(n-1)...(n-r+1)$

অর্থাৎ, ${}^{n}P_{r} = n(n-1)........(n-r+1)$

যদি $r = n$ নেওয়া যায় তবে

${}^{n}P_{n} = n(n-1)........2.1 = \underline{|n}$ বা $n1$ এইরূপ চিহ্ন ব্যবহার করা হয় এবং $\underline{|n}$ বা $n1$কে ফ্যাকটোরিয়াল n এইরূপ বলা হয়। $\underline{|o} = 1$ ধরা হয়।

$\therefore\ {}^{n}p_{r} = n(n-1)(n-2)......\ (n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)...\ ...(n-r+1)(n-r)...2.1}{(n-r)(n-r-1)...\ \ ...2.1}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$$

উদা. 3. $^{9}P_{6} = \frac{\underline{|9}}{\underline{|9-6}} = \frac{\underline{|9}}{\underline{|3}} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1}$

দ্রষ্টব্য : $\underline{|n} = n.\underline{|n-1}$

কারণ $\underline{|n} = n.(n-1)(n-2)...3.2.1$

$\underline{|n-1} = (n-1)(n-2)...3.2.1$

$\therefore$ $\underline{|n} = n.\underline{|n-1}$ অনুরূপে, $\underline{|n} = n(n-1).\underline{|n-2}$

উদা. $\underline{|10} = 10.\underline{|9} = 10.9\underline{|8}$ ইত্যাদি।

3.3.2 সবগুলি বিভিন্ন নয় এরূপ বস্তুসমূহের বিন্যাস

প্রতিপাদ্য : সবগুলি বিভিন্ন নয় এরূপ n-সংখ্যক বস্তুর সবগুলিকে একযোগে নিয়ে বিন্যাসের সংখ্যা নির্ণয়।

মনে করি, n-বস্তু n-অক্ষর দ্বারা চিহ্নিত করা হল যার মধ্যে 'a' p-সংখ্যক, 'b' q-সংখ্যক, এবং 'c' r-সংখ্যক আছে এবং বাকীগুলি বিভিন্ন। মনে করি, x নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা। যদি p-সংখ্যক 'a' বিভিন্ন হত তবে প্রতিটি x বিন্যাসের জন্য এদের নিজেদের বিন্যাস সংখ্যা হত $\underline{|p}$. সুতরাং x বিন্যাসের জন্য হত $x\underline{|p}$ বিন্যাস যেখানে 'b' q-সংখ্যক এবং 'c' r-সংখ্যক আছে। অনুরূপে q-সংখ্যক 'b' এবং r-সংখ্যক 'c'কেও বিভিন্ন ধরলে x বিন্যাসের জন্য মোট বিন্যাস সংখ্যা হবে $x\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}$ অর্থাৎ n বস্তুই যদি বিভিন্ন হত তবে বিন্যাস সংখ্যা হত $x\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}$. আবার জানি n সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সবগুলিকে একযোগে নিয়ে বিন্যাস সংখ্যা = $\underline{|n}$.

$\therefore$ $x\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r} = \underline{|n}$

বা, $\boxed{x = \frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}}}$

উদা. 4. ENGINEERING শব্দটিকে কত প্রকারে সাজান যায়?

এখানে মোট অক্ষর = 11, E = 3টি, N = 3টি, G = 2টি, I = 2টি।

সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস $= \dfrac{\underline{|11}}{\underline{|3}\times\underline{|3}\times\underline{|2}\times\underline{|2}}$

$$= \frac{11\times10\times\not{9}\times\not{8}\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{\not{3}\times\not{2}\times1\times\not{3}\times\not{2}\times1\times\not{2}\times1\times\not{2}\times1} = 2,77,200$$

উদা. 5. FAILURE শব্দের অক্ষরগুলির দ্বারা কতগুলি বিন্যাস করা যেতে পারে যেখানে AEIU সর্বদা একসাথে থাকবে?

(AEIU) কে একটি বস্তু ধরে আমরা FLR(AEIU) এই চারটি বস্তু পাই। এদের বিন্যাস $\underline{|4}$. আবার AEIU কে $\underline{|4}$ বিন্যাসে সাজানো যায়। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস = $\underline{|4}\times\underline{|4}=576$

উদা. 6. *n*-সংখ্যক বালককে কতভাবে সাজান যায় যাতে সবচেয়ে লম্বা এবং সবচেয়ে বেঁটে বালক একত্রে থাকবে না।

n-সংখ্যক বালককে $\underline{|n}$ বিন্যাসে সাজান যায়। সবচেয়ে লম্বা এবং বেঁটে বালকদ্বয় সবসময় একত্রে থাকবে ধরলে বিন্যাস সংখ্যা হবে $\underline{|n-1}$. আবার ঐ বালক দুজনাকে 2 ভাবে সাজান যায়। সুতরাং ঐ বালক দুটি সর্বদা একত্রে থাকবে এরূপ বিন্যাসের সংখ্যা $2\underline{|n-1}$.

∴ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা (যেখানে ঐ বালকদ্বয় একত্রে থাকবে না) = $\underline{|n}-2\underline{|n-1}$

উদা. 7. 10টি বস্তু থেকে 4টি ক'রে নিয়ে কতগুলি বিন্যাস হবে যাতে (i) একটি নির্দিষ্ট বস্তু সকল বিন্যাসেই থাকবে, (ii) নির্দিষ্ট বস্তুটি কোন বিন্যাসেই থাকবে না।

মনে করতে পারি যে 10টি বস্তু থেকে 4টি বস্তুকে 4টি ঘরে রাখতে হবে। (i) নির্দিষ্ট বস্তুটিকে চারটি ঘরের যে কোন একটিতে 4 ভাবে রাখা যায়। বাকি নয়টি বস্তু থেকে যে কোনও তিনটিকে বাকি তিনটি ঘরে $^9P_3$ ভাবে রাখা যায়। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস = $4\times{}^9P_3$

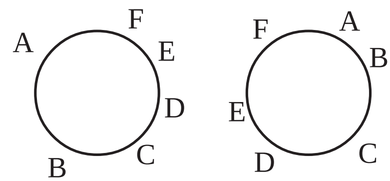
(ii) নির্দিষ্ট বস্তুটি বাদ দিলে থাকে নয়টি বস্তু। সুতরাং নির্ণেয় বিন্যাস = $^9P_4$ = 9×8×7×6

উদা. 8. কত সংখ্যক উপায়ে 6 ব্যক্তিকে বৃত্তাকারে সাজান যায়?

এক ব্যক্তিকে নির্দিষ্ট ক'রে তার সাপেক্ষে অন্য ব্যক্তিদের সাজানো হয়। নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = $\underline{|5}=120$

দ্রষ্টব্য : যদি নির্দিষ্ট ব্যক্তির সাপেক্ষে সাজাবার সময় ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে এবং বিপরীত দিকের মধ্যে কোন তফাৎ না ধরা হয় তবে এই সংখ্যা = $\frac{1}{2}\times120=60.$

মনে করি, 6 ব্যক্তি যথাক্রমে A, B, C, D, E, F. চিত্র দুটিতে আপেক্ষিক অবস্থান অভিন্ন নয়।



3.3.3 প্রশ্নমালা

1) একটি ঘরে 7টি ফাঁকা চেয়ার আছে। 4 জন লোক কত উপায়ে চেয়ারগুলিতে বসতে পারে? [উঃ 840]

2) 1000 এবং 10,000—এর মধ্যে 2, 3, 4, 5, 6, 8 অংকগুলির দ্বারা কতগুলি সংখ্যা নির্ণয় করা যায়। কোন অঙ্ক একই সংখ্যায় দুবার ব্যবহার করা যাবে না। [উঃ 360]

3) 7টি বস্তু থেকে 3টি ক'রে নিয়ে কতগুলি বিন্যাস হবে যখন একটি নির্দিষ্ট (i) সব বিন্যাসেই থাকবে (ii) কোন বিন্যাসে থাকবে না? [উঃ 120, 90]

4) x বিজ্ঞান বিভাগের ছাত্র এবং y কলা বিভাগের, কত প্রকারে একটি সারিতে দাঁড় করান যায় যাতে কোন দুজন কলা বিভাগের ছাত্র একত্র থাকবে না ($y < x$). [উঃ]

5) নীচের শব্দের সবগুলি অক্ষর নিয়ে কতগুলি বিন্যাস সম্ভব?

(i) CALCUTTA [উঃ 5040]

(ii) ELECTRICITY [উঃ 24,94,800]

6) 1000 থেকে ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য এরূপ কতগুলি সংখ্যা 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলির দ্বারা গঠিত হতে পারে? একটি অঙ্ক একটি সংখ্যায় একবারের বেশী ব্যবহৃত হবে না। [উঃ 154]

7) A এবং B-এর মাঝে 42টি ষ্টেশন আছে। বিভিন্ন প্রকারের কতগুলি বিভিন্ন রকমের টিকিট ছাপাতে হবে যাতে একজন যাত্রী যে কোন একটি ষ্টেশন থেকে অন্য যে কোন ষ্টেশনে যেতে পারে? [উঃ 1722]

8) প্রমাণ করুন যে, ${}^{n-1}P_r + r\,{}^{n-1}P_{r-1} = {}^{n}P_r$.

9) ${}^{m-n}P_2 = 56$, ${}^{m-n}P_2 = 12$ হলে m এবং n নির্ণয় করুন। [উঃ m=4, n=2]

10) (i) যদি ${}^{2n+1}P_{n-1} : {}^{2n-1}P_n = 3 : 5$ হয়, তবে n-এর মান নির্ণয় করুন। [উঃ $n = 4$]

(ii) যদি ${}^{8}P_{n-1} : {}^{9}P_{n-2} = 20 : 9$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে $n = 6$.

(iii) $({}^8P_2 + {}^8P_3) + {}^9P_3 \rightarrow$ এর মান নির্ণয় করুন। [উঃ $\frac{7}{9}$]

(iv) প্রমাণ করুন যে, ${}^{2n}P_{2n} = 1.3.5. \ldots (2n-1).2^n.\underline{|n}$.

3.4 সমবায় (Combination)

সমবায়ের সংজ্ঞা পূর্বেই আলোচিত হয়েছে। nটি বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে rটি $(r \le n)$ বস্তু নিয়ে যতগুলি সমবায় পাওয়া যায় সেই সংখ্যাকে ${}^nc_r$ চিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হয়।

প্রতিপাদ্য : n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে r-সংখ্যক বস্তু নিয়ে সমবায় সংখ্যা নির্ণয় $(r \le n)$:

মনে করি, সমবায় সংখ্যা ${}^nC_r$. এখন ${}^nC_r$ সমবায়ের প্রতিটি সমবায়ে r-সংখ্যক বস্তু আছে এবং তাদের নিয়ে $\underline{|r}$ বিন্যাস হবে। সুতরাং ${}^nc_r$ সমবায় থেকে যে বিন্যাস পাওয়া যায় তার সংখ্যা $\underline{|r} \times {}^nc_r = n$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু থেকে একযোগে rটি করে নিয়ে বিন্যাসের সংখ্যা $= {}^nP_r$.

সুতরাং $\underline{|n}.\times {}^nc_r = {}^nP_r = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$

$$\therefore\ {}^nc_r = \boxed{{}^nc_r = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\underline{|n-r}}}$$

$r = n$ হ'লে ${}^nc_n = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n}\underline{|o}} = 1$ আবার $r = o$ বসালে ${}^nc_o = 1$.

$$\therefore\ \boxed{{}^nc_n = {}^nc_o = 1}$$

দুইটি সম্বন্ধ : ${}^nc_r = {}^nc_{n-r}$

আমরা জানি, ${}^nc_r = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\underline{|n-r}}$ এবং ${}^nc_{n-r} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-(n-r)}\underline{|n-r}} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\underline{|n-r}}$

[দ্রষ্টব্য : যদি ${}^nc_p = {}^nc_q$ হয়, তবে হয় $p = q$ বা $p + q = n$]

সুতরাং ${}^nc_r = {}^nc_{n-r}$

(ii) ${}^{n}c_r + {}^{n}c_r = {}^{n+1}c_r$

বামপক্ষ, ${}^{n}c_r + {}^{n}c_{r-1} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} + \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r+1}}$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}}\left[\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r+1}\right]$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}}\frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)} = \frac{\underline{|n}(n+1)}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}}$$

$$= \frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}} = {}^{n+1}c_r$$

3.4.1 উদাহরণমালা

উদা. 1. 8 জন পুরুষ এবং 6 জন স্ত্রীলোকের মধ্যে থেকে 5 জনার কয়টি বিভিন্ন কমিটি গঠন করা যায়?

মোট 8+6=14 জন থেকে ক্রম নিরপেক্ষ ভাবে যে কোন 5 জনকে নির্বাচিত করতে হবে।

নির্ণেয় কমিটির সংখ্যা = ${}^{14}c_5 = 2002$

উদা. 2. 15টি বালকের একটি দলে 7 জন স্কাউট আছে। কত প্রকারে 12টি বালকের কতগুলি দল গড়া যায় যাতে প্রতি দলে অন্তত 6 জন স্কাউট থাকবে?

দলটিতে 6 জন স্কাউট এবং 6 জন অন্য বালক থাকতে পারে বা 7 জন স্কাউট এবং 5 জন অন্য বালক থাকতে পারে। নির্ণেয় সমবায় = ${}^{7}c_6 \times {}^{8}c_6 + {}^{7}c_7 \times {}^{8}c_5$

$= {}^{7}c_1 \times {}^{8}c_2 + 1 \times {}^{8}c_3 = 7 \times 28 + 56 = 252$

উদা. 3. $(m + n)$ বিভিন্ন বস্তু কত উপায়ে দুটি ভাগে ভাগ করা যায় যাতে একটি ভাগে m বস্তু এবং অপর ভাগে n বস্তু থাকে?

$(m + n)$ বস্তু থেকে m বস্তু নেওয়া যায় $m + n_{c_m}$ উপায়ে। প্রতিটি উপায়ের সঙ্গে দ্বিতীয় একটি ভাগ থাকবে যাতে n বস্তু আছে। সুতরাং নির্ণেয় উপায় $m + n_{c_m}$।

দ্রষ্টব্য : যদি $m = n$ হয় তবে মোট উপায় = $\dfrac{\underline{|2m}}{\underline{|m}\,\underline{|m}.\underline{|2}}$ কারণ এখানে দুটি ভাগ পরস্পর পাল্টালে কোন নূতন সমবায় পাওয়া যায় না।

যথা, 22 জন ফুটবলারকে 11 জন ক'রে দুটি দলে ভাগ করা যায় $\frac{\lfloor 22}{\lfloor 11 \lfloor 11 \lfloor 2}$ উপায়ে।

উদা. 4. একটি সমতলে n-সংখ্যক বিন্দু আছে যার (i) কোন তিনটি সমরেখ নয় (ii) যার p-সংখ্যক বিন্দু সমরেখ। কয়টি রেখা এবং কয়টি ত্রিভুজ গঠন করা যাবে এই বিন্দুগুলি দ্বারা?

(i) দুটি বিন্দু দিয়ে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। সুতরাং নির্ণেয় সরলরেখা $^nc_2$.

(ii) যদি p-সমরেখ বিন্দুর কোন তিনটি সমরেখ না হত তা হলে $^pc_2$ সরলরেখা পাওয়া যেত কিন্তু তার পরিবর্তে p-সংখ্যক বিন্দু দিয়ে একটি মাত্র সরলরেখা পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $(^pc_2 - 1)$ এতগুলি সরলরেখা কম হবে।

সুতরাং, সরলরেখার নির্ণেয় সংখ্যা = $^nc_2 - (^pc_2 - 1)$.

ত্রিভুজের সংখ্যা : কোন তিনটি বিন্দু সমরেখ না হলে n-সংখ্যক বিন্দু থেকে $^nc_3$ সংখ্যক ত্রিভুজ পাওয়া যায়। আবার p-সংখ্যক বিন্দু সমরেখ হলে $^pc_3$ সংখ্যক ত্রিভুজ কম হবে।

$\therefore$ উৎপন্ন ত্রিভুজ সংখ্যা = $^nc_3 - {}^pc_3$.

উদা. 5. n-সংখ্যক বস্তু থেকে এক যোগে যতগুলি ইচ্ছা বস্তু নিয়ে সমবায় সংখ্যা নির্ণয়।

প্রতি নির্বাচনে দুইটি প্রক্রিয়া সম্ভব (i) বস্তুটি নির্বাচিত হতে পারে অথবা (ii) বস্তুটি নির্বাচিত না হতে পারে। প্রদত্ত n বস্তুর প্রতিটির ক্ষেত্রে 2 প্রকার প্রক্রিয়া হবে।

সুতরাং মোট প্রক্রিয়া সংখ্যা = $2 \times 2 \times 2 \ldots n$ সংখ্যক উৎপাদক।

= 2^n-এর মধ্যে একটি প্রক্রিয়া আছে যাতে সব বস্তুই পরিত্যক্ত। সুতরাং নির্ণেয় সমবায় সংখ্যা = $2^n - 1$.

3.5 অনুশীলনী

1) (i) যদি $^nc_8 : {}^nc_6 = \frac{15}{28}$ হয়, তবে n নির্ণয় করুন। [উঃ 12]

(ii) যদি $^{18}c_r = {}^{18}c_{r+2}$ হয় তবে r এবং $^{11}c_r$-এর মান নির্ণয় করুন। [উঃ 165]

2) একটি প্রশ্নপত্রের 10টি প্রশ্নের মধ্যে একজন পরীক্ষার্থী কত উপায়ে 7টি প্রশ্ন বাছতে পারে? [উঃ 120]

3) 10 জন ছাত্র এবং 15 জন ছাত্রী থেকে কত উপায়ে 7 জনার একটি কমিটি গড়া যায় যাতে প্রতি কমিটিতে অন্তত 4 জন ছাত্র থাকবে? [উঃ 1,25,265]

4) 12 জন লোককে কত উপায়ে দুটি ভাগে ভাগ করা যায়? [উঃ 2,047]

5) এক ব্যক্তির 50 জন বন্ধু আছে। সে কত উপায়ে এক অথবা 6 বেশি বন্ধুকে নিমন্ত্রণ করতে পারে? [উঃ 31]

6) প্রমাণ করুন যে,

7) 21টি ম্যাচের ফলাফল (জয়, পরাজয় বা ড্র) বলতে হবে। কতগুলি বিভিন্ন পূর্বাভাসে ঠিক 18টি সঠিক ফল থাকবে? [উঃ 10,640]

8) কোন সমতলে 10টি বিন্দু আছে তার মধ্যে 4টি বিন্দু সমরেখ এবং বাকীগুলির কোন তিনটি সমরেখ নয়। বিন্দুগুলি যোগ ক'রে—

(i) কতগুলি ত্রিভুজ পাওয়া যাবে? [উঃ 116]

(ii) কতগুলি সরলরেখা পাওয়া যাবে? [উঃ 40]

একক 4 ❑ অবকলন ও অপেক্ষকের বিস্তৃতি (Differentiation)

গঠন

4.1 উদ্দেশ্য

4.2 নতিমাত্রা

4.3 অপেক্ষকের অন্তরকলন বা অবকলন

4.3.1 উদাহরণমালা

4.3.2 অন্তরকলন সহগের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

4.3.3 অবকল বা অন্তরকল

4.3.4 অন্তরকলনের কয়েকটি সাধারণ নিয়ম

4.3.5 লগারিদ্‌ম্‌-মূলক অবকলন

4.3.6 অব্যক্ত অপেক্ষকের অন্তরকলন

4.3.7 অবকলন সহগের দ্বারা পরিবর্তনের হার নির্ণয়

4.3.8 প্রশ্নমালা

4.4 ক্রমিক অন্তরকলন

4.4.1 উদাহরণমালা

4.4.2 প্রয়োগমূলক উদাহরণ

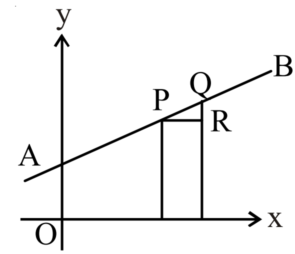
4.5 অনুশীলনী

4.1 উদ্দেশ্য

এই এককে অন্তরকলনের ধারণা, উদ্দেশ্য, জ্যামিতিক ব্যাখ্যা তুলে ধরা হয়েছে। এছাড়া বিভিন্ন আকারের অপেক্ষকের অন্তরকলন, অন্তরকলনের সাধারণ নিয়মাবলী আলোচিত হয়েছে যা অবকলন ও অপেক্ষকের বিস্তৃতি সম্পর্কে বাস্তব জ্ঞান দেবে।

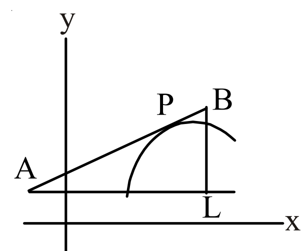
4.2 নতিমাত্রা (Gradient)

(i) সরলরেখার নতি :AB সরলরেখার Q বিন্দুর ভুজ P বিন্দুর ভুজ হইতে PR বৃদ্ধি পেয়েছে। আবার Q বিন্দুর কোটি QR বৃদ্ধি পেয়েছে। $\frac{QR}{PR}$ অনুপাতকে P বিন্দুতে AB সরলরেখার নতি (Gradient) বলে (চিত্র ১ দেখুন)।



মনে রাখতে হবে একটি সরলরেখার নতিমাত্রা প্রতি বিন্দুতে সমান। Q বিন্দুটি P অন্য পার্শ্বে নেওয়া হলেও P বিন্দুতে নতি একই থাকবে।

(ii) বক্ররেখার নতি : কোনও বক্ররেখার উপর কোনও বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতিকে ঐ বিন্দুতে **বক্ররেখার নতি** বলা হয়। এখানে AB, P বিন্দুতে বক্ররেখাটির একটি স্পর্শক (চিত্র-২)। $\frac{BL}{AL}$ অনুপাতটি P বিহন্দুতে বক্ররেখাটির নতি হবে।



যদি বক্ররেখার উপর কোনও বিন্দুতে স্পর্শক y-অক্ষের সমান্তরাল হয় তবে তার উপর দুটি বিন্দুর ভুজের বৃদ্ধি শূন্য হবে। এক্ষেত্রে স্পর্শকের নতি অসীম (infinity) বলা হবে। আবার বক্ররেখার উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হলে ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির নতি শূন্য হবে।

4.3 অপেক্ষকের অন্তরকলন বা অবকলন (Differentiation)

সংজ্ঞা : মনে করি y = f(x) অপেক্ষকটি x-এর কোনও পরিসরে সংজ্ঞাত। এখন যদি একটি বিন্দু x-এর সাপেক্ষে কোনও ক্ষুদ্র পরিবর্তন Δx (বা δxদ বা h) দেওয়া যায় তবে মনে করি y-এর পরিবর্তন হবে Δy (বা δy বা k)।

$\therefore$ $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ বা, $\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x)$

বা, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

যদি $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$-এর অস্তিত্ব থাকে এবং সসীম হয় তবে ঐ লিমিটটিকে f(x)-এর x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলজ (derivative) বা অবকলন সহগ (differential coefficient) বলে এবং $\frac{dy}{dx}\left(=\frac{d}{dx}(y)\right)$ বা $f'(x)$ দ্বারা চিহ্নিত হয়।

অর্থাৎ $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ এর অস্তিত্ব থাকলে লেখা হয় $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$

অর্থাৎ f′(c), f(x) এর x = c বিন্দুতে অবকলন সহগ, অবকলন প্রক্রিয়া সীমা নির্ণয়ের মাধ্যমে হয়ে থাকে। অতএব f(x) অপেক্ষকের x-বিন্দুতে অবকলন নির্ণয় করা যাবে যদি

$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ হয়।

অর্থাৎ দক্ষিণ অবকলন সহগ এবং বাম অবকলন সহগ অস্তিত্বশীল এবং উহারা সমান হবে। অর্থাৎ Rf′(x) = Lf′(x).

4.3.1 উদাহরণমালা

উদা. 1. যদি $f(x) = 3x^2 + 5x + 1$ হয় তবে

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 + 5(x+h) + 1 - 3x^2 - 5x - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3x^2} + 6hx + 3h^2 + \cancel{5x} + 5h + 1 - \cancel{3x^2} - \cancel{5x} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 6hx + 5h}{h} = \lim_{h \to 0}(3h + 6x + 5)$$

$$= \lim_{h \to 0} 3h + \lim_{h \to 0} 6x + \lim_{h \to 0} 5$$ (উপপাদ্য প্রয়োগ করে)

= 0 + 6x + 5 = 6x + 5

উদা. 2. মনে করি, f(x) = 3x + 2, $x \le 0$

= –3x + 2, x > 0.

$$Rf'(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(-3h+2) - 2}{h} = -3$$

আবার, $\mathrm{L}f'(0) = \lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{3h+2-2}{h} = 3$

$\therefore \mathrm{R}f'(0) \neq \mathrm{L}f'(0),$

অতএব, f'(0) এর অস্তিত্ব নেই।

উদা. 3. মনে করি, $f(x) = \sqrt{x}; x > 0$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left[\sqrt{(x+h)}-\sqrt{x}\right]}{h\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left[\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right]}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

উদা. 4. মনে করি, $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x-x-h}{x(x+h)} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = \frac{1}{x^2} \; (\because x \neq 0)$$

উদা. 5. মনে করি, $f(x) = x^n, n$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{\mathrm{X}\to x}\frac{x^n - x^n}{\mathrm{X}-x}[\mathrm{X} = x = h]$$

$$\lim_{\mathrm{X}\to x}(X^{n-1} + X^{n-2}x + \ldots + x^{n-1}) = nx^{n-1}$$

অতএব, $f'(x) = nx^{n-1}$ (n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা)

মনে রাখিতে হবে, n যে কোনও মূলদ সংখ্যা হলে প্রমাণ করা যায় যে, $f(x) = x^n$ এই ফাংশনটি n র‍্যাশনাল (মূলদ) হলে x-এর সাপেক্ষে অন্তরকলনযোগ্য, এবং $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ যদি $x \neq 0$ হয়। n

ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে n = –m লিখলে m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। অতএব এইক্ষেত্রে $x \neq 0$ হলে আমরা পাই

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^{-m}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^m (x+h)^m}{h(x+h)^m x^m} = -\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} . \lim_{h \to 0} \frac{1}{x^m (x+h)^m}$$

দক্ষিণ পক্ষের প্রথম লিমিট প্রথম ক্ষেত্র থেকে পাই $=mx^{m-1}$

অতএব, $f'(x) = -\frac{mx^{m-1}}{x^m x^m} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$

উদা. 6. a বিন্দুতে f(x)-এর অন্তরকলন, অর্থাৎ f′(a) থাকলে f(x) অপেক্ষক x = a বিন্দুতে সন্তত হবে।

আমরা জানি, $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{r(a+h) - f(a)}{h}$

এখন $f(a+h) - f(a) = \frac{r(a+h) - f(a)}{h} \times h (h \neq 0)$

$\therefore \lim_{h \to 0} \{f(a+h) - f(a)\} = \lim_{h \to 0} \frac{r(a+h) - f(a)}{h} \times \lim_{h \to 0} h$ (যেহেতু প্রতিটি লিমিট আছে)

= f′(a) × 0 = 0

$\therefore \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

সন্ততির সংজ্ঞা থেকে পাই যে f(x), x = a বিন্দুতে সন্তত।

উদা. 7. f(x) = e^x.f′(x) নির্ণয় করুন।

সংজ্ঞানুসারে $f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h}}{h} = \lim_{h \to 0} e^x . \frac{e^h - 1}{h} = e^x . \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$

$= e^x [\because \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1]$

উদা. 8. $f(x) = c^{ax}$ $f'(x)$ নির্ণয় করুন।

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a(x+h)} - e^{ah}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{ax} \frac{\left(e^{ah} - 1\right)}{ah}.a$$

$$= a.e^{ax} \lim_{h \to 0} \frac{e^{ah} - 1}{ah} = ae^{ax} \left[\because \lim_{h \to 0} \frac{e^{ah} - 1}{ah} = 1 \right]$$

উদা. 9. $f(x) = a^x.f'(x)$ নির্ণয় করুন।

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{a+h}}{h} = a^x . \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \lim_{h \to 0} \frac{c^{h \log a}}{\log a.h} \log a$$

$$= a^x . \log a . \lim_{h \to 0} \frac{a^{h'} - 1}{h'} [h' = h \log a] = a^x \log a.$$

উদা. 10. $f(x) = \log_e x$, $f'(x)$ নির্ণয় করুন, যেখানে $x > 0$.

$$f'(x) = h \xrightarrow{\lim} 0 \frac{\log_e (x+h) - \log_e x}{h} = h \xrightarrow{\lim} 0 \frac{1}{h} . \log_e \left(\frac{x+h}{x} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} . \frac{x}{h} \log_e \left(1 + \frac{h}{x} \right) = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{1}{z} \log(1+z) \ \left[z = \frac{h}{x} \text{ ধরে} \right]$$

(যেহেতু x-এর মান h-এর উপর নির্ভর করে না)

$$= \frac{1}{x} [\because h \xrightarrow{\lim} 0 \frac{1}{z} \log_e (1+z) = 1]$$

উদা. 11. $f(x) = c$ ধ্রুবক $f'(x)$ নির্ণয় করুন।

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = o \ [h \neq 0]$$

অতএব একটি ধ্রুবক ফাংশনের অবকল সহগ = 0

$f(x) = \sin x$ ও $f(x) = \cos x$-এর অন্তরকলন

(1) f(x) = sinx হলে

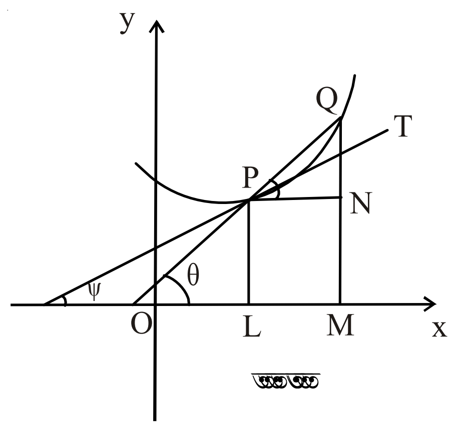
f(x+h) = sin(x+h)

$$\therefore \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x.1 = \cos x$$

4.3.2 অন্তরকল সহগের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

মনে করি, P(x, y) একটি সন্তত বক্ররেখা y = f(x)-এর উপর অবস্থিত। মনে করি, P বিন্দুতে বক্ররেখাটির একটি স্পর্শক আছে যা y-অক্ষের সমান্তরাল নহে। মনে করি, Q(x + Δx, y + Δy), y = f(x)-এর উপর অপর একটি বিন্দু। PL, QM Ox-এর উপর লম্ব টানা হল। এবং OX-এর সমান্তরাল করে PN টানা হল (চিত্র-৩)।



PN = LM = OM – OL = x + Δx – x = Δx

এখন

NQ = MQ – MN = MQ – LP

= y + Δy – y = Δy

যেহেতু P এবং Q, y = f(x)-এর উপর দুইটি বিন্দু,

অতএব y + Δy = f(x + Δx)

অথবা Δy = f(x + Δx) – f(x)

সুতরাং PQ জ্যা-এর নতি

$$= \tan\theta = \tan QPN = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

যদি Q → P হয় PQ → PT এবং Dx → 0

$\therefore$ PT এর নতি = $\tan\psi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$

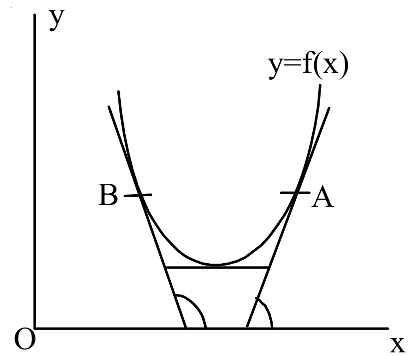
অতএব f′(x), P বিন্দুতে y = f(x)-এর স্পর্শকের নতি নির্দেশ করে।

মনে রাখবেন :

1. যদি $f'(x) > 0$ তবে (x, y) বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সঙ্গে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে এবং x বৃদ্ধি পেলে f(x) বা y বৃদ্ধি পায় (চিত্র—4, A বিন্দু)।

2. যদি $f'(x) < 0$ হয়, তবে (x, y) বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সঙ্গে স্থূলকোণ উৎপন্ন করে এবং x বৃদ্ধি পেলে f(x) বা y হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। (চিত্র—4, B বিন্দু)।

3. যদি $f'(x) = 0$ হয় তবে (x, y) বিন্দুতে স্পর্শক x-অক্ষের সমান্তরাল হয় (চিত্র—4)।



4.3.3 অবকল বা অন্তরকল (Differential)

মনে করি $y = f(x)$ একটি অপেক্ষক এবং $\frac{dx}{dy}$ বা $f'(x)$ নির্ণেয়।

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

বা, $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \in$ এখানে $\in$ এমন একটি সংখ্যা যে $\in \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$.

বা, $f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x.\ f'(x) +.\ \Delta x\ \in \to 0$ যখন $\Delta x \to 0$

$\Delta x\ f'(x)$কে $y = f(x)$ এর x-বিন্দুতে অবকল বা অন্তরকল (differential) বলা হয় এবং df বা dy দ্বারা নির্দেশ করা হয়। $dy = df = f'(x)\ \Delta x$.

যদি $f(x) = x$ ধরা হয় তবে $f'(x) = 1$

এখন $df = dx = 1.\ \Delta x$.

অর্থাৎ $dx = \Delta x$ অর্থাৎ স্বাধীন চল x-এর অবকল dx ও x-এর বৃদ্ধি (increment) Δx সমার্থক।

অতএব আমরা পাই $\therefore dy = f'(x)dx$.

উদা. যদি $y = x^4$ হয় তবে $dy = 4x^3dx$.

যদি $y = \log_e x$ হয়, তবে $dy = \frac{1}{x}dx$.

উদা. দেখান x-এর বৃদ্ধির সঙ্গে $y = (x^3 - 3x^2 + 3x)$ অপেক্ষকটির কিরূপ বৃদ্ধি পায়?

$y = x^3 - 3x^2 + 3x$ বা, $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} > 0$, x-এর সব বাস্তব মানের জন্য।

$\therefore$ y = f(x) অপেক্ষকটি x-এর সহিত বৃদ্ধি পায়।

4.3.4 অন্তরকলনের কয়েকটি সাধারণ নিয়ম

যদি u(x), v(x), w(x)...কয়েকটি সসীম সংখ্যক অপেক্ষক হয় তবে,

I. $\dfrac{d}{dx}[u(x) \pm v(x) \pm w(x)...] = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx} \pm \dfrac{dw}{dx} \pm ...$

II. $\dfrac{d}{dx}[u(x).v(x)] = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}.$

$$\frac{d}{dx}[u(x).v(x).w(x)] = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[c.u(x)] = c.\frac{du}{dx} \quad \text{[c ধ্রুবক]}$$

III. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right] v(x) \neq 0$

$$= \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

IV. যদি y = f(u) এবং u = φ(x) হয় তবে

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = f'(u).\varphi'(x)$$

উদা. x-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন : $3x^5 + 7x^4 - 2x^2 - x + 6$

মনে করি $y = 3x^5 + 7x^4 - 2x^2 - x + 6.$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[3x^5] + \frac{d}{dx}[7x^4] - \frac{d}{dx}[2x^2] - \frac{d}{dx}[6].$$

$= 3.5x^4 + 4.7x^3 - 2.2x - 1 + 0$

$= 15x^4 + 28x^3 - 4x - 1$

উদা. $y = x^n.e^x$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

$$\frac{dy}{dx} = x^n.\frac{d}{dx}(e^x).\frac{d}{dx}(x^n) = x^n.e^x + e^x.nx^{n-1}$$

উদা. $y = (x^2 + 7)(x^3 + 10)$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+7)\frac{d}{dx}(x^3+10) + (x^3+10)\frac{d}{dx}(x^2+7)$$

$= (x^2 + 7)(3x^2) + (x^3 + 10)(2x)$

$= 3x^4 + 21x^2 + 2x^4 + 20x = 5x^4 + 21x^2 + 20x.$

উদা. $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}.\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x^2)\frac{d}{dx}(1+x^2) - (1+x^2)\frac{d}{dx}(1-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{(1-x^2).2x - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x(1-x^2) + 2x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2x(1-x^2+1+x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

উদা. $y = \frac{x^n}{\log x}.\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x.\frac{d}{dx}(x^n) - x^n.\frac{d}{dx}(\log x)}{(\log x)^2} = \frac{\log x.nx^{n-1} - \frac{x^n}{x}}{(\log x)^2}$$

$$= \frac{n\log x.x^n - x^n}{x(\log x)^2} = \frac{x^{n-1}(n\log x - 1)}{(\log x)^2}$$

উদা. y = e^{ax^2+bx+c} $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

মনে করি u = $ax^2 + bx + c$. ∴ y = e^n. u = $ax^2 + bx + c$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = e^u.(2ax+b) = e^{ax^2+bx+c}.(2ax+b).$$

উদা. y = $(1 - 5x)^4$. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

মনে করি, (1 – 5x) = u. সুতরাং y = u^4 এবং u = 1 – 5x

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 4u^3.(-5) = -20u^3 = -20(1-5x)^3.$$

4.3.5 লগারিদম্-মূলক অবকলন

উদা. $x^y.y^x = 1$ হইলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

উভয়পক্ষে লগারিদম্ নিয়ে পাই

$\log_e x^y + \log_e y^x = \log_e 1$ বা, $y\log_e x + x\log_e y = 0$

x-এর সাপেক্ষে অবকলন নিলে (y-কে x-এর অপেক্ষক মনে করে)

$$\frac{dy}{dx}.\log_e x + y.\frac{1}{x} + 1.\log_e y + x\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\because \frac{dy}{dx}(\log_e x + \frac{x}{y}) = -\left(\frac{y}{x} + \log_e y\right) \text{ বা, } \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x} + \log_e y\right)}{\left(\frac{x}{y} + \log_e x\right)}$$

উদা. y = x^x. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

$\log y = \log_e x^x = x\log_e x$,

$$\therefore \frac{1}{y}\frac{dx}{dy} = \log_e x + x.\frac{1}{x} = \log_e x + 1$$

বা, $\frac{dy}{dx} = y(\log_e x + 1) = x^x(\log_e x + 1)$

4.3.6 অব্যক্ত অপেক্ষকের অন্তরকলন (Differentiate of Implicit Function)

f(x, y) = 0 সমীকরণ থেকে y = φ(x) আকারে প্রকাশ করা কখনও কখনও অসুবিধাজনক। যদিও এসব ক্ষেত্রে y, x-এর অপেক্ষক হতে পারে। এইসব স্থলে y-কে x-এর অব্যক্ত অপেক্ষক (Implicit Function) বলে।

উদা. $ax^2 + 2hry + by^2 = 0$ একটি অব্যক্ত অপেক্ষক।

এই ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করতে যে কোনও বিন্দু (x,y) যেখানে $hx + by \neq 0$.

x-এর সাপেক্ষে অবকলন নিলে পাই, (এখানে y, x-এর আপেক্ষক)

$$2ax+2hy+2hx.\frac{dy}{dx}+2by\frac{dy}{dx}=0$$

বা, $-(ax+hy)=\frac{dy}{dx}(hx+by)$ বা, $\frac{dy}{dx}=-\frac{ax+hy}{hx+by}$

উদা. $x^3 + y^3 = 3axy$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

x-এর সাপেক্ষে অবকলন লইলে পাই

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=3ay+3ax\frac{dy}{dx}$$

বা, $(3x^2-3ay)=\frac{dy}{dx}(3ax-3y^2)$

বা, $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2ay}{ax-y^2}$, যেখানে $ax - y^2 \neq 0$

প্রচলিক সমীকরণ থেকে অপেক্ষকের অবকলন নির্ণয় (Parametric Differentiation) :

y, x-এর অপেক্ষক এবং তাদের সম্পর্ক একটি প্রচল t-এর বিভিন্ন মানের জন্য জানা আছে। $x = \phi(t)$ এবং $y = \psi(t)$, t প্রচল।

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\bigg/\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$ যেখানে $\frac{dx}{dt}\neq 0$. [যদি নির্ণেয় $\frac{dt}{dx}$ হয়]

উদা. $x=\sqrt{1+t}, y=\sqrt{1-t}$ যেখানে $0\le t\le\frac{1}{2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(1+t)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t}} \text{ হলে } \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\frac{1(-1)}{\sqrt{1-t}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\therefore \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t}}\Big/\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-t}}=-\frac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}$$

উদা. $x=t^2+\frac{1}{t^2}, y=t+\frac{1}{t}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dt}(t^2+t^{-2})=2t-2t^3 \text{ এবং } \frac{dy}{dx}=1-\frac{1}{t^2}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=(1-\frac{1}{t^2}/2(t-t^{-3})=\frac{(t^2-1)}{t^2}.\frac{t^3}{2(t^4-1)}=\frac{t}{2(t^2+1)}$$

উদা. x^2-এর সাপেক্ষে x^5-এর অবকলন নির্ণয় করুন :

মনে করি $y = x^5$ এবং $z = x^2$

$$\therefore\frac{dy}{dz}=\frac{dy}{dx}.\frac{dx}{dz}=\frac{dy}{dx}\Big/\frac{dz}{dx}$$

এখন, $\frac{dy}{dx}=5x^4$ এবং $\frac{dz}{dx}=2x$

$$\therefore\frac{dy}{dz}=\frac{5x^4}{2x}=\frac{5}{2}x^3$$

4.3.7 অবকলন সহগের দ্বারা পরিবর্তনের হার নির্ণয়

মনে করি, $y = f(x)$ অপেক্ষকটি একটি বক্ররেখা নির্ণয় করে। মনে করি, x_1 এবং x_2 $y=f(x)$-এর উপর দুইটি বিন্দু। $y_1 = f(x_1)$ এবং $y_2 = f(x_2)$

$$\therefore\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$\therefore$ ইহাকে (x_1, x_2)-র মধ্যে y-এর গড় পরিবর্তন বলা হয়।

এখন যদি $\Delta x \to 0$ হয়, এবং যদি $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1)$

$= \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$ নির্ণেয় হয় তবে $= \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_1}$ -কে x_1 বিন্দুতে y-এর পরিবর্তনের হার বলা হয়।

উদা. যদি $y = x^3$ এবং x, 10 একক প্রতি মিনিটে বৃদ্ধি পায় তবে যখন x = 3 হইলে y-এর পরিবর্তনের হার নির্ণয় করুন।

t = সময়ের একক মিনিট।

$$\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt}x^2 = 3 \times 10.x^2$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=3} = 3 \times 10 \times 9 = 270 \text{ একক/মিনিট।}$$

উদা. 8y = x^3 – 12x + 16 বক্ররেখার (0,2) বিন্দুতে স্পর্শকের গতি নির্ণয় কর এবং স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

$$8.\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12 \quad \therefore 8\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -12$$

$\therefore \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0} = -\dfrac{12}{8} = -\dfrac{3}{2}$ অতএব (0,2) বিন্দুতে স্পর্শকের নতি হল $\left(-\dfrac{3}{2}\right)$

অতএব ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ : $y - 2 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0}(x-0)$

বা, $y - 2 = -\dfrac{3}{2}x$ বা, 2y – 4 + 3x = 0

উদা. মনে করি f(x) = |x| অর্থাৎ f(x) = x, x > 0

= 0, x = 0

= –x, x < 0

আমরা দেখেছি f(0 + 0) = f(0 – 0 = f(0) = 0

∴ f(x), x = 0 বিন্দুতে সন্তত।

কিন্তু $L.f'(0) = \lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0-}\frac{-h-0}{h} = -1$

আবার, $Rf'(0) = \lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0-}\frac{h-0}{h} = 1$

∴ $Lf'(0) \neq rf'(0)$. সুতরাং f′(0) নির্ণেয় নয়।

4.3.8 প্রশ্নমালা

1. সংজ্ঞা থেকে x-এর সাপেক্ষে অবকলন সহগ নির্ণয় করুন :

(i) $x^3 + 2x$ [উঃ $3x^2 + 2$] (ii) $\frac{1}{x}$ [উঃ $-\frac{1}{x^2}$] (iii) e^{2x} [উঃ $2.e^{2x}$]

(iv) $\frac{1}{\sqrt{x}}(x>0)$ [উঃ $-\frac{1}{2}.\frac{1}{x\sqrt{x}}$] (v) 10^{2x} [উঃ $2.10^{2x}\log_e 10$] (vi) $e^{\sqrt{x}}$ [উঃ $\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$]

2. নিম্নলিখিত অপেক্ষগুলির x-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন :

(i) $(x^2 - 3)^3$ [উঃ $3(x^2 - 3)^2.2x$] (ii) $(x + 2)(x + 1)^2$ [উঃ $(x + 2)(x + 1)^2$]

(iii) $\frac{(1+x)^3}{x}$ [উঃ $-x^{-2} + 3 + 2x$] (iv) $\frac{1}{1-2x^2}$ [উঃ $\frac{4x}{(1-2x^2)^2}$]

(v) $4x^{-\frac{3}{4}} + 6x^{\frac{1}{2}} + 2$ [উঃ $-3x^{-\frac{7}{4}} + 3x^{-\frac{1}{2}}$]

3. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির x-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন :

(i) $x^n e^x$ [উঃ $e^x(nm^{n-1}+x^n)$] (ii) $x^2\log x$ [উঃ $2x\log x + x$]

(iii) $(x^2 + 7)(x^3 + 10)$ [উঃ $2x(x^3 + 10) + (x^2 + 7)3x$

(iv) $10^x.x^{10}$ [উঃ $10^x(10x^9 + x^{10}\log_e 10)$]

(v) $\sqrt{x}.e^{10}$ [উঃ $e^x[\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}]$ (vi) $x^2\log x^2$ [উঃ $2(x + 2x\log x]$

4. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির **x**-এর সাপেক্ষে অবকল সহগ নির্ণয় করুন :

(i) $\frac{x}{e^x-1}$ [উঃ $\frac{(e^x-1)-xe^x}{(e^x-1)^2}$] (ii) $\frac{x^n}{\log x}$ [উঃ $\frac{nx^{n-1}\log x - x^{n-1}}{(\log x)^2}$]

(iii) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ [উঃ $\frac{4x}{(1-x^2)^2}$] (iv) $\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ [উঃ $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$]

(v) $x.\frac{e^x+e^{3x}}{e^x+e^{-x}}$ [উঃ $e^{2x}(1 + 2x)$] (v) $\frac{x^3-2+x^{-3}}{x-2+x^{-4}}$ [উঃ $2(x+1-x^{-2}-x^{-3})$]

5. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির **x**-এর সাপেক্ষে অবকলন সহগ নির্ণয় করুন :

(i) $\sqrt{x^2+a^2}$ [উঃ $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$] (ii) e^{x^4} [উঃ $4x^3.e^{x^4}$]

(iii) e^{ax^2+px+c} [উঃ $e^{ax^2+bx+c}(2ax+b)$] (iv) $\sqrt{\log x}$ [উঃ $\frac{1}{2x\sqrt{\log x}}$]

(v) a^{5x+1} [উঃ $5a^{5x+1}.\log_e a$] (vi) $\log\sqrt{\log}$ [উঃ $\frac{1}{2x}$]

(vii) log logx [উঃ $\frac{1}{x\log x}$] (viii) $\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$ [উঃ $\frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$]

(ix) $\log(\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b})$ [উঃ $\frac{1}{2\sqrt{(x-a)(x-b)}}$]

6. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন :

(i) $y = x^x$ [উঃ $x^x(\log x + 1)$] (ii) $y = x^{\log x}$ [উঃ $2\log x.x^{(\log x-1)}$]

(iii) $y = x^{x^x}$ [উঃ $x^{x^x}\, x^x\,\{\log x\,(\log x + 1) + \frac{1}{x}\}$]

(iv) $y = \left(\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}\right)^{1/2}$ [উঃ $\frac{-2a^2x}{(a^2+x^2)\sqrt{a^4-x^4}}$]

(v) $y = \left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^n$ [উঃ $\frac{x.y}{x\sqrt{1-x^2}}$]

7. $\frac{dy}{dx}$ **নির্ণয় করুন :**

(i) $3x^4 - x^2y + 2y^3 = 0$ [উঃ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(6x^2 - y)}{x^2 - 6y^2}$]

(ii) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ [উঃ $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$]

(iii) $x = y \log (xy)$ [উঃ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x-y)}{x(x+y)}$]

(iv) $x^y = y^x$ [উঃ $\frac{y(x\log y - y)}{x(y\log x - x)}$]

(v) $x^y.y^x = 1$ [উঃ $-\frac{y^2(1-\log x)}{x^2(1-\log y)}$]

(vi) $e^{xy} - 4xy =$ $\left[-\frac{y}{x}\right]$

8. $\frac{dy}{dx}$ **নির্ণয় করুন :**

(i) $x = at^2$, $y = 2at$ [উঃ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$]

(ii) $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = 3at^2 / 1+t^3$ [উঃ $t(2 - t^3)$ $[(1 - 2t^3)]$

(iii) $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}, y = b.\frac{2t}{1+t^2}$ [উঃ $\frac{b}{2at}(t^2 - 1)$]

(iv) $x = t^2 + \frac{1}{t^2}, y = t + \frac{1}{t}$ [উঃ $\frac{t}{2(t^2+1)}$]

9. যদি f(x) = x $\cos^{-1}x$, $\frac{dy}{dx}$ কত হবে?

10. যদি log(xy) = $x^2 + y^2$ দেখান যে, $\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^2-1)}{x(1-2y^2)}$

11. সংজ্ঞা থেকে দেখান যে $\frac{d}{dx}(10^x) = 10^x \cdot 2 \cdot 3$

12. যদি $x^2 + y^2 - 1 = 0$ তাহলে $\frac{dy}{dx}$ কত হবে?

13. যদি f(x, y) = $x^3 + 3x + y^3 + 3y - 8 = 0$ তাহলে x = y = 1 বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় করুন।

4.4 ক্রমিক অন্তরকলন (Successive Differentiation)

যদি y = f(x), x এর একটি অপেক্ষক হয় তবে f(x) বা $\frac{dy}{dx}$ সাধারণত আবার x-এর একটি অপেক্ষক হয়। যদি $\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ নির্ণেয় হয় তবে এই সীমাকে দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকল সহগ বলে এবং $f''(x)$ বা $\frac{d^2y}{dx^2}$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অনুরূপে $f'''(x)$, $f^{iv}(x)$...$f^n(x)$ গুলিকে যথাক্রমে তৃতীয়, চতুর্থ ....n-তম অন্তরকল সহগ বলে। মনে রাখবেন $f^n(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = y_n = y^{(n)} = D^n y$ etc.

4.4.1 উদাহরণমালা

উদা. 1. মনে করি $y = x^4, \frac{dy}{dx} = 4x^3$

আবার $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(4x^3) = 4\frac{d}{dx}(x^3) = 4.3x^2 = 12x^2 = \frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(12x^2) = 12\frac{d}{dx}(x^2) = 24x = \frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d}{dx}(24x) = 24.\frac{d}{dx}(x) = 24 = \frac{d^4y}{dx^4}$$

অর্থাৎ, $\frac{d^4y}{dx^4} = 41, \frac{d^5y}{dx^5} = 0$

উদা. 2. যদি $y = x^n$ হয়, (n-ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা) তবে

$$\frac{d^ny}{dx^n} = n! = n(n-1)(n-2)....3.2.1$$

উদা. 3. $y = e^{ax}$, $\therefore$ $y_1 = a.e^{ax}$, $y_2 = a^2e^{ax}...y_n = a^ne^{ax}$

উদা. 4. $y = \frac{1}{x+a} = (x+a)^{-1}$, $y_1 = \frac{-1}{(x+a)^2} = -1.(x+a)^{-2}$

$y_2 = (-1)(-2)(x+a)^{-3}$ অনুরূপে $y_n = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

$= (-1)^2.1.2.(x+a)^{-3}$

উদা. 5. $y = (ax + b)^m$ হলে $\frac{d^3y}{dx^3}$ নির্ণয় করুন।

$$\frac{dy}{dx} = m(ax+b)^{m-1}.a, \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)(ax+b)^{m-2}.a^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-3)(ax+b)^{m-3}.a^3$$

উদা. 6. $y = \log_e(x+a)$ হইলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় করুন।

$$\frac{dy}{dx} = +\frac{1}{x+a}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(+\frac{1}{x+a}\right) = \frac{-1}{(x+a)^2}$$

অনুরূপে দেখান যায় যে $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$

উদা. 7. $y = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$ হলে $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ নির্ণয় করুন।

$$y = \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2a}.\frac{d}{dx}.\left(\frac{1}{x-a}\right) - \frac{1}{2a}.\frac{d}{dx}.\left(\frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}.(-1).\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{2a}.(-1).\frac{1}{(x+a)^2}$$

$$= \frac{1}{2a}\left[(-1)\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{-1)}{(x+a)^2}\right]$$

অনুরূপে, $\dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{(-1)^n n!}{2a}\left[\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+a)^{n+1}}\right]$

উদা. 8. $x = at^2$, $y = 2at$ হলে দেখান যে, $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = -\dfrac{1}{2at^3}$

$$\frac{dx}{dt} = 2at, \frac{dy}{dt} = 2a \;\; \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{2a}{2at} = \frac{l}{t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}.\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}.\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{d}{dt}.\left(\frac{1}{t}\right).\frac{dt}{dx} = \left(-\frac{1}{t^2}\right).\frac{1}{2at}$$

$$= -\frac{1}{2at^3}$$

4.4.2 প্রয়োগমূলক উদাহরণ

উদা. 1. ধরুন সম্পূর্ণ মূল্য অপেক্ষক $C = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

গড়মূল্য অপেক্ষক এবং মার্জিনাল মূল্য অপেক্ষক নির্ণয় করুন এবং তাদের লেখচিত্র কি ধরনের হবে তা আলোচনা করুন।

উত্তর : গড়মূল্য = $\dfrac{C}{x} = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x} = ax + b + \dfrac{c}{x}$

মার্জিনাল মূল্য = $\dfrac{dC}{dx} = 2ax + b$

সম্পূর্ণ মূল্য অপেক্ষক একটি অধিবৃত্ত। এই অধিবৃত্তটি ধনাত্মক চতুর্থাংশ COX এর মধ্যে অবস্থিত। ইহা C অক্ষকে (o,c) বিন্দুতে ছেদ করে। এই অধিবৃত্তের অক্ষ C-অক্ষের সমান্তরাল।

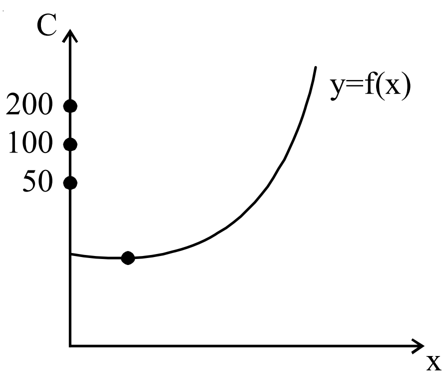
গড়মূল্য অপেক্ষক সাধারণত U আকৃতি বক্ররেখা।

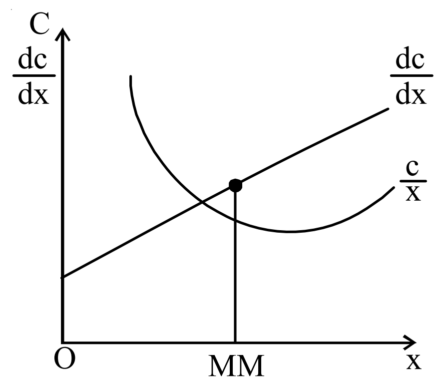
মার্জিনাল অপেক্ষক একটি সরল রেখা যার নতিমাত্রা 2a.

উদা. 2. যদি সম্পূর্ণ মূল্য অপেক্ষক $C=\frac{1}{50}x^2+x+40$, যেখানে x হল দ্রব্য পরিমাণ। তাহলে গড়মূল্য ও মার্জিনাল মূল্য অপেক্ষক নির্ণয় করুন এবং তাদের লেখচিত্র আঁকুন। (দেওয়া আছে গড়মূল্য $=\frac{C}{x}$, মার্জিনাল মূল্য $=\frac{dC}{dx}$

গড়মূল্য $=\frac{C}{x}=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{50}x^2+x+40\right]=\frac{x}{50}+1+\frac{40}{x}$

মার্জিনাল মূল্য $=\frac{dC}{dx}=\frac{1}{25}x+1$





লক্ষ্য করুন : (১) মার্জিন্যাল মূল্যরেখা, গড়মূল্য বক্ররেখার লঘিষ্ঠ বিন্দু দিয়া যায়।

(২) $\left(\frac{c}{x}\right)\to\alpha$ যদি $x\to 0+$

(৩) সম্পূর্ণমূল্য অপেক্ষক ক্রমবর্ধমান কিন্তু গড়মূল্য অপেক্ষক সব সময় ক্রমবর্ধমান হয় না।

উদা. 3. সম্পূর্ণ ক্রয়মূল্য অপেক্ষক $C = ae^{bx}$, $a > 0$, $b > 0$.

গড়মূল্য ও মার্জিনাল অপেক্ষকদ্বয় নির্ণয় করুন এবং ইহাদের লেখচিত্র আঁকুন।

উদা. 4. নিম্নোক্ত সম্পূর্ণ ক্রয়মূল্য অপেক্ষক সাপেক্ষে, গড়মূল্য অপেক্ষক, মার্জিনাল মূল্য অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

(ক) $C = \sqrt{2x+3}+4$ (খ) $C = 2x^2.\dfrac{x+1}{x+3}+2$ (গ) $C = \dfrac{x(x+200)}{(x+100)}$

ধরি x একটি বিশেষ পণ্য, যার চাহিদা বাজারে বর্তমান। কত পরিমাণ x-এর চাহিদা তা অনেকটা পণ্যটির মূল্যের উপর নির্ভরশীল। যদি প্রতি একক পণ্যের মূল্য p হয় এবং x পরিমাণ পণ্য যদি চাহিদা হয়, তাহলে x-কে p-এর অপেক্ষক হিসেবে লেখা সম্ভব; গাণিতিক আকারে লেখা হয়।

$x = \phi(p)$

$\varphi(p)$কে x-এর **চাহিদা অপেক্ষক** বলা হয়।

p স্বাধীন চল, x পরাধীন চল এবং এরা কেবলমাত্র **ধনাত্মক মান গ্রহণ** করে।

যদি p-এর মান বাড়ে তাহলে x-এর মান কমে অর্থাৎ চাহিদা অপেক্ষকটি **ক্রম-হ্রাসমান।**

pকে x-এর নির্ভরশীল ধরা হয়, তখন $p = \psi(x)$ লেখা যায়।

$\varphi(p)$ এবং $\psi(x)$ অপেক্ষক দুটি **একমান বিশিষ্ট, সন্তত ও ক্রমহ্রাসমান।**

4.5 অনুশীলনী

1. $y = x^2\log_e x$ হলে y_3 নির্ণয় করুন। [উঃ $\dfrac{2}{x}$]

2. $y = e^{\frac{1}{x}}$ হলে y_3 নির্ণয় করুন। [উঃ $-\dfrac{1}{x^6}\left(6x^2+6x+1\right)$]

3. $y = \dfrac{\log_e x}{x}$ হলে দেখান যে $y_2(1) = -3$

4. $y = x^2e^x$ হলে দেখান যে $y_2(0) = 2$

5. $x^3 + yu^3 - 3axy = 0$ হলে y_2 নির্ণয় করুন। [উঃ $\dfrac{-2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$]

6. যদি $x = f(t)$, $y = q(t)$ হয় তবে দেখান যে

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^3}\left[x_1 = \frac{dx}{dt}, y_1 = \frac{dy}{dt}\right]$$

7. নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে y_2 নির্ণয় করুন।

(i) $y=\sqrt{x}$ [উঃ $-\dfrac{1}{4x^{1/2}}$]

(ii) $ax^2 + 2hxy + bh^2 = 1$ [উঃ $\dfrac{h^2-ab}{(hx+by)^3}, hx+by \neq 0$]

8. যদি $y = x^2\log_e x$ হয় তবে দেখান যে $xy_3 = 2$.

9. $y = xe^{-x}$ হলে দেখান যে $xy_2 + xy_1 + y = 0$.

পর্যায়—2

একক 5 ❑ রাশিতথ্যের অর্থ ও রাশিতথ্যের সংকলন ও উপস্থাপন

গঠন

5.0 উদ্দেশ্য

5.1 প্রস্তাবনা

5.2 পরিসংখ্যান শব্দের অর্থ

5.3 রাশিতথ্য ও উহার প্রকারভেদ

5.3.1 প্রাথমিক ও অপ্রাথমিক রাশিতথ্য সংগ্রহের উৎস

5.3.2 প্রাথমিক রাশিতথ্য সংগ্রহের পদ্ধতি

5.3.3 অপ্রাথমিক রাশিতথ্য ব্যবহারের সতর্কতামূলক ব্যবস্থা সমূহ

5.4 ব্যবসায়িক সিদ্ধান্তে রাশিবিজ্ঞানের গুরুত্ব ও সুযোগ

5.5 সীমাবদ্ধতা

5.6 রাশিতথ্যের শ্রেণিবিন্যাসকরণ

5.7 রাশিতথ্যের উপস্থাপন

5.8 পরিসংখ্যান বিভাজন

5.8.1 পরিসংখ্যা বিভাজন গঠনে কিছু প্রাথমিক নির্দেশ

5.9 শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনে ব্যবহৃত কিছু সংজ্ঞা

5.9.1 শ্রেণী পরিসংখ্যা বিভাজন গঠন

5.10 বিভিন্ন পদ্ধতিতে শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন উপস্থাপন

5.10.1 ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

5.11 প্রতিলিপির সাহায্যে উপস্থাপনার সুবিধা ও অসুবিধা

5.12 বিভিন্ন ধরনের লেখচিত্র

5.13 অনুশীলনী

5.0 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়বার পর আপনি জানতে পারবেন

- পরিসংখ্যান কাকে বলে
- রাশিতথ্যের প্রকারভেদ
- রাশিবিজ্ঞানের গুরুত্ব ও সুযোগ
- রাশিবিজ্ঞানের সীমাবদ্ধতা
- রাশিতথ্যের শ্রেণীবিন্যাসকরণ
- রাশিতথ্যের উপস্থাপন ও তার প্রকারভেদ
- বিভিন্ন পদ্ধতিতে শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন উপস্থাপনা ও
- বিভিন্ন ধরনের লেখচিত্রের প্রকার

5.1 প্রস্তাবনা

আদমসুমারী (Census) বা নমুনা তদন্ত (Sample Servey) পদ্ধতিতে সংগৃহীত রাশিতথ্যমালা যদি সঠিক আকারে সাজানো ও উপযুক্তভাবে উপস্থাপন করা না হয়, তবে সংগৃহীত রাশিতথ্য মূল্যহীন হয়ে পড়ে। এই একক উক্ত বিষয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হল।

5.2 পরিসংখ্যান শব্দের অর্থ

ইংরেজী statistics শব্দটি খুব সম্ভবত ল্যাটিন শব্দ 'status' অথবা ইতালীয় শব্দ 'statista' অথবা জার্মান শব্দ 'statistek' থেকে উৎপন্ন হয়েছে, যা রাষ্ট্রের বা রাষ্ট্রের জনগণের শাসনকার্যের বা রাজনৈতিক উদ্দেশ্য আহরিত তথ্যের সংকলনকে বোঝাত। বর্তমানকালে, statistics বা পরিসংখ্যান কৃষিবিজ্ঞান, অর্থনীতি, মনোবিজ্ঞান, সমাজ বিদ্যা, ব্যবসা-বাণিজ্য প্রভৃতি ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়।

পরিসংখ্যান শব্দটির দু'টি ভিন্ন অর্থ আছে। বহুবাচনিক অর্থে (Plural sense), পরিসংখ্যান বলতে বিশেষ পদ্ধতিতে সংকলিত কোনও বিশেষ বিষয়ের রাশিমালা বোঝায়। একবাচনিক অর্থে (Singular sense) পরিসংখ্যান হল বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব ও প্রয়োগবিধি সমূহ (Scientific Theories and Methods), যা কোনও বিশেষ বিষয়ের রাশিমালার শ্রেণীবিন্যাস, উপস্থাপন, বিশ্লেষণ ও সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য ব্যবহৃত হয়। পরিসংখ্যানের বিশ্লেষণ নিয়ে গড়ে ওঠা এই বিজ্ঞানকে রাশিবিজ্ঞান বা সংখ্যাতত্ত্ব বলা হয়।

5.3 রাশিতথ্য ও উহার প্রকারভেদ

একজন রাশিবিজ্ঞানীর প্রথম কাজ হচ্ছে রাশিতথ্য বা সংখ্যাতথ্য (Data) সংগ্রহ ও একত্রীকরণ করা। সে নিজের অনুসন্ধানক্ষেত্রে গিয়ে তা সংগ্রহ করতে পারে অথবা অন্য কোনও উৎস থেকে সংগৃহীত তথ্য নিজের কাজে ব্যবহার

করতে পারে। অনুসন্ধানক্ষেত্রে নিজের সংগৃহীত তথ্যকে প্রাথমিক বা প্রত্যক্ষ রাশিতথ্য (Primary Data) বলে। বাস্তবিক ক্ষেত্রে, এই প্রাথমিক তথ্যই পরিসংখ্যানের কাঁচামাল। অনুসন্ধানকার্যে অন্য কোনও উৎস থেকে সংগৃহীত তথ্য ব্যবহৃত হলে ঐ তথ্যকে অপ্রাথমিক বা পরোক্ষ রাশিতথ্য (Secondary Data) বলে।

প্রাথমিক রাশিতথ্য কোনও বিশেষ উদ্দেশ্য সরাসরি অনুসন্ধানক্ষেত্রে থেকে সংগ্রহ করা হয় এর বৈশিষ্ট্যই হল সরাসরি অনুসন্ধানক্ষেত্রে আহরণ করা (Original)। সাধারণত প্রাথমিক রাশিতথ্য কোনও সংস্থা বিশেষরূপে প্রকাশ করে থাকে। দেশে প্রতি দশ বছর অন্তর আদমসুমারীর (Census) সাহায্যে সংগৃহীত তথ্য প্রাথমিক রাশিতথ্য।

পরোক্ষ রাশিতথ্য প্রকাশিত বা অপ্রকাশিত উভয় উৎস থেকে পাওয়া যেতে পারে। কোনও সংস্থা প্রাথমিকভাবে নিজ প্রয়োজনে বা কাউকে তথ্য সরবরাহের জন্য তথ্য সংগ্রহ করে থাকলে সেই তথ্য অনুসন্ধানকারীর কাছে পরোক্ষ তথ্য হিসাবে আসে। দৈনিক, সাপ্তাহিক বা মাসিক সংবাদপত্রে যেসব সংবাদ পরিবেশিত হয় তা পরোক্ষ তথ্য, যেহেতু, এই তথ্য বিভিন্ন উৎস থেকে সংগৃহীত হয়।

একই তথ্য যে সংগ্রহ করছে তার কাছে প্রাথমিক তথ্য, আবার অন্য একজন যে ব্যবহার করছে তার কাছে অপ্রাথমিক তথ্য। যেমন আদমসুমারী বিভাগে সংগৃহীত তথ্য প্রাথমিক তথ্য, কিন্তু অন্য কোনও বিভাগ ইহা ব্যবহার করলে তা তার কাছে পরোক্ষ তথ্য।

5.3.1 প্রাথমিক ও অপ্রাথমিক রাশিতথ্য সংগ্রহের উৎস

প্রাথমিক রাশিতথ্য :

(i) "Annual Report of the Railway Board", ভারত সরকারের রেলমন্ত্রক কর্তৃক প্রকাশিত।

(ii) "Indian Coal Statistics" (বার্ষিক), ভারত সরকারের শ্রমমন্ত্রকের মাইনস্-এর প্রধান পর্যবেক্ষক কর্তৃক প্রকাশিত।

(iii) "Reserve Bank of Indian Bulletin" (মাসিক), ভারতীয় রিজার্ভ ব্যাঙ্ক, মুম্বাই কর্তৃক প্রকাশিত।

(iv) "Indian Textile Bulletin" (মাসিক), Textile Commissioner, মুম্বই কর্তৃক প্রকাশিত।

(v) "Jute Bulletin" (মাসিক), ভারত সরকারের, ভারতীয় কেন্দ্রিয় জুট কমিটি কর্তৃক প্রকাশিত।

অপ্রাথমিক রাশিতথ্য :

(i) "Monthly Abstract of Statistics" কেন্দ্রীয় পরিসংখ্যান সংগঠন, দিল্লী কর্তৃক প্রকাশিত।

(ii) "Statistical Abstract of the Indian Union" (বাৎসরিক), কেন্দ্রীয় পরিসংখ্যান সংগঠন, দিল্লী কর্তৃক প্রকাশিত।

5.3.2 প্রাথমিক রাশিতথ্য সংগ্রহের পদ্ধতি

(i) প্রত্যক্ষ ব্যক্তিগত অনুসন্ধান

(ii) অপ্রত্যক্ষ মৌখিক অনুসন্ধান

(iii) ডাকের মাধ্যমে প্রশ্নমালার দ্বারা অনুসন্ধান

(iv) অনুসন্ধানকারী মারফত তালিকা দ্বারা অনুসন্ধান

(v) দূরভাষ মাধ্যমে অনুসন্ধান

প্রাথমিক রাশিতথ্য উপরোক্ত পদ্ধতিগুলির মাধ্যমে সংগৃহীত হয়। ভৌগোলিক এলাকার সীমানা ছোট হলে প্রত্যক্ষ ব্যক্তিগত অনুসন্ধান পদ্ধতি অবলম্বন করা হয়। কিন্তু এলাকা বড় হলে তা অসম্ভব হয়ে উঠে এবং তখন প্রতিনিধি পাঠিয়ে বিভিন্ন জায়গা থেকে অপ্রত্যক্ষ মৌখিক অনুসন্ধান করা হয়। খবরের কাগজের তথ্য সাধারণত, এই প্রক্রিয়ায় করা হয়। যদিও এই পদ্ধতিতে অপেক্ষাকৃত কম খরচে ও তাড়াতাড়ি রাশিতথ্য সংগ্রহ করা যায়, তবু এই তথ্য ব্যক্তিগত পক্ষপাতদুষ্ট হওয়ার সম্ভাবনা থাকে।

প্রশ্নমালা দ্বারা তথ্যানুসন্ধান সাধারণত দু'ধরনের হয়—ডাকের মাধ্যমে প্রশ্নমালা পাঠালে উত্তরকারীরাই তা পূরণ করে ও অনুসন্ধানকারী মারফত উত্তরদাতার কাছ থেকে উত্তর জেনে তা পূরণ করা। যে সব উৎস থেকে নির্ভরযোগ্য তথ্য পাওয়া যাবে তাদের একটি তালিকা প্রথমে তৈরি করা হয় এবং তাদেরকে একটি প্রশ্নমালা ডাকযোগে বা নিজস্ব প্রতিনিধি দ্বারা পাঠানো হয়। ডাকযোগে পাঠানো হলে উত্তরদাতাকে একটি নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে উত্তর সহযোগে প্রশ্নমালাটি ডাকযোগে ফেরত পাঠানোর অনুরোধ করা হয়। প্রশ্নমালা প্রস্তুতিতে সাবধানতা অবলম্বন করা হয় যাতে কোনও অবান্তর বা বিভ্রান্তিমূলক প্রশ্ন না থাকে। প্রশ্নের সঙ্গে সঙ্গে তার উত্তরের জন্য জায়গা রাখা হয়। উত্তর পাঠাতে যাতে কোনও অসুবিধা না হয় সেজন্য প্রশ্নমালার সঙ্গে সঙ্গে জবাবী খামও সাধারণ পাঠানো হয়। ডাকব্যবস্থার সুবিধা নিয়ে সহজেই এক বিশাল ভৌগোলিক এলাকা থেকে এভাবে প্রয়োজনীয় তথ্য সংগ্রহ করা যায়।

প্রশ্নমালা পাঠানোর সময় লক্ষ্য রাখতে হয় যে, প্রশ্নগুলি ঠিকমত তৈরি হয়েছে কিনা এবং এদের উত্তর প্রয়োজনীয় তথ্য সংগ্রহের জন্য উপযুক্ত কিনা। কি উদ্দেশ্যে তথ্য সংগ্রহ করা হচ্ছে তা পরিষ্কারভাবে জানানো উচিত। এই সঙ্গে জানিয়ে দিতে হয় যে, উত্তরদাতার নাম-ধাম গোপন রাখা হবেও তার প্রদত্ত উত্তর কোন সময় তাকে অসুবিধায় ফেলবে না। প্রয়োজনে উত্তর ফেরত পাওয়ায় নির্দিষ্ট সময় উত্তীর্ণ হয়ে গেলে আবার চিঠি দিয়ে উত্তর পাঠানোর অনুরোধ করতে হয়।

প্রশ্নমালা তৈরি করার কিছু বিষয়ে লক্ষ্য রাখা প্রয়োজন। কোনও ব্যক্তিগত প্রশ্ন প্রশ্নমালায় থাকা উচিত নয়। কীভাবে উত্তর দিতে হবে সে ব্যাপারে উত্তরদাতাদের স্পষ্ট নির্দেশ দিতে হবে। প্রশ্নের সংখ্যা খুব বেশি হলে উত্তরদাতা ক্লান্তি ও বিরক্তি বোধ করতে পারে। প্রশ্নগুলি অবশ্যই সরাসরি, সহজ, ছোট ও যথাসম্ভব বস্তুনির্ভর হওয়া উচিত। এগুলি যথাসম্ভব 'হ্যাঁ' বা 'না' ধরনের উত্তরের উপযোগী হলে ভালো হয়। প্রশ্নগুলি যুক্তি সঙ্গতভাবে পরপর সাজানো উচিত এবং প্রশ্নের উত্তর যাতে অন্য প্রশ্নগুলির উত্তরের সঙ্গে সঙ্গতিপূর্ণ হয় তা দেখতে হবে। এসব সতর্কতা সত্ত্বেও প্রশ্নমালা পাঠানোর পদ্ধতি অনেক সময় ফলপ্রসূ হয় না। কারণ এক্ষেত্রে কেবলমাত্র শিক্ষিত ব্যক্তিদের ক্ষেত্রেই এই পদ্ধতি ব্যবহার করা যায় এবং উত্তরকারীরা অধিকাংশ ক্ষেত্রে তেমন গুরুত্ব না দেওয়ার ফলে সঠিক উত্তর পাওয়া যায় না বা আদৌ উত্তর পাওয়া যায় না। এই পদ্ধতির এটাই বড় ত্রুটি।

প্রশ্নমালা ডাকে পাঠানো ছাড়া অন্য একটি উপায় হল, নিজস্ব প্রতিনিধি প্রশ্নমালা নিয়ে গিয়ে উত্তরদাতার কাছে থেকে উত্তর জেনে নিয়ে তা পূরণ করবে। এতে উত্তর না পাওয়ার সম্ভাবনা কমে। যারা অনিচ্ছুক উত্তরদাতা

তাদেরকে বুঝিয়ে উত্তর পাওয়ার চেষ্টা করা যায়, আবার যারা উত্তর দেওয়ায় মতো উপযুক্ত শিক্ষিত নয় তাদের কাছ থেকেও উত্তর পাওয়ার চেষ্টা করা হয়। এই পদ্ধতিতে খরচ অনেক বেশি হয়।

খুব তাড়াতাড়ি উত্তর পাওয়ার জন্য দূরভাষের (telephone) মাধ্যমে প্রশ্নের উত্তর পাওয়ার পদ্ধতিকে দূরভাষ মাধ্যম অনুসন্ধান বলে। এই পদ্ধতিতে খুব পরিচিত ব্যক্তি এবং যেখানে দূরভাষের ব্যবস্থা আছে কেবলমাত্র সেখানে তথ্য সংগ্রহ করা যায়। এই পদ্ধতির অসুবিধা হল, কোন কোনও সময় উত্তরদাতা অনেকে প্রশ্নের উত্তর এড়িয়ে যায়।

5.3.3 অপ্রাথমিক রাশিতথ্য ব্যবহারের সতর্কতামূলক ব্যবস্থাসমূহ

অপ্রাথমিক রাশিতথ্যের অনেক সীমাবদ্ধতা আছে। সুতরাং এদের ব্যবহারের পূর্বে ব্যবহারকারীকে নিম্নলিখিত বিষয়গুলিতে অবশ্যই সতর্ক থাকতে হবে :

(i) রাশিতথ্যমালা সংগ্রহকারীর বিশ্বস্ততা ও নির্ভরযোগ্যতা ;

(ii) কি উদ্দেশ্যে রাশিতথ্যমালা সংগ্রহ করা হয়েছিল এবং অনুসন্ধানের কতদূর সুযোগ ছিল ;

(iii) অনুসন্ধানের সময় ও ক্ষেত্রের পরিধি ;

(iv) সংগ্রহের পদ্ধতিসমূহ ;

(v) প্রকৃত রাশিতথ্যমালার উপযুক্ততা;

(vi) প্রকৃত রাশিতথ্যমালায় কেমন সংজ্ঞাসমূহ ও এককসমূহ ব্যবহৃত হয়েছে;

(vii) প্রকৃত রাশিতথ্যমালার সঠিকতা।

5.3 ব্যবসায়িক সিদ্ধান্তে রাশিবিজ্ঞানের গুরুত্ব ও সুযোগ

বাণিজ্যিক সিদ্ধান্তগ্রহণের ক্ষেত্রে রাশিবিজ্ঞানের গুরুত্ব অপরিসীম। বাজারদর, উৎপাদন, অর্থসংক্রান্ত ব্যাপার, ব্যাঙ্কের কারবার, বিনিয়োগ, ক্রয়বিক্রয় ইত্যাদির নিজ নিজ পরিকল্পনা রূপায়নের ক্ষেত্রে রাশিবিজ্ঞান গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা গ্রহণ করে। কি উৎপাদন করা হবে? কিভাবে উৎপাদন করা হবে? কখন উৎপাদন করা হবে? কার জন্য উৎপাদন করা হবে? এ ধরনের বিষয়ে সিদ্ধান্ত গ্রহণের ক্ষেত্রে আমরা রাশিবিজ্ঞানের বিশ্লেষণের উপর অনেকটা নির্ভরশীল। অর্থনৈতিক সংস্থাগুলি প্রচণ্ডভাবে রাশিবিজ্ঞানের বিশ্লেষণের উপর নির্ভর করে তাদের বিভিন্ন অর্থনৈতিক সিদ্ধান্তগুলি গ্রহণ করে। আজকাল বিভিন্ন ব্যাঙ্কিং সংস্থাগুলি তথ্যসংগ্রহ ও তার বিশ্লেষণের জন্য নিজেদের গবেষণা বিভাগ তৈরি করেছে। এই বিভাগ তাদের নিজস্ব ব্যবসার পাশাপাশি বর্তমান অর্থনৈতিক পরিস্থিতি এবং তাদের সম্ভাবনাময় ক্ষেত্রগুলির উপর রাশিবিজ্ঞান নির্ভর গবেষণা নিরন্তর করে চলেছে। বিনিয়োগকারীর সঠিক এবং মূল্যবান সিদ্ধান্তগ্রহনের ক্ষেত্রে রাশিবিজ্ঞানই একমাত্র পথ। কোনগুলি ভাল আয়ের সম্ভাবনাময় ক্ষেত্র, কোনগুলিই বা নিরাপদ ক্ষেত্র ইত্যাদি বিষয়ে বিনিয়োগকারী রাশিতথ্যের বিশ্লেষণের উপর সম্পূর্ণভাবে নির্ভরশীল। উৎপাদকের মত ক্রেতাও রাশিতথ্যের বিশ্লেষণের উপর নির্ভর করে এই সকল বিষয়ে সিদ্ধান্ত নেয়—কি কিনব? কত পরিমাণ কিনব? কোন সময়ে কিনব? কোথায় কিনব? কাদের জন্য কিনব?

একজন ব্যবস্থাপকের (Manager) রাশিতথ্যের বিশ্লেষণের মাধ্যমে ভবিষ্যতের ব্যবসায়িক সিদ্ধান্তগ্রহণের গুণ থাকা অবশ্যই বাঞ্ছনীয়। তথ্য বিশ্লেষণের দ্বারা সঠিক ও স্পষ্ট বাণিজ্যিক সিদ্ধান্ত নিতে রাশিবিজ্ঞান সহায়তা করে। সংক্ষিপ্ত সময়ে ও কম খরচে বাজার অনুসন্ধানের জন্য রাশিবিজ্ঞান সঠিক ধারণা দেয়। অভিজ্ঞতালব্ধ রাশিতথ্যের বিশ্লেষণের দ্বারা গৃহীত সিদ্ধান্ত ঊর্দ্ধতন কর্তৃপক্ষের কাছে প্রতিষ্ঠিত করা একজন ব্যবস্থাপকের পক্ষে সহজ হয়। পরিমাণগত বিষয় ছাড়াও গুণগত ও উৎকর্ষগত বিষয়ের ক্ষেত্রেও রাশিবিজ্ঞানের পরিমাপকগুলির বহুক্ষেত্রে সাহায্য নেওয়া হয়ে থাকে।

সুতরাং বোঝা যাচ্ছে, বাণিজ্যিক সিদ্ধান্তের ক্ষেত্রে রাশিবিজ্ঞান সদর্থক ভূমিকা পালন করে। একজন ব্যবস্থাপক তাঁর কর্মীদের কর্মক্ষমতা, কর্মদক্ষতা, কার্যকারিতা সম্পর্কে ধারণা পেতে এবং উৎপাদন ক্ষমতা বৃদ্ধির জন্য রাশিবিজ্ঞানের উপর নির্ভর করেন। বর্তমান দিনে এমন কোন ব্যবসা নেই যেখানে রাশিবিজ্ঞান ও তার বিভিন্ন পদ্ধতির ব্যবহার হয় না এবং আশাকরা যায় ভবিষ্যতেও এই ব্যবস্থার অন্যথা হবে না। এটাই সঠিক সময়, ব্যবসায়িক ও ব্যবস্থাপকগণের রাশিবিজ্ঞানের বিভিন্ন পদ্ধতির সঙ্গে মানিয়ে নিয়ে নিজেদের তৈরি করার।

5.5 সীমাবদ্ধতা

বর্তমানদিনে ব্যবসায়িক সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য রাশিবিজ্ঞানের অপরিহার্য্যতা সর্বজনগ্রাহ্য। কিন্তু ব্যবহারিক ক্ষেত্রে উহার নিম্নলিখিত সীমাবদ্ধতাগুলি পরিলক্ষিত হয়—

(১) রাশিবিজ্ঞান বিশেষ ধরনের তথ্যের ক্ষেত্রে কার্যকর নয় :

কোন সংস্থার চারজন কর্মী অবসর গ্রহণ করল বা কোন সংস্থার ৭৫% লোক ছুটিতে গেল, এই ধরনের নির্দিষ্ঠ বিষয়ের উপর রাশিবিজ্ঞানের বিশ্লেষণ কার্যকর নয় (যেহেতু বিষয়গুলিকে একই ধরনের কোন শ্রেণীতে অন্তর্ভুক্ত করা যায় না), তাই সেই বিষয়গুলো যতই গুরুত্বপূর্ণ হোক না কেন।

(২) ঘটনার সমস্ত বিষয়ের উপর নির্ভর না করে সিদ্ধান্তগ্রহণ :

অনেক ঘটনা আছে যেগুলি একাধিক বিষয়ের উপর নির্ভরশীল ও সেগুলির প্রভাব সবসময় বিবেচনা করা সম্ভব হয় না। যেমন কোন অঞ্চলের অর্থনৈতিক অবস্থা, শিক্ষাগত মান, সাংস্কৃতিক রীতিনীতি, ধর্ম, সরকারি নীতি ইত্যাদি অনেকক্ষেত্রে রাশিতথ্যের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় না। সুতরাং বিভিন্ন বিষয়ের অবহেলার জন্য ঘটনাটির সিদ্ধান্ত ১০০% সঠিক হয় না।

(৩) রাশিতথ্যের সংগ্রহের নীতিজ্ঞান শূন্যতার দায় :

অনেকক্ষেত্রে রাশিতথ্যের সংগ্রহ অনঅভিজ্ঞ বা অসৎ বা পক্ষপাদদুষ্ঠ কোন ব্যক্তি বা সংস্থা দ্বারা হয়ে থাকে। সেক্ষেত্রে সিদ্ধান্তের বিকৃতকরণ ঘটে।

(৪) সঠিক নীতির অভাব :

বিষয়টি সম্ভাবনা (Probability) নির্ভর। সুতরাং এখানের সিদ্ধান্তগুলি বৈজ্ঞানিক নীতির মত সঠিক নয়।

সম্ভাবনা ও প্রক্ষেপের (Interpolation) মাধ্যমে কোন সংস্থার কোন নির্দিষ্ট বছরের উৎপাদন অনুমান করা যায় মাত্র কিন্তু তাকে ১০০% সঠিক বলে দাবি করা যায় না।

(৫) নির্দিষ্ট ঘটনার সিদ্ধান্ত গ্রহণে বিভিন্ন পদ্ধতির ব্যবহার :

কোন ঘটনার সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য আমরা একাধিক পদ্ধতির (চতুর্থ্যক বিচ্যুতি, গড় বিচ্যুতি, সম্যক বিচ্যুতি ইত্যাদি) ব্যবহার করি এবং অনেকসময় প্রতিটি ক্ষেত্রে ফলাফলের পার্থক্য দেখা যায়।

(৬) নমুনার (Sample) আকার ছোট হওয়া :

মনে কর, কোন অঞ্চলের কোন জিনিসের চাহিদা বা যোগান নিরুপণের প্রয়োজন। এক্ষেত্রে উক্ত অঞ্চলের ছোট নমুনার উপর গৃহিত রাশিবিজ্ঞানের সিদ্ধান্ত অনেক সময় সঠিক হয় না।

(৭) পক্ষপাত দুষ্ট ফলাফল :

রাশিবিজ্ঞানের বিশ্লেষণের দ্বারা কোন সংস্থার কোন উৎপাদিত বস্তু ত্রুটিপূর্ণ বলে পক্ষপাত দুষ্ট হয়ে বিবেচিত হল এবং সংস্থার ব্যবস্থাপক উক্ত ফলের উপর ভিত্তি করে কোন সিদ্ধান্ত গ্রহণ করলেন। ফলশ্রুতি হিসেবে তিনি তাঁর সিদ্ধান্তে অপরিতৃপ্ত হয়ে, সিদ্ধান্তহীনতায় ভুগতে পারেন।

(৮) রাশিবিজ্ঞানের প্রয়োগের ক্ষেত্রে সবচেয়ে বড় সীমাবদ্ধতা হল, লঘুহস্তে রাশিতথ্যের বিশ্লেষণ ও ফলস্বরূপ সিদ্ধান্তে বিকৃতি।

5.6 রাশিতথ্যের শ্রেণীবিন্যাসকরণ

পরিসংখ্যানীয় রাশিতথ্য সমূহের প্রকৃতি, তাদের সাদৃশ্য ও তদন্তের উদ্দেশ্যের উপর নির্ভর করে বিভিন্ন শ্রেণী বা বিভাগে বিভক্ত করার পদ্ধতিই হল শ্রেণীবিন্যাসকরণ। রাশিতথ্যসমূহকে নিম্নলিখিত চারটি বিভিন্ন পদ্ধতিতে শ্রেণীবিন্যাসিত করা হয়।

(i) গুনের ভিত্তিতে (On qualitative basis) : যদি সংগৃহীত রাশিতথ্যের শ্রেণীবিন্যাসকরণ কোনো অপরিমেয় বৈশিষ্ট্যের সাপেক্ষে করা হয়, তবে তাকে গুনের ভিত্তিতে শ্রেণীবিন্যাসকরণ বলে। যেমন—লিঙ্গ (Gender), জাতি, পেশা ইত্যাদির সাপেক্ষে শ্রেণীবিন্যাসকরণ।

(ii) পরিসংখ্যান ভিত্তিতে (On quantitative basis) : রাশিতথ্যসমূহের বৈশিষ্ট্যগুলি পরিমেয় হলে অর্থাৎ সংখ্যা বা রাশির দ্বারা প্রকাশ করা সম্ভব হলে, এদের শ্রেণীবিন্যাসকরণকে পরিমাপের ভিত্তিতে শ্রেণীবিন্যাস বলে। যেমন—কোন দেশে জনসংখ্যার বয়স, আয়, উচ্চতা ইত্যাদির সাপেক্ষে শ্রেণীবিন্যাসকরণ।

(iii) সময়ের ভিত্তিতে (On the basis of time) : এই শ্রেণীবিন্যাসকরণ পদ্ধতিতে রাশিতথ্যসমূহের বিভিন্ন সময়ে পরিলক্ষিত মানগুলি সময়ের সাপেক্ষে শ্রেণীবিন্যাস করা হয়। এই পদ্ধতিতে বিন্যাসিত রাশিতথ্যসমূহকে

কালীনসারি (Time Series) বলে। যেমন—প্রতি মাসে কোন কারখানায় কি পরিমাণ সামগ্রী উৎপন্ন হয়েছে তার হিসাব।

(iv) ভৌগলিক অবস্থানের ভিত্তিতে (On Geographical basis) : রাশিতথ্যসমূহ পরিসংখ্যানের জন্য ভৌগোলিক অঞ্চলের (যেমন জেলা, রাজ্য, দেশ ইত্যাদি) ভিত্তিতে শ্রেণীবিন্যাস করার পদ্ধতিতে ভৌগোলিক অবস্থানের ভিত্তিতে শ্রেণীবিন্যাস বলে। যেমন—ভারতের লোকসংখ্যা রাজ্য বা জেলা সাপেক্ষে শ্রেণীবিন্যাসকরণ।

5.7 রাশিতথ্যের উপস্থাপনা

সাধারণত রাশিতথ্য নিম্নলিখিত তিনটি পদ্ধতিতে উপস্থাপন করা হয় :

(i) বিবরণের মাধ্যমে (Textual Presentation)

(ii) ছকের মাধ্যমে (Tabular Presentation)

(iii) প্রতিলিপি বা চিত্রের মাধ্যমে (Diagrammatic Presentation)

(i) বিবরণের মাধ্যমে : এই পদ্ধতিতে রাশিতথ্যকে একটি বিবরণের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। বিবরণমূলক উপস্থাপনায় অনুসন্ধানকারীর পক্ষে দীর্ঘ বিবরণের মাঝখান থেকে রাশিতথ্যের গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্যগুলিকে দৃষ্টিগোচর আনা খুব কষ্টকর হয়।

(ii) ছকের মাধ্যমে : এই পদ্ধতিতে সংগৃহীত রাশিতথ্যকে একটি সুবিন্যস্ত ছকের (Table) মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। রাশিতথ্যের এরকম সুনিব্যস্ত একটি ছকে শ্রেণী বিন্যস্ত রাশিতথ্যকে উপর থেকে নীচে এবং বামদিক তেকে ডানদিকে সুশৃঙ্খল ও সারিবদ্ধভাবে সন্নিবেশ করা হয়।

একটি ছকের বিভিন্ন অংশগুলি হল :

(a) ছক বা সারণি নং (Table Number) : সহজে সনাক্ত করার জন্য ছক বা সারণির একটি নম্বর দেওয়া হয়, বিশেষ করে যখন একাধিক ছক একসঙ্গে প্রস্তুত করা হয়।

(b) শিরোনাম (Title) : ছকের বিষয়বস্তুর সংক্ষিপ্ত বিবরণ দিয়ে উহার উপরে লিখিত অংশটিকে শিরোনাম বলা হয়।

(c) ছক বা সারণির বামপার্শ্বের বিবরণ লিপি (Stub or Row Headings) : এটি ছকের বামদিক থেকে ডানদিকে সারিকৃত রাশিমালার বিবরণ লিপি।

(d) ছকের উপরিভাগের বিবরণ লিপি (Caption or Column Headings) : এটি ছকের উপর থেকে নীচে সারিকৃত রাশিমালার বিবরণ লিপি।

(e) মূল অংশ (Body or Data) : এই অংশে রাশিতথ্য প্রকাশ করা হয়।

(f) পাদটীকা (Foot note) : ইহা ছকের নীচে থাকে। এই অংশে তথ্যের উৎস বর্ণনা এবং ছকে ব্যবহৃত কোনও পদের ব্যাখ্যা (explanation) করা হয়।

নিম্নে একটি ছকের বিভিন্ন অংশ দেখান হল :

সারণি নং—

শিরোনাম

	← (Caption) → **উপরিভাগের বিবরণলিপি**
বামপার্শ্বের ↕ (sub) বিবরণলিপি	মূলবিষয় ↔ (Body)

উৎস :

পাদটীকা :

ছক তৈরি করার ক্ষেত্রে বাঁধাধরা কোনও নিয়ম নেই। তবে ছক এমনভাবে তৈরি করতে হবে যাতে রাশিতথ্যের অন্তর্নিহিত অর্থ খুব স্পষ্ট ও সহজে বোধগম্য হয়। যদি ছক জটিল হয় তবে তা ভেঙে সহজে বোধগম্য এরূপ কয়েকটি পৃথক সরল ছকে প্রকাশ করা বাঞ্ছনীয়।

উদাহরণ ১. পাঁচটি কারখানার দু'টি ভিন্ন তারিখে স্ত্রী-পুরুষের আঠার বছরের কম এবং আঠার বছরের বা তার বেশি দু'টি বিভাগে গড় আয়ের শূন্য ছক প্রস্তুত করুন।

সমাধান :

সারণি নং ২.১

পাঁচটি কারখানায় গড় আয়

কারখানা	তারিখ—				তারিখ—					
	১৮ বছর নিচে		১৮-বছর বা তার উপর		১৮ বছরের নিচে		১৮ বছর বা তার উপর			
	স্ত্রী	পুরুষ	স্ত্রী	পুরুষ	স্ত্রী	পুরুষ	স্ত্রী	পুরুষ	স্ত্রী	
১										
২										
৩										
৪										
৫										
মোট										

(iii) প্রতিলিপি বা চিত্রের মাধ্যমে—এই পদ্ধতিতে সংগৃহীত তথ্যকে লেখ, চার্ট, ছবি ইত্যাদির সাহায্যে উপস্থাপন করা হয়। পরের একটি অনুচ্ছেদে এর বিষয় আলোচনা করা হবে।

5.8 পরিসংখ্যান বিভাজন

কোনও বিশেষ অনুসন্ধান ক্ষেত্রে যাদের সম্বন্ধে তথ্য সংগ্রহ করা হয় তাদের সমষ্টিকে সমগ্রক (Population বা Universe) বলে। সমগ্রকের যে বৈশিষ্ট্যকে সংখ্যার দ্বারা প্রকাশ করা যায়, তাকে পরিমেয় বৈশিষ্ট্য বা চলক (Variable) বলে। যেমন—বিক্রয়, রপ্তানী, উৎপাদন, আয়, উচ্চতা, ওজন, বয়স ইত্যাদি চলক। কোনও একটি চলকের সংগৃহীত মানগুলি যদি বিস্তৃত বা বিশৃঙ্খলভাবে লিপিবদ্ধ থাকে, তবে রাশিবিজ্ঞানবিদদের পক্ষে ঐ মানগুলি পুঙ্খানুপুঙ্খভাবে পরীক্ষা করে তার অন্তর্নিহিত অর্থ খুঁজে বের করা কষ্টসাধ্য বা অসম্ভব হতে পারে। অন্তর্নিহিত অর্থ সম্পর্কে সঠিক মূল্যায়নের জন্য চলকের মানগুলিকে সারিকরনের মাধ্যমে সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করা জরুরি। পরিসংখ্যানে বিশৃঙ্খলভাবে সজ্জিত চলকের মানগুলিকে সারিকরণ বা বিভাগীকরণ পরিসংখ্যান বিভাজন (Frequency distribution) বলে। কোনও একটি নির্দিষ্ট শ্রেণীর মধ্যে চলকের যতগুলি মান পড়বে সেই সংখ্যাকে উক্ত শ্রেণীর পরিসংখ্যান (Frequency) বলে এবং যে ছকের মাধ্যমে চলকের সারিকৃত মান ও তার পরিসংখ্যা প্রকাশ করা হয়, তাকে পরিসংখ্যা ছক বা সারণি (Frequency Tabel) বলে।

পরিসংখ্যা বিভাজন দুই প্রকারের হয় : (i) সরল পরিসংখ্যা বিভাজন (Simple Frequency Distribution) এবং (ii) শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন (Grouped Frequency Distribution)

(i) সরল পরিসংখ্যা বিভাজন : এই বিভাজনে চলকের বিভিন্ন মান ও তাদের পরিসংখ্যা স্বতন্ত্রভাবে প্রকাশ করা হয়। নিচে 30 জন ছাত্রের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হল তা থেকে গঠিত সরল পরিসংখ্যা বিভাজন দেখানো হল :

30 জনের প্রাপ্ত নম্বর : 20, 25, 41, 27, 20, 27, 20, 46, 32, 27, 25, 46, 32, 27, 25, 46, 32, 41, 32, 27, 27, 25, 32, 41, 32, 25, 41, 27, 32, 27, 32, 41, 25, 27.

সারণি নং ২.২

30 জন ছাত্রের নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন

নম্বর	টালিমার্ক	পরিসংখ্যা
20	///	3
25	~~////~~/	5
27	~~////~~ ///	8
32	~~////~~ //	7
41	~~////~~/	5
46	//	3
মোট	—	30

নম্বর 20 : পরিসংখ্যা 3 বলতে বোঝায় 20 নম্বর পেয়েছে এরকম ছাত্রের সংখ্যা 3। উপরের টালিমার্ক হ'ল হেলানো দাগ (/) যার চারটির পরে পঞ্চমটি আড়াআড়িভাবে দেওয়া হয়। এরকম পাঁচটি টালিমার্কের একটি গুচ্ছের পরে একটু বেশি ফাঁক দেওয়া হয়। টালিমার্ক সবসময় মান বা মানের শ্রেণীর একই লাইনে বসাতে হবে। পরিসংখ্যার গণনার পক্ষে এই পদ্ধতি সুবিধাজনক।

(ii) শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন—চলকের মান অল্পসংখ্যক হলে সরল পরিসংখ্যা বিভাজন যথোপযুক্ত। যে ক্ষেত্রে চলকের প্রচুর মান রয়েছে, সেক্ষেত্রে এইভাবে বিভাজন প্রায় অসম্ভব। এক্ষেত্রে পরিসংখ্যা ছককে সংক্ষিপ্তকরণের জন্য সংগৃহীত রাশিতথ্য মালাকে সঠিকভাবে অনুধাবনের জন্য চলকের মানের প্রসার (range) কে কতকগুলি সসীম উপপ্রসার (sub-range) -এ ভাগ করে সেই অনুযায়ী শ্রেণীবদ্ধ করা হয়। ফলে, শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন প্রক্রিয়ায় চলকের মানগুলি কতকগুলি সসীম উপপ্রসারে শ্রেণীবদ্ধ করে শ্রেণীগুলির পরিসংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা হয়। শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে চলকের কোন একটি বিশেষ মানের পরিসংখ্যা জানা যায় না।

নিচে 100 জন ছাত্রের পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হল এবং তা থেকে গঠিত শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন দেখানো হল :

100 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর :

3	23	24	8	16	23	16	20	24	20
15	8	21	29	50	24	33	42	30	20
24	35	8	26	38	30	26	38	24	26
24	26	24	15	10	10	16	26	45	45
30	29	33	24	26	24	13	24	26	24
26	45	21	21	21	23	44	13	35	23
23	30	21	23	46	42	24	16	13	15
20	26	33	29	42	24	20	29	20	15
15	21	21	21	26	37	27	44	29	23
16	15	31	24	31	26	24	23	31	20

সারিণ নং ২.৩

100 জন ছাত্রের নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন

নম্বর	টালিমার্ক	পরিসংখ্যা
1-5	/	1
6-10	~~////~~	5
11-15	~~////~~ ////	9
16-20	~~////~~ ~~////~~ //	12
21-25	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ /	31
26-30	~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~	20
31-35	~~////~~ ////	8
36-40	///	3
41-45	~~////~~ ///	8
46-50	///	3
মোট	—	100

5.8.1 পরিসংখ্যা বিভাজন গঠনে কিছু প্রাথমিক নির্দেশ

(i) শ্রেণীসংখ্যা খুব কম বা খুব বেশি হবে না। বেশি হলে গণনা কার্য দীর্ঘ ও জটিল হয়, আবার খুব কম হলে বৈশিষ্ট্যের সঠিকতা (accuracy) হারাবে। সাধারণত শ্রেণীসংখ্যা 5 থেকে 20 এর মধ্যে হয়।

(ii) শ্রেণিদৈর্ঘ্য যথাসম্ভব সমান হওয়া উচিত। অবশ্য কোনও কোনও ক্ষেত্রে এর ব্যতিক্রম হতে পারে। আয়ের পরিসংখ্যা বিভাজনে আয়ের প্রসার খুব বেশি হয়, যথা 100 টাকা থেকে 5000 টাকা। এক্ষেত্রে সমান শ্রেণীদৈর্ঘ্য সম্ভব নয়।

(iii) বিভাজনে চলকের সকল মানকে গণ্য করতে হবে। কোনও মান বাদ দেওয়া চলবে না।

(iv) শ্রেণীগুলি পরস্পর ব্যতিরেকী হবে অর্থাৎ একটি মান কেবলমাত্র একটি শ্রেণীতে থাকবে।

(v) মুক্ত প্রাপ্ত (open end) শ্রেণী যথাসম্ভব বর্জন করা উচিত।

5.9 শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনে ব্যবহৃত কিছু সংজ্ঞা

(i) অবিচ্ছিন্ন ও বিচ্ছিন্ন চলক (Continuous and Discrete variables) : কোনও চলকের সংগৃহীত বিভিন্ন মানগুলি যদি একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকে ঐ সীমাকে চলকের প্রসার (Range) বলে। যেমন কোনও

শ্রেণীর ছাত্রদের উচ্চতার বিভিন্ন মানগুলি যদি 120 সেমি থেকে 180 সেমি-এর মধ্যে থাকে, তবে ছাত্রদের উচ্চতার প্রসার হবে (180 – 120) সেমি বা 60 সেমি। যদি একটি চলক এরূপ হয় যে, একটি নির্দিষ্ট প্রসারের অন্তর্বর্তী যে কোন মান উহা গ্রহণ করতে পারে, তবে চলকটিকে অবিচ্ছিন্ন চলক (continuous variable) বলে। আলোচ্য উদাহরণে কোন একজন ছাত্রের উচ্চতা 129 সেমি বা 129.8 সেমি বা 129.86 সেমি বা 120 সেমি থেকে 180 সেমি-এর মধ্যে যে কোনও সংখ্যা হতে পারে। অর্থাৎ অবিচ্ছিন্ন চলকের অসংখ্য মান থাকা সম্ভাব্য। আয়, উচ্চতা, ওজন, আয়তন, ঘনত্ব প্রভৃতি অবিচ্ছিন্ন চলকের উদাহরণ। কিন্তু কোনও চলক যদি এমন হয় যে, ইহা কেবল কয়েকটি বিচ্ছিন্ন (isolated) মান গ্রহণ করতে পারে, তবে উহাকে বিচ্ছিন্ন চলক (Discrete variable) বলে। কোনও দ্রব্যের উৎপাদন সংখ্যা, কোনও সভায় লোকের সংখ্যা, বিভিন্ন পরিবারে শিশুসংখ্যা, ফুটবল খেলায় গোলসংখ্যা, ক্রিকেট খেলায় রানসংখ্যা ইত্যাদি বিচ্ছিন্ন চলকের উদাহরণ। ফুটবল খেলায় গোলসংখ্যা কখনও ভগ্নাংশ হতে পারে না—ইহা সবসময়ই অখণ্ড পূর্ণসংখ্যা হবে। অন্যভাবে বলা যায়, মাপনীয় দ্বারা নির্ণীত চলকের মান অবিচ্ছিন্ন, কিন্তু গণনার দ্বারা নির্ণীত চলকের মান বিচ্ছিন্ন।

(ii) শ্রেণীবিভাগ বা শ্রেণী প্রসার (Class interval) : যদি চলক অবিচ্ছিন্ন হয় অথবা বিচ্ছিন্ন চলক অধিক সংখ্যক মান গ্রহণ করে, তবে চলকের মানের প্রসারকে কয়েকটি সসীম উপপ্রসারে বিভক্ত করে শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন প্রক্রিয়ায় প্রকাশ করা হয়। এইক্ষেত্রে চলকের উপপ্রসারকে শ্রেণীবিভাগ বা শ্রেণী প্রসার বলে। সারণি নং ২.৩-এর প্রথম স্তম্ভে উহা দেখানো হয়েছে। এইভাবে 1-5, 6-10, 11-15 ইত্যাদি বিভিন্ন শ্রেণী প্রসার।

যদি কোনও শ্রেণীর এক প্রান্তের মান অনুক্ত থাকে, তবে ইহাকে **মুক্তপ্রান্ত শ্রেণী** (open and class) বলে। কোনও পরিসংখ্যা বিভাজনে একটি বা দুটি মুক্ত প্রান্ত শ্রেণী থাকতে পারে। মুক্ত প্রান্ত শ্রেণী তখনই গঠন করা হয়, যখন প্রান্তীয় মান অন্যান্য মান থেকে অনেক দূরে থাকে, অন্যথায় কিছু শ্রেণীর পরিসংখ্যা হয়তো শূন্য লিখতে হবে।

(iii) শ্রেণী পরিসংখ্যা ও মোট পরিসংখ্যা (Class frequeny and Total frequency) : চলকের যতগুলি মান একটি শ্রেণীর অন্তর্গত, সেই সংখ্যাকেই উহার শ্রেণী পরিসংখ্যা বলে। সারণি নং ২.৩-এ 16-20 শ্রেণী বিভাগের পরিসংখ্যা 12। সমস্ত শ্রেণী বিভাগের পরিসংখ্যার সমষ্টিকে মোট পরিসংখ্যা বলে। সারণি নং ২.৩ এর মোট পরিসংখ্যা 100।

(iv) শ্রেণী সীমা (Class Limit) এবং শ্রেণী সীমানা (Class Boundary) : কোনও শ্রেণী প্রসারের দুটি প্রান্তকে ঐ শ্রেণীর শ্রেণী সীমা (Class Limit) এবং বড়টিকে ঊর্ধ্বশ্রেণী সীমা (Upper Class Limit) বলে। সারণি নং ২.৩ এ 21-25 শ্রেণী প্রসারের নিম্নশ্রেণী সীমা 21 এবং ঊর্ধ্বশ্রেণী সীমা 25।

অবিচ্ছিন্ন চলকের ক্ষেত্রে, রাশিগুলিকে কোনও একটি এককের আসন্ন মান লিপিবদ্ধ করা হয়। যেমন, কিছু লোকের ওজনের বিভাজনের কথা ধরা যাক। যদি ওজন পাউন্ডের কাছাকাছি পরিমাপ করা হয়, তবে 99.5^{th} থেকে 109.5^{th}-এর মধ্যে সমস্ত রাশিতথ্য 100 – 109 শ্রেণীপ্রসারের অন্তর্ভুক্ত হবে। 100 – 109 শ্রেণী প্রসারের জন্য 99.5 কে নিম্নশ্রেণী সীমানা (Lower Class Boundary) এবং 109.5-কে ঊর্ধ্বশ্রেণী সীমানা (Upper Class Boudary) বলে। অনুরূপভাবে, 110-119 শ্রেণীপ্রসারের জন্য নিম্নশ্রেণী সীমানা ও ঊর্ধ্বশ্রেণী সীমানা যথাক্রমে 109.5 এবং 119.5। এক্ষেত্রে 99.5 থেকে 100.5 পর্যন্ত যে কোনও মানের আসন্ন মান 100। আবার 99.45 থেকে 99.55 পর্যন্ত যে কোনও

মানের এক দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান 99.5। লক্ষণীয় যে, কোনও শ্রেণীর ঊর্ধ্বশ্রেণী সীমানা পরবর্তী শ্রেণী নিম্নশ্রেণী সীমানার সমান হয়। নিম্নলিখিত উপায়ে শ্রেণী সীমানা নির্ণয় করা হয়।

নিম্ন শ্রেণী সীমানা = নিম্নশ্রেণী সীমা $-\frac{d}{2}$

এবং ঊর্ধ্বশ্রেণী সীমানা = ঊর্ধ্বশ্রেণী সীমা $+\frac{d}{2}$

যেখানে d হল কোনও শ্রেণীর ঊর্ধ্বসীমা ও পরবর্তী শ্রেণীর নিম্নসীমার মধ্যে পার্থক্য।

(v) মধ্যবিন্দু (Mid point or Mid value or Class Mark) : কোনও শ্রেণীবিভাগের ঠিক মধ্যমানকে শ্রেণীর মধ্যবিন্দু বলে। ইহা দুটি শ্রেণীসীমা বা শ্রেণী সীমানার গড়, অর্থাৎ

মধ্যবিন্দু $=\frac{1}{2}$ (নিম্নশ্রেণী সীমা + ঊর্ধ্বশ্রেণী সীমা)

$=\frac{1}{2}$ (নিম্নশ্রেণী সীমানা + ঊর্ধ্বশ্রেণী সীমানা)

সারণি নং ২.৩-এ 26-30 শ্রেণীর মধ্যবিন্দু হল $\frac{1}{2}(26+30)$ বা 28।

(vi) শ্রেণী দৈর্ঘ্য (Size or Width of Class Inverval) : কোনও শ্রেণী বিভাগের ঊর্ধ্ব ও নিম্ন সীমানার অন্তরফলকে ঐ শ্রেণীর দৈর্ঘ্য বলে। সারণি নং ২.৩-এ 31-35 দৈর্ঘ্য 35.5 – 30.5 = 5 লক্ষণীয়। এই সারণিতে সমস্ত শ্রেণীর দৈর্ঘ্য 5।

(vii) পরিসংখ্যা ঘনত্ব (Frequency density) : কোনও শ্রেণী বিভাগের প্রতি একক শ্রেণী দৈর্ঘ্যের পরিসংখ্যাকে শ্রেণীটির পরিসংখ্যা ঘনত্ব বলে।

$$\text{পরিসংখ্যান ঘনত্ব} = \frac{\text{শ্রেণী পরিসংখ্যা}}{\text{শ্রেণী প্রসারের দৈর্ঘ্য}}$$

২.৩ নং সারণির 21-25 শ্রেণীর পরিসংখ্যা ঘনত্ব $=\frac{31}{5}=6.2$

(viii) আনুপাতিক পরিসংখ্যা (Relative Frequency) : শ্রেণি বিভাগের পরিসংখ্যা যদি মোট পরিসংখ্যার অনুপাত হিসেবে প্রকাশ করা হয়, তবে তাকে ঐ শ্রেণীর আনুপাতিক পরিসংখ্যা বলে।

$$\text{আনুপাতিক পরিসংখ্যা} = \frac{\text{শ্রেণী পরিসংখ্যা}}{\text{মোট পরিসংখ্যা}}$$

২.৩ নং সারণির 41-45 শ্রেণীর আনুপাতিক পরিসংখ্যা হল $\frac{8}{100}$ বা 0.08।

সারণি নং ২.৪

শ্রেণী সীমা, শ্রেণী সীমানা, মধ্যবিন্দু, পরিসংখ্যা ঘনত্ব ও আনুপাতিক পরিসংখ্যা

শ্রেণী প্রসার	শ্রেণী পরিসংখ্যা	শ্রেণী সীমা		শ্রেণী সীমানা		মধ্যবিন্দু	শ্রেণী দৈর্ঘ্য	পরিসংখ্যা ঘনত্ব	আনুপাতিক পরিসংখ্যা
		নিম্ন	ঊর্ধ্ব	নিম্ন	ঊর্ধ্ব				
1–5	1	1	5	0.5	5.5	3	5	0.2	0.01
6–10	5	6	10	5.5	10.5	8	5	1.0	0.05
11–15	9	11	15	10.5	15.5	13	5	1.8	0.09
16–20	12	16	20	15.5	20.5	18	5	2.4	0.12
21–25	31	21	25	20.5	25.5	23	5	6.2	0.31
26–30	20	26	30	25.5	30.5	28	5	4.0	0.20
31–35	8	31	35	30.5	35.5	33	5	1.6	0.08
36–40	3	36	40	35.5	40.5	38	5	0.6	0.03
41–45	8	41	45	40.5	45.5	43	5	1.6	0.08
46-50	3	46	50	45.5	50.5	48	5	0.6	0.03
মোট	100	—	—	—	—	—	—	—	1.00

5.9.1 শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন গঠন

শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন গঠনের জন্য নিম্নলিখিত ধাপগুলি অনুসরণ করা হয় :

(i) প্রথমে মানগুলির প্রসার (অর্থাৎ, সর্বোচ্চ মান—সর্বনিম্ন মান) নির্ণয় করা হয়।

(ii) প্রসারকে উপযুক্ত শ্রেণীবিভাগ সংখ্যায় ভাগ করতে হয়। ইহা এমনভাবে করা হয় যাতে শ্রেণী দৈর্ঘ্য বা তার গুণিতক হয়, গণনা কার্য সহজ হওয়ার উপযুক্ত।

(iii) প্রথম শ্রেণীর নিম্নসীমা শূন্য (0) বা 5 বা তার গুণিতক হওয়া উচিত। যেমন—যদি সর্বনিম্ন মান 27 এবং শ্রেণী বিভাগের দৈর্ঘ্য 10 হয়, তবে প্রথম শ্রেণী 27-37-এর পরিবর্তে 25-35 হওয়া উচিত।

(iv) টালিমার্কের সাহায্যে শ্রেণী পরিসংখ্যা নির্ণয় করা হয়।

(v) প্রথম স্তম্ভ শ্রেণী প্রসার ও দ্বিতীয় স্তম্ভে তার পরিসংখ্যা রেখে সারণি বা ছক তৈরি করতে হয়। এটাই নির্ণেয় পরিসংখ্যা বিভাজন হবে।

5.10 বিভিন্ন পদ্ধতিতে শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন উপস্থাপন

২.৩ নং সারণিতে শ্রেণীসীমা (Class Limits) ব্যবহার করে শ্রেণী প্রসার বা শ্রেণী বিভাগ দেখানো হয়েছে। নিচে আর কয়েকটি উপস্থাপন দেখান হল :

সারণি নং ২.৫

142 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর	
নম্বর	**পরিসংখ্যা**
0–10	5
10–20	10
20–30	20
30–40	40
40–50	30
50–60	20
60–70	10
70–80	4
80–90	2
90–100	1
মোট—	142

সারণি নং ২.৬

250 জন কর্মীর সাপ্তাহিক আয়	
আয় (টাকার)	**পরিসংখ্যা**
30–	3
32–	8
34–	24
36–	31
38–	50
40–	61
42–	38
44–	21
46–	12
48–50	2
মোট—	250

সারণি নং ২.৭

40 জন লোকের সাপ্তাহিক আয়	
আয় (টাকার)	**পরিসংখ্যা**
30 এর উপর কিন্তু 40 এর নীচে	8
40 এর উপর কিন্তু 50 এর নীচে	12
50 এর উপর কিন্তু 60 এর নীচে	6
60 এর উপর কিন্তু 70 এর নীচে	4
70 এর উপর কিন্তু 80 এর নীচে	10
মোট	40

সারণি নং ২.৮

80 জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর	
নম্বর	**পরিসংখ্যা**
30-এর নীচে	7
30-40	12
40-50	25
50-60	16
60-70	15
70-এর উপর	5
মোট—	80

২.৫ নং সারণীতে শ্রেণী প্রসার শ্রেণী সীমানা (Class boundaries) দিয়ে দেখানো হয়েছে। **যে মানটি শ্রেণী সীমানার সঙ্গে সমান হয় তা সাধারণ পরবর্তী শ্রেণীতে ধরা হয়। যেমন নম্বর** 20 ও 30 যথাক্রমে 20-30 ও 30-40 শ্রেণীতে রয়েছে।

২.৬ নং সারণীতে শ্রেণীপ্রসার দেখানোর সময় ঊর্ধ্বশ্রেণী সীমা (Upper Class Limit) গুলে পরিষ্কারভাবে দেখানো হয়নি। প্রথম শ্রেণী প্রকৃতপক্ষে 30 ও তার উপর, কিন্তু 32-এর নিচে এবং দ্বিতীয় শ্রেণী 32 ও তার উপর, কিন্তু 34-এর নিচে।

২.৭ নং সারণিতে কোনও শ্রেণীর ঊর্ধ্বসীমা পরবর্তী শ্রেণীতে রয়েছে। যেমন প্রথম শ্রেণীর 40 দ্বিতীয় শ্রেণীতে, দ্বিতীয় শ্রেণীর 50 তৃতীয় শ্রেণীতে রয়েছে।

২.৮ নং সারণিতে প্রথম শ্রেণী ও শেষ শ্রেণী মুক্ত (Open)। ফলে প্রথম শ্রেণীর নিম্নসীমা ও শেষ শ্রেণীর উর্ধ্বসীমা অজানা। **যদি সকল শ্রেণী প্রসারের দৈর্ঘ্য সমান হয়, তবে মুক্ত প্রান্তীয় শ্রেণীগুলি সমপ্রসার বিশিষ্ট ধরা হয়, অন্যথায় তা অজানা থাকবে।**

5.10.1 ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

পরিসংখ্যানে অনেক সময় চলকের একটি নির্দিষ্ট মান অপেক্ষা রাশিতথ্যমালার কতগুলি মান ছোট (বা বড়) তা জানার প্রয়োজন হয়। এইসব ক্ষেত্রে, নির্দিষ্ট মান পর্যন্ত বা মানের উপরে পরিসংখ্যাগুলিকে ক্রমান্বয়ে যোগ (accumulate) করতে হয়। এই ক্রমান্বয়ে যোগ করা পরিসংখ্যাকে বিভাজন প্রক্রিয়ায় যদি প্রথম বা উপর থেকে পরিসংখ্যা যথাক্রমে a, b, c, d ইত্যাদি হয়, তবে দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ ইত্যাদি বিভাগ পর্যন্ত মোট পরিসংখ্যা হবে যথাক্রমে (a + b), (a + b + c), (a + b + c + d) ইত্যাদি এবং এগুলি যথাক্রমে বিভাগগুলির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নির্দেশ করে।

যতগুলি সংখ্যা নির্দিষ্ট মানের সমান বা তার চেয়ে নিচে সেই সংখ্যাকে “নিচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা” (Less than cumulative frequency) এবং কতগুলি সংখ্যা নির্দিষ্ট মানের সমান বা তার থেকে বেশী হয়। সেই সংখ্যাকে “উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা” (Greater-than cumulative frequency) বলে।

যদি চলকের বিভিন্ন মানও তার অনুরূপ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (নিচ থেকে বা উপর থেকে) একটি ছক বা সারণিতে সাজানো হয়, তবে তাকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন (Cumulative Frequency Distribution) বলে। শ্রেণীবদ্ধ রাশিতথ্যের ক্ষেত্রে, ক্রমযেগিক পরিসংখ্যা অনুরূপ শ্রেণী সীমানার বিপরীতে লিখতে হয়। **কেবলমাত্র ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বলতে সাধারণত ‘নিচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা’-কে বোঝায়।**

নিচে কয়েকটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক দেখানো হল :

সারণি নং ২.৯

30 জন ছাত্রের নম্বরের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

নম্বর	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	
		নিচ থেকে	উপর থেকে
20	3	3	30
25	5	8	27
27	8	16	22
32	7	23	14
41	5	28	7
46	2	30	2
মোট	30	—	—

সারণি নং ২.১০

60 জন ছাত্রের ওজনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

শ্রেণী সীমানা	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	
		নিচ থেকে	উপর থেকে
29.5	0	0	60
34.5	3	3	57
39.5	5	8	52
44.5	12	20	40
49.5	18	38	22
54.5	14	52	8
59.5	6	58	2
64.5	2	60	0
মোট	60	—	—

সারণি নং ২.১১

60 জন ছাত্রের ওজনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা বিভাজন

ওজন (কেজিতে)	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	
		নিচ থেকে	উপর থেকে
30–40	3	3	60
35–39	5	8	57
40–44	12	20	52
45–49	18	38	40
50–54	14	52	22
55–59	6	58	8
60–64	2	60	2
মোট	60	—	—

5.11 প্রতিলিপির (Diagram) সাহায্যে উপস্থাপনার সুবিধা ও অসুবিধা

যদিও শ্রেণী বিন্যাস ও ছক বিন্যাস রাশিতথ্যকে বিজ্ঞানসম্মতভাবে ও সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করে তবুও অধিকাংশ মানুষের পক্ষে স্বল্প সময়ে ও অনায়াসে উহার তাৎপর্য অনুধাবন করা সম্ভব হয়না। যদিও লেখ (Graphs) বা চার্ট (Charts) বা চিত্র কেবলমাত্র স্থূল (approximate) প্রতিলিপি তুলে ধরে, তবু এর দৃষ্টি আকর্ষণী ক্ষমতা প্রচুর। সেজন্য সংবাদপত্র, বিভিন্ন পত্র-পত্রিকা, সরকারী ও বেসরকারী সংস্থাসমূহকে পরিসংখ্যানের রাশিতথ্য অনেক সময়েই লেখ ও চিত্রাদির দ্বারা প্রকাশ করতে দেখা যায়। লেখ ও চিত্রাদি ব্যবহারে নিম্নলিখিত কতকগুলি সুবিধা ও অসুবিধা আছে ঃ

সুবিধা :

(i) এই পদ্ধতি সাধারণ লোকের কাছে চিত্তাকর্ষক ও তথ্যবহুল।

(ii) জটিল কোনও সমস্যা অনেক সময় লেখ ও চিত্রাদি দ্বারা সহজবোধ্য হয়।

(iii) ইহার দ্বারা বিভিন্ন রাশিতথ্যমালার তুলনা করা খুব সহজ হয়।

(iv) মানের পরিবর্তনের হার লেখ ও চিত্রাদি থেকে সহজবোধ্য হয়।

(v) ইহা চলকের অন্তঃমান (interpolation) নির্ণয়ে সাহায্য করে।

(vi) রাশিতথ্যমালার বিশেষ কোনও প্রবণতা (trend) থাকলে বুঝতে সুবিধা হয়।

(vii) লেখ ও চিত্রাদির সাহায্যে সংগৃহীত রাশিতথ্যের মধ্যে কোনও ত্রুটি থাকলে তা দৃষ্টিগোচর হয়।

অসুবিধা :

(i) ছকের সাহায্যে প্রকাশিত রাশিতথ্যে চলকের সঠিক মান পাওয়া যায়। কিন্তু লেখ বা চিত্রাদির মাধ্যমে প্রকাশিত তথ্যে চলকের সঠিক মান পাওয়া সম্ভব নয়।

(ii) ইহার দ্বারা প্রকাশিত রাশিতথ্যে বিস্তৃত বিবরণ থাকে না।

(iii) ইহা তৈরি করতে যথেষ্ট সময় ও সাবধানতার প্রয়োজন। অন্যথায় ভুল সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়ার সম্ভাবনা থাকে।

(iv) ইহা কখনও কখনও সাধারণ মানুষকে ভুল পথে পরিচালিত করতে পারে।

5.12 বিভিন্ন ধরনের লেখচিত্র

বিভিন্ন ধরনের লেখচিত্রগুলি হল :

(i) রেখাচিত্র (Line Chart) বা লেখ (Graph)

(ii) বারচিত্র বা দণ্ডচিত্র (Bar Chart)

(iii) আনুপাতিক চিত্র বা সেমি লগারিদ্‌ম্‌ লেখচিত্র (Ratio Chart OR Semi-Logarithmic Graph)

(iv) পাই চিত্র (Pie Chart or Pie Graph)

(v) আয়তলেখ (Histogram)

(vi) পরিসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygen)

(vii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা (Ogive or Cumulative Frequency Curve)

(viii) পরিসংখ্যা দণ্ড লেখ (Column Diagram)

(ix) ধাপচিত্র (Step Diagram)

(i) রেখাচিত্র (Line Chart) বা লেখ (Graph) :

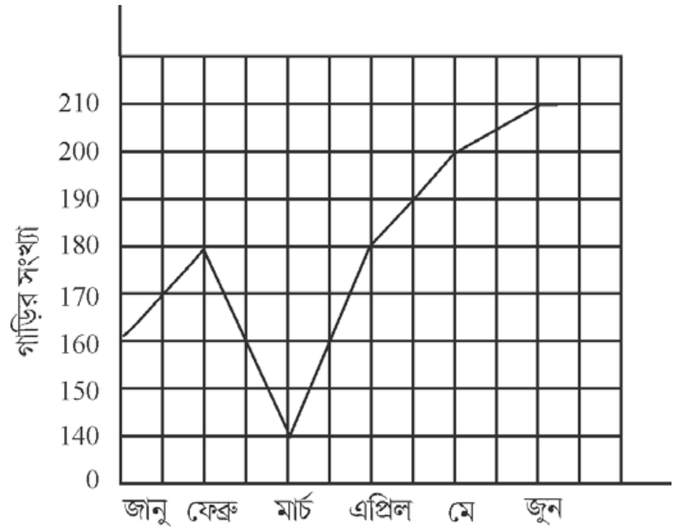
এই ধরনের লেখাচিত্রে X-অক্ষ বরাবর স্বাধীন চলকের (independent variable) এবং অধীন চলকের (dependent variable) Y-অক্ষ বরাবর বিন্দুগুলি স্থাপন করা হয়। এইভাবে যে বিন্দুগুলি লেখ-তে পাওয়া যায় সেগুলিকে পর্যায়ক্রমে (successively) সরলরেখা দ্বারা যোগ করলে যে চিত্র পাওয়া যায় তাকে রেখাচিত্র বা লেখ বলে।

কোনও কালীন সারির লেখিক প্রকাশকে হিস্টোরিগ্রাম (Historigram) বা কালীন লেখ বলে।

উদাহরণ : ১. কোন সংস্থার প্রথম ছয় মাসের মাসিক গাড়ির উৎপাদন নিচে দেওয়া হল। একটি রেখাচিত্রের সাহায্যে তথ্যগুলিকে উপস্থাপন করুন।

মাস	জানুয়ারি	ফেব্রুয়ারি	মার্চ	এপ্রিল	মে	জুন
গাড়ির সংখ্যা	160	180	140	180	200	210

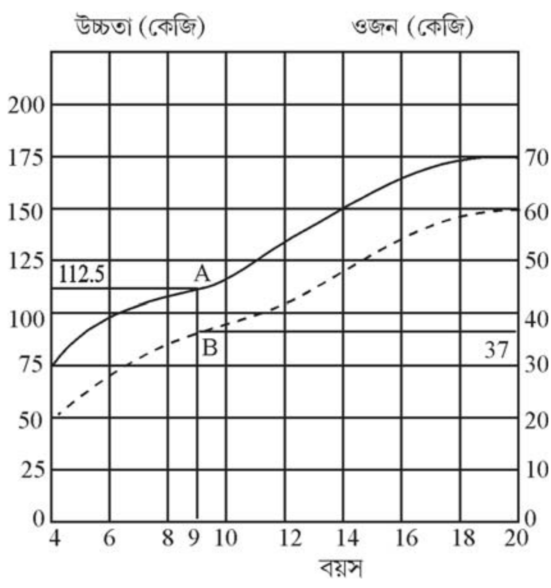
সমাধান :



উদাহরণ : ২. নিচের ছকে একজন লোকের বিভিন্ন বয়সে উচ্চতা ও ওজন দেওয়া আছে।

বয়স (বছর)	4	6	8	10	12	14	16	18	20
উচ্চতা (সেমি)	75	90	105	125	140	150	175	185	195
ওজন (কেজি)	20	25	35	40	45	55	60	65	70

দুটি রেখাচিত্র অঙ্কন কর ছকের তথ্য থেকে এবং লোকের উচ্চতা ও ওজনকে অবিচ্ছিন্ন চলক মনে করে লেখচিত্র অন্তঃমান নির্ণয় পদ্ধতিতে ঐ ব্যক্তির 9 বছর বয়সে উচ্চতা ও ওজন কত ছিল নির্ণয় করুন।



উচ্চতার রেখাচিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে যে, 9 বছর বয়সে একজনের উচ্চতা আনুমানিক 112.5 সেমি (A-চিহ্নিত স্থান) এবং ওজন 37 কেজি (B-চিহ্নিত স্থান) ছিল।

(ii) বারচিত্র বা দণ্ড চিত্র :

দণ্ডচিত্র বা বারচিত্র পরিসংখ্যান-বিষয়ক রাশিতথ্যের প্রকাশের আর একটি বহুল-ব্যবহৃত পদ্ধতি। দণ্ডচিত্র বা বারচিত্র হল কতকগুলি সমান প্রস্থের ও পরস্পর হতে সমান দূরত্বে অবস্থিত আয়তাকার বার বা দণ্ড। কোনও একটি বারের দৈর্ঘ্য উহা যে রাশিতথ্যের মানকে প্রকাশ করে, তার সঙ্গে সমানুপাকিত করে ঠিক করা হয়। বার বা দণ্ডগুলি উল্লম্বভাবে কোনও অনুভূমিক রেখার উপর অথবা অনুভূমিকভাবে কোনও উল্লম্ব রেখার উপর পরপর থাকতে পারে। প্রথমে উল্লেখিত বারচিত্রকে উল্লম্ব বারচিত্র (Vertical Bar Chart or Column Chart) এবং পরবর্তী ক্ষেত্রে বারচিত্রকে অনুভূমিক বারচিত্র (Horizontal Bar Chart) বলে। কালীন সারির ক্ষেত্রে উল্লম্ব বারচিত্র ব্যবহার করা হয়।

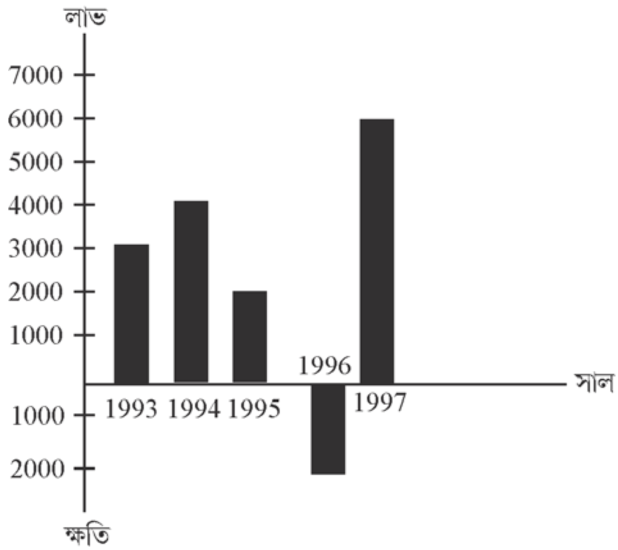
পরপর দু'টি বারের মধ্যে কতখানি ফাঁকা জায়গা থাকবে তার কোনও বাঁধা ধরা নিয়ম নেই। তবে দরকার মতো উক্ত স্থান একটি বারের প্রস্থ বা প্রস্থের অর্ধেকের সমান হতে পারে।

উল্লেখিত প্রত্যেকবার বা দণ্ডচিত্রের জন্য বহুল বারচিত্র (Multiple or Compound Bar Chart) তৈরি করা যায়। জটিল বারচিত্রে পরস্পর সম্পর্কিত দুই বা ততোধিক রাশিতথ্য উপস্থাপন করা হয়। বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্রে একটি বার বা দণ্ডকে বহু অংশে বিভক্ত করে রাশিতথ্যমালার বিভিন্ন অংশ প্রকাশ করা হয়। রাশিতথ্যের এইরূপ উপস্থাপনে তাদের পরস্পরের মধ্যে সম্পর্ক এবং সমগ্র রাশিতথ্যের সঙ্গে তাদের বিভিন্ন অংশের সম্পর্ক সুস্পষ্টভাবে প্রকাশ করা হয়। উদাহরণের সাহায্যে সমস্ত বার বা দণ্ড চিত্র দেখানো হল।

উদাহরণ ৩. একটি ব্যবসায়ী সংস্থার 1993-1997 সালের লাভ-ক্ষতি নিচে দেওয়া হল। তথ্যগুলিকে বার বা দণ্ড চিত্রে উপস্থাপন করুন।

সাল	1993	1994	1995	1996	1997
লাভ (টাকায়)	3000	4000	2500	—	6000
ক্ষতি (টাকায়)	—	—	—	2000	—

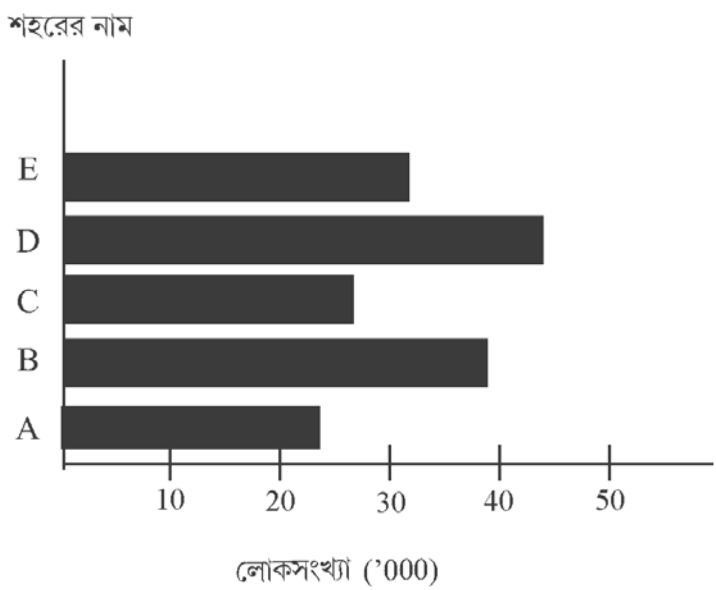
সমাধান :



উদাহরণ ৪. 5টি বিভিন্ন শহরের অধিবাসী সংখ্যা উপস্থাপন করার জন্য একটি বার বা দণ্ড চিত্র অঙ্কন করুন।

শহরের নাম	A	B	C	D	E
লোকসংখ্যা ('000)	22	40	25	42	30

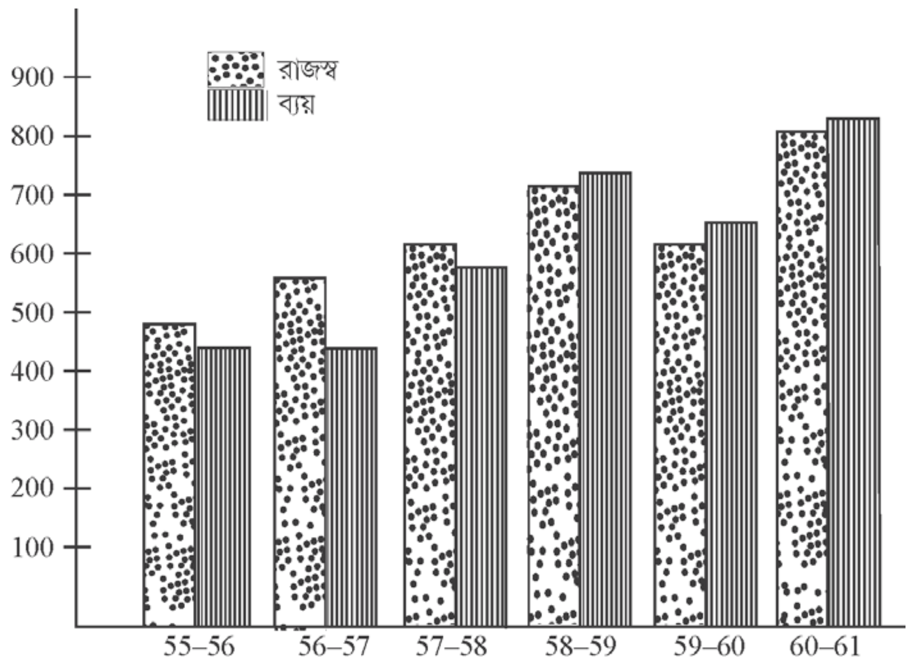
সমাধান :



উদাহরণ ৫. কেন্দ্রীয় সরকারের 1955-61 সালের রাজস্ব ও ব্যয়ের প্রবণতা নিচের ছকে দেওয়া হল। জটিল বার বা দণ্ড চিত্র অঙ্কন করুন।

সাল	1955-56	1956-57	1957-58	1958-59	1959-60	1960-61
রাজস্ব (কোটিতে)	480	560	680	740	670	820
ব্যয় (কোটিতে)	440	470	630	760	680	830

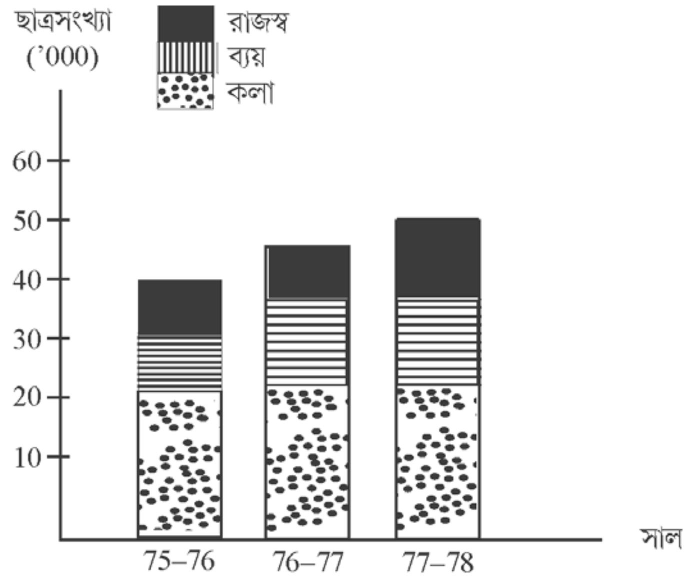
সমাধান :



উদাহরণ ৬. 1975-78 সালে কোন একটি বিশ্ববিদ্যালয়ে ছাত্রসংখ্যা নিম্নরূপ ছিল। রাশিতথ্যকে বহু অংশে বিভক্ত বার বা দণ্ড চিত্রে উপস্থাপন করুন।

সাল	কলা বিভাগ	বিজ্ঞান বিভাগ	বাণিজ্য বিভাগ	মোট
1975-76	20,000	12,000	7,000	39,000
1976-77	24,000	15,000	10,000	49,000
1977-78	25,000	18,000	15,000	58,000

সমাধান :



(iii) আনুমানিক চিত্র বা সেমি লগারিদ্‌ম্‌ লেখচিত্র :

লেখচিত্র প্রস্তুতিতে স্বাধীন চলকের মান অনুভূমিক বা X-অক্ষ বরাবর এবং অধীন চলকের মান উল্লম্ব বা Y-অক্ষ বরাবর নেওয়া হয়। এ পর্যন্ত যে সব লেখচিত্র আলোচনা করা হয়েছে তাতে অক্ষের চলক সমুহের মান স্বাভাবিক পরিমাপ মাত্রায় (Natural or Absolute Scale-এ) প্রকাশ করা হয়েছে। এইসব চিত্রে স্বাধীন চলক X-এর মানের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে অধীন চলক y-এর মানের প্রকৃত পরিবর্তন (actual change)-এর চিত্রই শুধু পাওয়া যায়। কিন্তু অধীন চলক কী হারে পরিবর্তিত হচ্ছে তা পরিমাপ করা যায় না। যে লেখ থাকে অধীন চলকের মান পরিবর্তনের হার সরাসরি নির্ণয় করা যায় তাকে সেমি লগারি্দম্ লেখচিত্র (Semi-Logarithmic Graph) বা আনুপাতিক লেখচিত্র (Ratio Chart or Graph) বলে। এই লেখচিত্র অঙ্কন করতে হলে উল্লম্ব রেখায় log y-এর মান এবং অনুভূমিক রেখায় স্বাধীন চলক x-এর স্বাভাবিক মান নেওয়া হয়। সেমি লগারিদ্‌ম্‌ লেখ-এর উল্লম্ব রেখায় সমান সমান দূরত্ব অধীন চলক y-এর মান সমান সমান শতকরা পরিবর্তনের হার নির্দেশ করে।

একটি উদাহরণ সহযোগে দেখা যাক। ধরা যাক, y-এর কয়েক জোড়া মান পরিবর্তন নিম্নরূপ :

(a) 100 থেকে 150, (b) 250 থেকে 300 এবং (c) 500 থেকে 550 ; স্বাভাবিক পরিমাপে প্রতিজোড়া সংখ্যার ক্ষেত্রে y-এর প্রকৃত মানের পরিবর্তন 50 একক। কিন্তু (a)-এর ক্ষেত্রে y-এর শতকরা 50 ভাগ, (b) এর ক্ষেত্রে y-এর শতকরা 20 ভাগ $\left(=\frac{100}{5}\right)$ এবং (c)-এর ক্ষেত্রে y-এর শতকরা 10 ভাগ $\left(=\frac{50\times100}{500}\right)$ বৃদ্ধি পেয়েছে।

আনুপাতিক চিত্র সরলরেখা হলে বুঝতে হবে y-এর পরিবর্তনের হার সর্বত্র সমান।

উদাহরণ ৭. বর্ষশেষে উৎপাদনের সংখ্যগত তথ্য নিম্নের সারণীতে দেওয়া হল। রাশিতথ্য সেমি লগারিদ্‌ম্ লেখচিত্র বা আনুপাতিক লেখচিত্র-এর সাহায্যে প্রকাশ করুন।

বছর	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955
উৎপাদিত এককের সংখ্যা	20	62	147	300	536	811	1104	1425	1755

সমাধান :

বছর	উৎপাদিত এক (y)	log y (আসন্ন দুই দশমিক ভাগ পর্যন্ত)
1947	20	1.32
1948	62	1.79
1949	147	2.17
1950	300	2.48
1951	536	2.73
1952	811	2.91
1953	1104	3.04
1954	1525	3.15
1955	1755	3.24

অন্যথায় সেমি লগারিদ্‌ম্ লেখ-কাগজ ব্যবহার করা যায়। এই লেখ কাগজে y-অক্ষ এমন যে, দুটি বিন্দু দূরত্ব তাদের লগারিদ্‌মের পার্থক্যের সমান। অর্থাৎ 1 এবং 10-এর দূরত্ব, 10 এবং 100-র দূরত্ব বা 100 থেকে 1000-এর দূরত্ব সমান কারণ তাদের লগারিদ্‌মের পার্থক্য সমান।

(iv) পাইচিত্র :

পাইচিত্রের সাহায্যে পরিসংখ্যান বিষয়ক রাশিতথ্য প্রকাশের বহুল প্রচলন আছে। বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্রের মতো রাশিতথ্যের বিভিন্ন অংশের মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক এবং পূর্ণতথ্যের সঙ্গে বিভিন্ন অংশের পারস্পরিক সম্পর্ক সুন্দরভাবে প্রকাশের ক্ষেত্রে পাইচিত্রের ব্যবহার খুবই উপযোগী।

চিত্র তৈরির জন্য একটি যে কোনও ব্যাসার্ধের বৃত্তকে কয়েকটি অংশে ভাগ করা হয় যাদের ক্ষেত্রফল প্রদত্ত মানগুলির সমানুপাতিক হয়। আবার যেহেতু বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল কেন্দ্রস্থ কোণের সমানুপাতিক, এক কথায় বলা যায় যে, পাইচিত্র হল একটি বৃত্ত যাকে কয়েকটি ব্যাসার্ধের দ্বারা এমনভাবে কয়েকটি বৃত্তাংশে ভাগ করা হয় যাতে বৃত্তাংশগুলির কেন্দ্রস্থ কোণগুলি পূর্ণ রাশিতথ্যের বিভিন্ন অংশ তথ্য সমূহের সমানুপাতিক হয়।

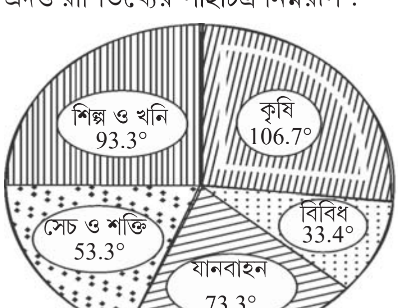
উদাহরণ ৮. নিচে কোনও সরকারের একটি পঞ্চবার্ষিকী পরিকল্পনায় বিভিন্ন খাতের আনুমানিক ব্যয় দেখানো হয়েছে। উহাদের পাইচিত্র-এর সাহায্যে প্রকাশ করুন :

বিষয়	টাকা (কোটিতে)
কৃষি	8000
শিল্প ও খনি	7000
সেচ ও শক্তি	4000
যানবাহন	5500
বিবিধ	2500

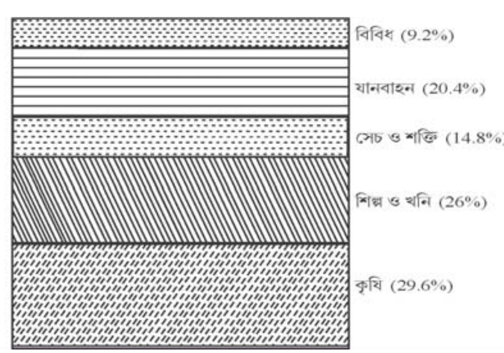
সমাধান : পঞ্চবার্ষিকী পরিকল্পনায় মোট ব্যয় = 27000 কোটি টাকা। নিচে বিভিন্ন খাতের ব্যয়কে মোট ব্যয়ের শতকরা প্রকাশ করে অনুরূপ কেন্দ্রস্থ কোণগুলি নির্ণয় করা হল :

বিষয়	শতকরা হিসাব	কেন্দ্রস্থ কোণ
কৃষি	$\frac{8000}{27000}\times 100\% = 29.6\%$	$\frac{8000}{2700}\times 360^\circ = 106.7^\circ$ (প্রায়)
শিল্প ও খনি	$\frac{7000}{27000}\times 100\% = 26.0\%$	$\frac{7000}{27000}\times 360^\circ = 93.3^\circ$ (প্রায়)
সেচ ও শক্তি	$\frac{4000}{27000}\times 100\% = 14.8\%$	$\frac{4000}{27000}\times 360^\circ = 53.3^\circ$ (প্রায়)
যানবাহন	$\frac{5500}{27000}\times 100\% = 20.4\%$	$\frac{5500}{27000}\times 360^\circ = 73.3^\circ$ (প্রায়)
বিবিধ	$\frac{2500}{27000}\times 100\% = 9.2\%$	$\frac{2500}{27000}\times 360^\circ = 33.4^\circ$ (প্রায়)
মোট	100%	360°

সুবিধামতো ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত অঙ্কন করে উহার কেন্দ্রের পরপর 106.7°, 93.3° ইত্যাদি কোণ অঙ্কন করে প্রদত্ত রাশিতথ্যের পাইচিত্র নিম্নরূপ :



পাইচিত্র



(v) আয়তলেখ : পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক প্রকাশের জন্য ইহা ব্যবহৃত হয়। শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের রাশিতথ্য অধিকাংশ ক্ষেত্রে আয়তলেখের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়। আয়তলেখ একটি সরলরেখার উপর এমন ককতগুলি আয়তক্ষেত্র যাদের প্রতিটির ক্ষেত্রফল অনুরূপ শ্রেণী পরিসংখ্যার সঙ্গে সমানুপাতিক।

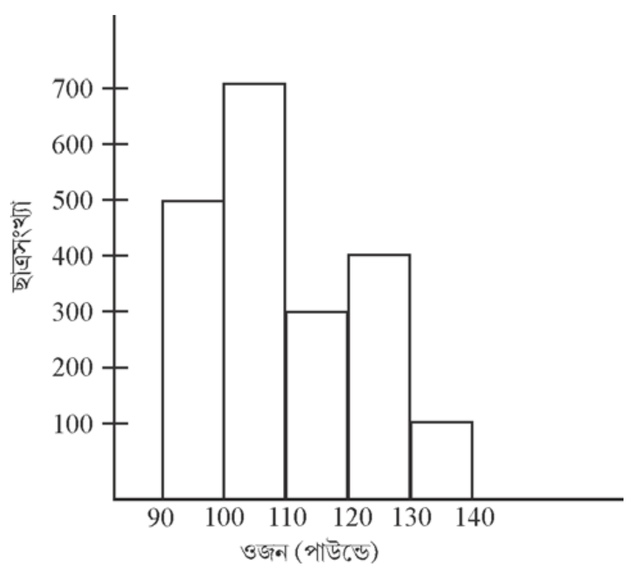
আয়তলেখ অঙ্কন করতে হলে পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের শ্রেণীবিভাগগুলির শ্রেণী সীমানাগুলি (Class boundaries) অনুভূমিক রেখায় (X-অক্ষে) শ্রেণী বিভাগের দৈর্ঘ্যের সমানুপাতিক অংশ পর পর স্থাপন করা হয়। প্রত্যেকটি অংশের উপর নির্দিষ্ট শ্রেণী বিভাগের পরিসংখ্যার সঙ্গে সমানুপাতিক করে আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করতে হয়। **এর ফলে উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অনুরূপ শ্রেণী বিভাগগুলির পরিসংখ্যাকে এবং আয়তক্ষেত্রগুলির মোট ক্ষেত্রফল মোট পরিসংখ্যাকে প্রকাশ করে।**

যদি পরিসংখ্যা বিভাজনে প্রতিটি শ্রেণী দৈর্ঘ্য সমান হয়, তবে আয়তক্ষেত্রগুলির উচ্চতাগুলি অনুরূপ শ্রেণী পরিসংখ্যার সঙ্গে সমানুপাতিক করে নেওয়া হয়। যদি **শ্রেণী প্রসারগুলির দৈর্ঘ্য অসমান হয়, তবে বিভিন্ন আয়তক্ষেত্রের উচ্চতা নিম্নলিখিতভাবে স্থির করা হয় :**

উচ্চতা = শ্রেণী পরিসংখ্যা ÷ শ্রেণী প্রসারের দৈর্ঘ্য = পরিসংখ্যা ঘনত্ব।

উদাহরণ ৯. 2000 জন ছাত্রের ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন নিচে দেওয়া আছে। একটি আয়তলেখ-এর সাহায্যে প্রকাশ করুন।

ওজন (পাউন্ডে)	90-100	100-110	110-120	120-130	130-140
ছাত্রসংখ্যা	500	700	300	400	100



(vi) পরিসংখ্যা বহুভুজ : পরিসংখ্যা বিভাজনের লৈখিক প্রকাশ ইহার সাহায্যেও করা হয়। বেশির ভাগ সময় ইহা সমান শ্রেণীপ্রসারভুক্ত বিভাজনের ক্ষেত্রে করা হয়। এই পদ্ধতিতে প্রত্যেক শ্রেণীর পরিসংখ্যা অনুরূপ শ্রেণীর মধ্যবিন্দুর বিরুদ্ধে সংস্থাপন করা হয়। যে বিন্দুগুলি পাওয়া যায় সেগুলি পরপর সরলরেখা দিয়ে যুক্ত করা হয়। প্রথম

ও শেষ বিন্দু দুটি দু'প্রান্তে কল্পিত পরিসংখ্যাহীন শ্রেণীর মধ্যবিন্দু ধরে বহুভূজসম্পন্ন করা হয়।

আয়তলেখ থেকে পরিসংখ্যা বহুভুজ পেতে হলে, আয়তক্ষেত্রগুলির উপরের অংশের মধ্যবিন্দুগুলি যোগ করে এবং পূর্বে বর্ণিত উপায়ে প্রান্তদ্বয় সম্পূর্ণ করা হয়।

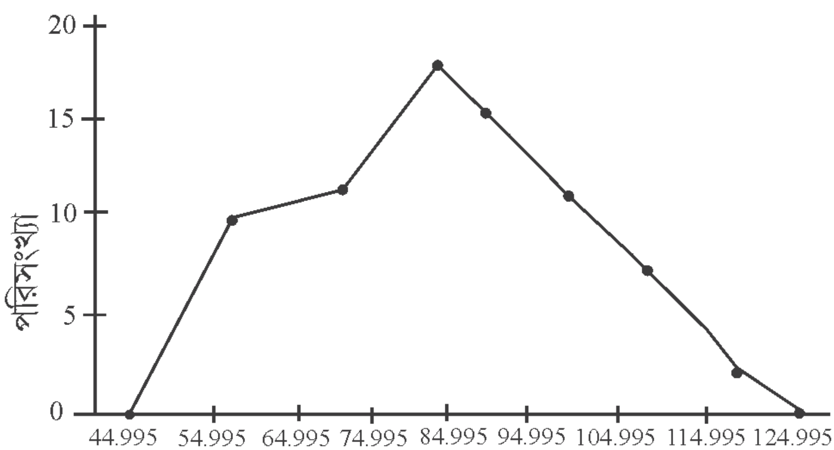
যদি পরিসংখ্যা বিভাজনে শ্রেণীপ্রসার ক্রমশ ছোট করা হয়, তবে শ্রেণীর সংখ্যা বাড়বে। ফলে বহুভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি খুব কাছাকাছি আসবে এবং সেক্ষেত্রে বিন্দুগুলির মধ্য দিয়ে সন্তত রেখা টানলে (smooth free hand curve) যে রেখা পাওয়া যায় তাকে পরিসংখ্যা রেখা (Frequency curve) বলে।

উদাহরণ ১০. নিচের ছকে কর্মীদের মাসিক আয় দেওয়া আছে। উহা পরিসংখ্যা বহুভুজের সাহায্যে প্রকাশ করুন।

মাসিক আয় (টাকায়)	কর্মী সংখ্যা
50.00–59.99	8
60.00–69.99	10
70.00–79.99	16
80.00–89.99	14
90.00–99.99	10
100.00–109.99	5
110.00–119.99	2

সমাধান : পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কনের জন্য গণনা কার্য :

মধ্যবিন্দু	54.995	64.995	74.995	84.995	94.995	104.995	114.995
পরিসংখ্যা	8	10	18	14	10	5	2



(vii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যারেখা : ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলির লৈখিক প্রকাশ ইহার সাহায্যে করা হয়। এই পদ্ধতিতে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাগুলি শ্রেণী সীমানাগুলির বিরুদ্ধে উপস্থাপন করে যে বিন্দুগুলি পাওয়া যায় সেগুলি

পরপর সরলরেখা দ্বারা যোগ করা হয়। ইহা দু'ধরনের—(a) নিচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা'-র জন্য এবং (b) উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা'-এর জন্য। নিচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা দেখতে বর্ধিত S-এর মতো এবং উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা উপর দিক নিচে উল্টানো বর্ধিত S-এর দেখতে। ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখার দ্বারা মধ্যমা, চতুর্থক প্রভৃতি নির্ণয় করা যায়।

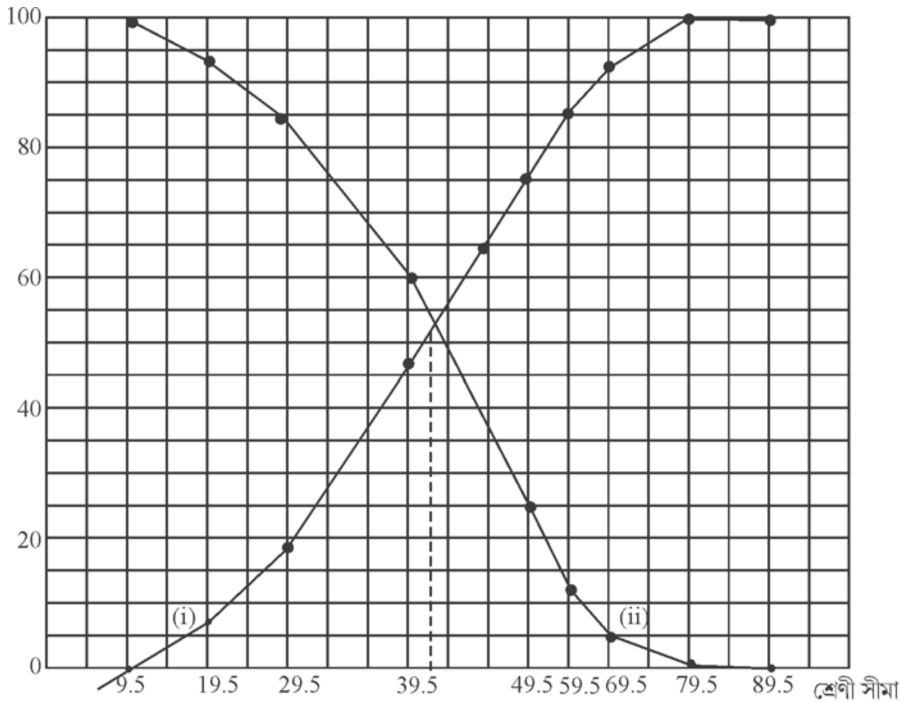
উদাহরণ ১১. নিম্নলিখিত রাশিতথ্য ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখার সাহায্যে প্রকাশ করুন (a) নিচ থেকে, (b) উপর থেকে :

100 জন ছাত্রের গণিতে প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন

নম্বরের শ্রেণী বিভাগ	ছাত্রসংখ্যা
10–19	8
20–39	14
30–39	22
40–49	29
50–59	14
60–69	7
70–79	4
80–89	2
মোট	100

সমাধান : ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখার জন্য গণনা কার্য :

নম্বরের শ্রেণীবিভাগ	শ্রেণী সীমানা	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	
			নিচ থেকে	উপর থেকে
10–19	9.5–19.5	8	8	100
20–29	19.5–29.5	14	22	92
30–39	29.5–39.5	22	44	78
40–49	39.5–49.5	29	73	56
50–59	49.5–59.5	14	87	27
60–69	59.5–69.5	7	94	13
70–79	69.5–79.5	4	98	6
80–89	79.5–89.5	2	100	2

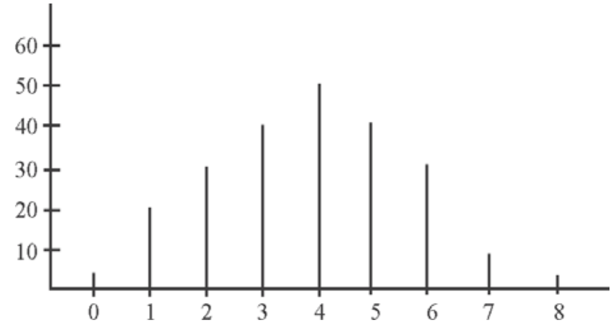


(viii) পরিসংখ্যা দণ্ড লেখ (Column diagram) : বিচ্ছিন্ন চলকের বিভিন্ন মানের জন্য যে পরিসংখ্যা বিভাজন তার উপস্থাপন ইহার দ্বারা করা হয়। খুব কম প্রসার (সূক্ষ্মরেখা)-এর বিচ্ছিন্ন উল্লম্ব দণ্ড বা বার বিভিন্ন মানের উপর দাঁড় করিয়ে ইহা আঁকা হয়, সেখানে দণ্ডগুলির উচ্চতা পরিসংখ্যার সমানুপাতিক হয়।

উদাহরণ ১২. প্রতি এক মিনিটে আগত দূরভাস সংখ্যা নিচের ছকে দেখানো হয়েছে। ইহা লেখ-এর সাহায্যে প্রকাশ করুন।

দূরভাষ সংখ্যা	0	1	2	3	4	5	6	7	8
পরিসংখ্যা	5	22	31	43	51	40	35	15	3

সমাধান :



(ix) ধাপচিত্র (Step diagram) : বিচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাকে চিত্রায়িত করার জন্য ইহা ব্যবহৃত হয়।

নিচ থেকে ক্রমযৌগিক চিত্রটি দেখতে বাম থেকে ডানে ওঠা সিঁড়ির মতো, যার প্রথম ধাপের উচ্চতা প্রথম নিচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা, দ্বিতীয় ধাপ দ্বিতীয় নিচ থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ইত্যাদির সমানুপাতিক।

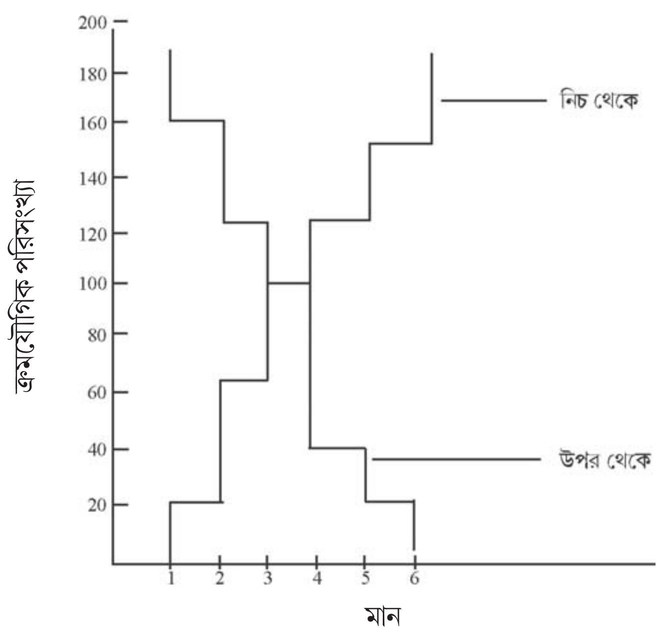
উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা চিত্রটি দেখতে ডান থেকে বামে উঠা সিঁড়ির মতো, যার প্রথম ধাপের উচ্চতা প্রথম উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা, দ্বিতীয় উপর থেকে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ইত্যাদির সমানুপাতিক।

উদাহরণ : ১৩. নিম্নের বিভাজন ছকের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা চিত্র (উভয় প্রকার) অঙ্কন করুন :

মান (Grade)	1	2	3	4	5	6
ছাত্রসংখ্যা	20	34	40	52	26	16

সমাধান : ধাপচিত্রের জন্য গণনা কার্য :

মান	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	
		নিচ থেকে	উপর থেকে
1	20	20	188
2	34	54	168
3	40	94	134
4	52	146	94
5	26	172	42
6	16	188	16



5.13 অনুশীলনী

(১) উদাহরণ সহ প্রাথমিক ও অপ্রাথমিক রাশিতথ্যের সংজ্ঞা দিন।

(২) অপ্রাথমিক রাশিতথ্যের দুটি উৎস লিখুন।

(৩) প্রাথমিক রাশিতথ্য সংগ্রহের বিভিন্ন পদ্ধতির বর্ণনা দাও এবং এদের সুবিধাগুলি আলোচনা করুন।

(৪) রাশিবিজ্ঞানের রাশিতথ্যমালা সাধারণত দুই প্রকারের—(i) প্রাথমিক, (ii) অপ্রাথমিক—উক্তিটি ব্যাখ্যা করুন।

(৫) প্রাথমিক রাশিতথ্য ও অপ্রাথমিক রাশিতথ্যের মধ্যে পার্থক্য বলুন।

(৬) লঘুহস্তে রাশিতথ্যের বিশ্লেষণের ফল কী হতে পারে?

(৭) ব্যবসায়িক সিদ্ধান্তে রাশিবিজ্ঞানের গুরুত্ব ও সুযোগ সম্পর্কে আলোচনা করুন।

(৮) রাশিবিজ্ঞানের সীমাবদ্ধতা আলোচনা করুন।

(৯) বিচ্ছিন্ন অবিচ্ছিন্ন চলকের একটি করে উদাহরণ দিন।

(১০) শ্রেণী সীমা ও শ্রেণী সীমানার পার্থক্য কী?

(১১) পরিসংখ্যা ঘনত্ব কোন্ ক্ষেত্রে অত্যাবশ্যক?

(১২) উৎস সারণীর কোন্ অংশে থাকে?

(১৩) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা কত প্রকার ও কী কী?

(১৪) সেমি লগারিদ্‌ম লেখচিত্র কোন্ বিশেষ ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা হয়?

(১৫) নিম্নোক্ত লেখচিত্রগুলি প্রয়োগের একটি করে উদাহরণ দিন।

(ক) উলম্ব ও অনুভূতির বারচিত্র।

(খ) জটিল ও বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্র।

(গ) পাইচিত্র ও বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্র।

(ঘ) দণ্ডলেখ ও আয়তলেখ।

(ঙ) ধাপচিত্র ও ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা।

(১৬) পরিসংখ্যা রেখার/বহুভূজের অন্তর্গত আয়তনের মোট ক্ষেত্রফল কত?

(১৭) পরিসংখ্যান বলতে কী বোঝ? পরিসংখ্যান শব্দটি কোন্ দু'টি অর্থে ব্যবহৃত হয়?

(১৮) একটি পরিসংখ্যান ছকের বিভিন্ন অংশগুলি বর্ণনা করুন।

(১৯) (i) সরল পরিসংখ্যান ছকের বিভাজন ও (ii) শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন কাকে বলে বর্ণনা কর ও প্রত্যেকটির একটি করে উদাহরণ দিন।

(২০) একটি বিশ্ববিদ্যালয়ে কোনও বছর কলা, বিজ্ঞান ও বাণিজ্য শাখায় প্রথম বর্ষ, দ্বিতীয় বর্ষ ও তৃতীয় বর্ষের পরীক্ষায় অংশগ্রহণকারী পরীক্ষার্থীদের সংখ্যা লিঙ্গভেদে প্রদর্শনের জন্য একটি খালি ছক (bank table) তৈরি করুন।

(২১) লেখচিত্রের সাহায্যে রাশিতথ্যের উপস্থাপন বলতে কী বোঝায়? উহার সুবিধা ও অসুবিধা আলোচনা করুন।

(২২) বার বা দণ্ড চিত্র, পাইচিত্র ও আয়তলেখ বলতে কী বোঝায়? ব্যবসাক্ষেত্রে এদের ব্যবহার উদাহরণ সহকারে বোঝান।

(২৩) পার্থক্য ব্যাখ্যা করুন :

(i) বারচিত্রও আনুপাতিক চিত্র (Bar Chart and Ratio Chart)

(ii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা ও ধাপচিত্র (Ogive and Step Diagram)

(iii) আয়তলেখ ও কালীনলেখ (Histogram and Historigram)

(২৪) ভারতে মাসিক সাইকেল উৎপাদন নিচে দেওয়া হল :

জানুয়ারী	—	5720	ফেব্রুয়ারী	—	4900	মার্চ	—	6110
এপ্রিল	—	5930	মে	—	6040	জুন	—	4610
জুলাই	—	3060	আগস্ট	—	4700	সেপ্টেম্বর	—	5605
অক্টোবর	—	3275	নভেম্বর	—	6850	ডিসেম্বর	—	6130

উপরের তথ্য উপস্থাপন কর (a) রেখচিত্র (Line Chart) এবং (b) বারচিত্র (Bar Chart)-এর সাহায্যে।

(২৫) বহুল বারচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রাশিতথ্য প্রকাশ কর :

বছর	1975	1976	1977	1978	1979
কারখানা A-তে উৎপাদন	300	326	180	275	320
কারখানা B-তে উৎপাদন	260	310	250	250	270

(২৬) নিম্নলিখিত দু'মাসের খরচের রাশিতথ্যকে বহু অংশে বিভক্ত বারচিত্রে ও পাইচিত্রে প্রকাশ করুন :

	জানুয়ারি	**ফেব্রুয়ারি**
কাঁচামালা	700	600
শ্রমিক	800	700
উৎপাদন	100	70
বিবিধ	200	300
মোট	1800	1670

(২৭) নিম্নলিখিত তথ্য একটি বারচিত্রে প্রকাশ কর :

শহর	A	B	C	D	E
জনসংখ্যা (হাজারে)	20.2	17.1	13.8	12.0	18.8

(২৮) নিম্নলিখিত তথ্য (i) আয়তলেখ, (ii) পরিসংখ্যা বহুভুজ ও (iii) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা দিয়ে প্রকাশ করুন :

শ্রমিকদের দৈনিক আয়

দৈনিক আয় (টাকায়)	শ্রমিক সংখ্যা
30–32	4
33–35	7
36–38	16
39–41	31
42–44	60
45–47	11
48–50	1

(২১) নিম্নলিখিত তথ্যকে (i) পরিসংখ্যা বারচিত্র ও (iii) ধাপচিত্র-এর সাহায্যে প্রকাশ করুন :

দৈনিক যান দুর্ঘটনা সংখ্যা	দিনসংখ্যা
2	4
3	7
4	13
5	3
6	2
7	1
মোট	30

একক 6 ❑ কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ (Measure of Central Tendency)

গঠন

6.0 উদ্দেশ্য

6.1 প্রস্তাবনা

6.2 কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপকের প্রকারভেদ

6.3 যৌগিক গড়

6.3.1 যৌগিক গড়ের সংজ্ঞা

6.3.2 যৌগিক গড়ের গুরুত্বপূর্ণ ধর্মসমূহ

6.3.3 সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয়

6.3.4 শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের যৌগিক গড় নির্ণয়

6.4 গুণোত্তর গড়ের সংজ্ঞা

6.5 বিবর্ত যৌগিক গড়ের সংজ্ঞা

6.5.1 বিভিন্ন প্রকার গড়ের পারস্পরিক সম্পর্ক

6.6 মধ্যমা

6.7 সংখ্যাগুরু মান বা ভূয়িষ্ঠক

6.7.1 যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের তুলনা

6.8 চতুর্থক, দশমক ও শততমক (Quartiles, Deciles and Percentiles)

6.9 অনুশীলনী

6.0 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়বার পর আপনি জানতে পারবেন—

- কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপকের প্রকারভেদ কী কী
- যৌগিক গড় ও তার ধর্মসমূহ কী কী
- গুণোত্তর গড় কাকে বলে এবং বিভিন্ন প্রকার গড়ের পারস্পরিক সম্পর্ক কীরকম
- মধ্যমা ও সংখ্যাগুরুমান কাকে বলে?

6.1 প্রস্তাবনা

পরিসংখ্যান বিষয়ক যে কোনও তথ্যানুসন্ধানে বিস্তৃত ও ব্যাপক রাশিতথ্যমালার শ্রেণীবিন্যাস, ছেদবিন্যাস বা পরিসংখ্যা বিভাজনের সাহায্যে সংক্ষিপ্তকরণ করা যায়। রাশিতথ্যমালার প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্যসমূহ বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে উল্লিখিত সংক্ষিপ্ত করণ যথেষ্ট নয়। যেমন, এক লক্ষ ভারতীয়'র আয়ের পরিসংখ্যা বিভাজন থেকে ভারতীয়দের আয় সম্পর্কে কোনও ধারণা করা যায় না। কিন্তু কেবলমাত্র একটি মান, গড় আয়, সমস্ত সমগ্রক (Population)-এর প্রতিভূ (representative) হিসাবে কাজ করে যা সহজবোধ্য ও মনে রাখা যায়। সুতরাং, প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্য সমূহের যথার্থ বিশ্লেষণের জন্য উহাদের সংখ্যার মাধ্যমে সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করা প্রয়োজন বা অন্য কথায় বলা যায়, বৈশিষ্ট্যসমূহের সংখ্যাগত পরিমাপ (Quantitative measure) জানা প্রয়োজন। এরকম পরিমাপ রাশিতথ্যমালার অন্তর্নিহিত তাৎপর্য অনুধাবনে অথবা বিভিন্ন রকম তুলনামূলক সিদ্ধান্ত গ্রহণে সাহায্য করে।

অধিকাংশ পরিসংখ্যা বিভাজন ছক পর্যবেক্ষণ করে দেখা যায় যে, উহার কেন্দ্রীয় মানসমূহের পরিসংখ্যা সাধারণত প্রান্তীয় মানবসমূহের পরিসংখ্যার চেয়ে বেশি হয়। তাহলে একথা বলা যায় যে, কোনও পরিসংখ্যা বিভাজনে রাশিতথ্যমালার মানসমূহ একটি কেন্দ্রীয় মানের চতুর্দিকে বিস্তৃত থাকে, —এটা পরিসংখ্যা বিভাজনের একটি বৈশিষ্ট্য। যে কেন্দ্রীয় মানের চতুর্দিকে রাশিতথ্যমালার মানসমূহ বিস্তৃত থাকে, তাহার সংখ্যাগত পরিমাপকে রাশিবিজ্ঞানে কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ (Measure of Centre Tendency) বলে। এই জাতীয় একটি বৈশিষ্ট্যের পরিমাপক সংখ্যাকে পরিসংখ্যান গড় (Statistical Average) বা শুধু গড় (Average) বলা হয়।

6.2 কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপকের প্রকারভেদ

যে কোনও পরিসংখ্যা বিভাজন সারণীতে রাশিতথ্যমালার মানসমূহ যে কেন্দ্রীয় মানের চতুর্দিকে বিস্তৃত থাকে তার সংখ্যাগত পরিমাপকে (Quantitative Measure-কে) রাশিবিজ্ঞানে গড় বলা হয়। তাই এক কথায়, গড় হল একটি একক সংখ্যা যা একজাতীয় কতকগুলি সংখ্যার প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্যকে প্রকাশ করে। এই হিসাবে গড়কে ঐ সংখ্যাশ্রেণীর প্রতিভূ বলে মনে করা হয়।

কেন্দ্রীয় প্রবণতার একটি ভাল পরিমাপককে নিম্নলিখিত গুণাবলী বিশিষ্ট হতে হবে :

(i) এটি সহজসাধ্য হবে।

(ii) এটি সহজে মাপা যাবে।

(iii) এর মান নিরূপণে রাশিতথ্যমালার প্রত্যেকটি মান ব্যবহৃত হবে।

(iv) এর মাপন দ্ব্যর্থহীন হবে।

(v) অতিরিক্ত বীজগাণিতিক গণনা কার্যে এর ব্যবহার খুব সুবিধাজনক হবে।

(vi) এটি প্রান্তীয় মানসমূহের দ্বারা অযথা প্রভাবিত হবে না।

প্রকারভেদে কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপক তিন প্রকার :

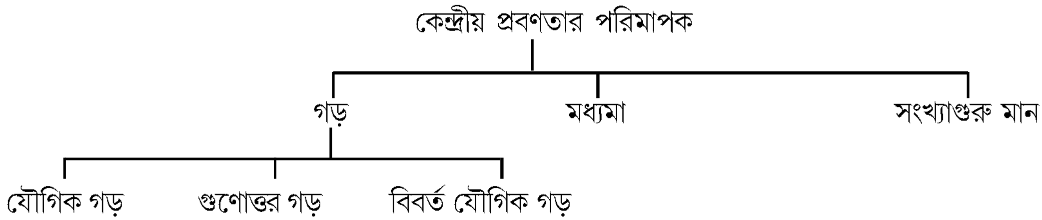
(ক) গড় (Mean), (খ) মধ্যমা (Median), এবং (গ) **সংখ্যাগুরু মান বা ভূয়িষ্ঠক** (Mode)

গড় আবার তিন প্রকার :

(i) যৌগিক গড় (Arithmetic Mean or A.M)

(ii) গুণোত্তর গড় (Geometric Mean or G.M)

(iii) বিবর্ত যৌগিক গড় (Harmonic Mean or H.M)



6.3 যৌগিক গড়

তিনপ্রকার মধ্যকের মধ্যে যৌগিক গড়ের ব্যবহার সর্বাধিক। সাধারণভাবে মধ্যক বলতে যৌগিক গড়কে বোঝায়। পরিসংখ্যান শাস্ত্রে এর গুরুত্ব অপরিসীম।

6.3.1 যৌগিক গড়ের সংজ্ঞা (Definition of A. M)

সমজাতীয় কতকগুলি রাশির যৌগিক গড় রাশিগুলির কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপক একটি সংখ্যা এবং এর মান রাশিগুলির সমষ্টিকে রাশিগুলির মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্তফলের সমান।

যদি n-সংখ্যক সমজাতীয় রাশি x_1, x_2, ... x_n-এর যৌগিক গড় $\overline{X}$ হয়, তবে

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n} = \frac{\sum x}{n} \quad \ldots..(1)$$

উদাহরণ : ১. 10 জন শ্রমিকের মাসিক আয় যথাক্রমে 2500 টাকা, 2700 টাকা, 2400 টাকা, 2300 টাকা, 2550 টাকা, 2650 টাকা, 2750 টাকা, 2450 টাকা, 2600 টাকা, 2400 টাকা। উহাদের গড় মাসিক আয় কত?

সমাধান : মোট আয় = (2500 + 2700 + 2400 + 23000 + 2550 + 2650 + 2750 + 2450 + 2600+ 2400) টাকা

= 25300 টাকা।

রাশির সংখ্যা = 10

$\therefore$ নির্ণেয় গড় মাসিক আয় = $\frac{25300}{10}$ = 2530 টাকা।

উপরোক্ত সূত্র বা উদাহরণে যে যৌগিক গড়ের কথা বলা হয়েছে, তাকে সরল যৌগিক গড় (Simple A.M.) বলে। যদি চলরাশি (x)-এর মানসমূহ গুরুত্বের দিক দিয়ে ভিন্ন হয়, তবে মানসমূহের আপেক্ষিক গুরুত্ব (relative Importanec) সাধারণত পরিসংখ্যা দ্বারা নির্ণয় করা হয়।

মনে কর, চলরাশি x-এর n সংখ্যার মান x_1, x_2, ... x_n-এর পরিসংখ্যা যথাক্রমে f_1, f_2....... f_n এবং চলকে যৌগিক গড় $\overline{X}$ হইলে,

$$\overline{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n} = \frac{\sum fx}{\sum f} \qquad ... (2)$$

এইরূপ গড়কে x_1, x_2, ... , x_n মানবসমূহের ভারযুক্ত যৌগিক গড় (Weighted A.M.) বলে।

যদি চলকের মানসমূহের পরিসংখ্যাগুলি পরস্পর সমান হয়, তবে ভারযুক্ত যৌগিক গড়ের মান সরল যৌগিক গড়ের মানের সঙ্গে সমান থাকে।

উদাহরণ ২. নিম্নলিখিত ছক থেকে গড় দূরভাষা বার্তা (Telephone Call)-এর সংখ্যা নির্ণয় করুন।

দূরভাষ বার্তা সংখ্যা (x)	**পরিসংখ্যা** (f)
0	4
1	10
2	13
3	21
4	23
5	21
6	17
7	10
8	1
মোট	120

সমাধান : গড় দূরভাষ বার্তা সংখ্যা $\overline{x}$ হলে,

$$\overline{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{0\times4+1\times10+2\times13+3\times21+4\times23+5\times21+6\times17+7\times10+8\times1}{120}$$

$$= \frac{476}{120} = 3.967$$

6.3.2 যৌগিক গড়ের গুরুত্বপূর্ণ ধর্মসমূহ (Important properties of A. M)

(1) কোন চলকের উহাদের যৌগিক গড় হইতে পার্থক্যের বীজগাণিতিক (Algebraic) সমষ্টির মান শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) = 0$ বা,

$\sum f_i\left(x_i - \bar{x}\right) = 0$

প্রমাণ : (i) সরল যৌগিক গড়ের ক্ষেত্রে :

মনে কর, x_1, x_2,............, x_n এই সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় $\bar{x}$ ।

$$\therefore \ \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_2}{n}$$

বা, x_1, x_2 + ..., x_n = nx

এখন, $\sum\left(x_i - \bar{x}\right) = \left(x_1 - \bar{x}\right) + \left(x_2 - \bar{x}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(x_n - \bar{x}\right)$

$= \ \sum\left(x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n\right) - n\bar{x}$

$= n\bar{x} - n\bar{x}$

$= \ 0$

ভারযুক্ত যৌগিক গড়ের ক্ষেত্রে :

মনে কর x_1, x_2, ...x_k রাশিগুলির ভার বা পরিসংখ্যা যথাক্রমে f_1, f_2,.......... f_k এবং উহাদের যৌগিক গড় $\bar{x}$:

$$\therefore \ \bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + f_k}$$

বা, $n\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_kx_k$ [$n = f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_k$ ধরি]

এখন, $\sum f_i\left(x_i - \bar{x}\right) = f_1\left(x_1 - \bar{x}\right) + f_2(x_2 - \bar{x}) + \ldots\ldots\ldots f_k\left(x_k - \bar{x}\right)$

$= \ (f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots\ldots + f_kx_k) - \bar{x}(f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_k)$

$= \ n\bar{x} - n\bar{x}$

$= \ 0$

(2) যদি কোনও চলকের সমস্ত মানসমূহ সমান হয়, তবে উহাদের গড় ঐ মানের সঙ্গে সমান হবে।

প্রমাণ : সরল যৌগিক গড়ের ক্ষেত্রে : ধরা যাক চলক x-এর সমস্ত মান সমান ও উহা a

তাহলে $\sum_{i=1}^{n} x_i = na$ এবং $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{na}{n} = a$

(3) যদি y = a + bx, x -এর একটি সরলরৈখিক অপেক্ষক, তবে চলকদ্বয় y ও x-এর যৌগিক গড়ের মধ্যে একটি সম্পর্ক বর্তমান থাকবে।

প্রমাণ : (i) y = a + bx

চলক x-এর মান x_i-এর জন্য চলক y-এর মান $y_i = a + bx_i$ হবে, i = 1, 2..........., n

এখন, $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i)}{n} = \frac{a\sum_{i=1}^{n} f_i + b\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n}$

$= a + b\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{n}$ [যেহেতু $n = \sum_{i=1}^{n} f_i$]

$= a + b\bar{x}$

(4) যদি $x_1, x_2, ..., x_{n_1}$ এই n_1 সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় $\bar{x}$ $y_1, y_2 .... y_{n_2}$ এই n_2 সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় $\bar{y}$ হয়, তবে $x_1, x_2, ... , x_{n_1}, y_1, y_2 .... y_{n_2}$ এই $(n_1 + n_2)$ সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় হবে $\frac{n_1\bar{x} + n_2\bar{y}}{n_1 + n_2}$

প্রমাণ : ধরা যাক $x_1, x_2, ... x_{n_1}, y_1, y_2, ... y_{n_2}$ এই $(n_1 + n_2)$ সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় Z.

$\therefore Z = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n_1} + y_1 + y_2 + ...y_{n_2}}{n_1 + n_2}$

$= \frac{\sum x_i + \sum y_i}{n_1 + n_2}$

প্রশ্নানুযায়ী, $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n_1}$ বা, $\sum x_i = n_1\bar{x}$

এবং $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n_2}$ বা $\sum y_i = n_2\bar{y}$

$$\therefore z = \frac{\sum x_i + \sum y_i}{n_1 + n_2} = \frac{n_1\bar{x} + n_2\bar{y}}{n_1 + n_2}$$

[অনুরূপভাবে ইহা ভারযুক্ত গড়ের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য]

সাধারণভাবে, যদি চলক x-এর t সেট মান থাকে এবং মানগুলির সংখ্যা n_1, n_2 ....n_t এবং যৌগিক গড় যথাক্রমে $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ...\bar{x}_t$ হয়, তবে একই সঙ্গে সমস্ত মানের যৌগিক গড় হবে,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{t} n_i\bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{t} n_i}$$

(5) যদি দুটি চলক x ও y এর প্রত্যেকের n-টি করে মান থাকে এবং একটি নতুন চালক z = ax + by তৈরি করা হয়, তবে যৌগিক গড়ত্রয় $\bar{x}, \bar{y}$ ও $\bar{z}$ -এর ক্ষেত্রে সম্পর্ক হবে $\bar{z} = a\bar{x} + b\bar{y}$

প্রমাণ : যদি চলক ত্রয়ের মান x_i, y_i ও z_i ; i = 1, 2,........... n হয় তবে, $z_i = ax_i + by_i$

তাহলে, $\sum z_i = a\sum x_i + b\sum y_i$

বা, $\frac{\sum z_i}{n} = a \cdot \frac{\sum x_i}{n} + b \cdot \frac{\sum y_i}{n}$

বা, $\bar{x} = a\bar{x} + b\bar{y}$

[অনুরূপভাবে ইহা ভারযুক্ত গড়ের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য]

6.3.3 সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে যৌগিক গড় নির্ণয় (Determination of A. M. by shortcut method)

(i) সরল যৌগিক গড় নির্ণয় :

ধরা যাক, n সংখ্যক রাশি x_1, x_2, ..., x_n এর যৌগিক গড় $\bar{x}$ । প্রদত্ত রাশিগুলির মানসমূহ পর্যবেক্ষণ করে কোনও একটি রাশিকে (ধরা যাক A, যার মান প্রদত্ত রাশিগুলির ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম মানের মাঝামাঝি হবে এবং সুবিধামতো আন্দাজ করা যাবে) উহাদের কাল্পনিক গড় হিসাবে ধর। যদি l_1, l_2 ......l_n যথাক্রমে x_1, x_2, ... x_n-এর উহাদের কাল্পনিক গড় থেকে পার্থক্য হয়, তবে

$$\bar{x} = A + \frac{\sum \ell_i}{n} \quad \text{... (3)}$$

$= A + \bar{\ell}$ হবে

প্রমাণ : প্রশ্নানুযায়ী, $\ell_1 = x_1 - A, \ell_2 = x_2 - A$ .... $\ell_n = x_n - A$

সুতরাং, $x_1 = \ell_1 + A$, $x_2 = \ell_2 + A$............ , $x_n = \ell_n + A$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 .... + x_n}{n}$$

$$= \frac{(\ell_1 + A) + (\ell_2 + A) + ... + (\ell_n + A)}{n}$$

$$= \frac{(\ell_1 + \ell_2 + ... + \ell_n) + nA}{n} = A + \frac{\sum \ell_i}{n} = A + \bar{\ell}$$

উদাহরণ ৩. 25, 29, 33, 37, 41, 48 সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় নির্ণয় করান।

সমাধান : ধরা যাক, সংখ্যাগুলির কল্পিত গড়, A = 35

এখন সংখ্যাগুলির কল্পিত গড় থেকে পার্থক্য যথাক্রমে $\ell_1 = 25 - 35 = -10$, $\ell_2 = 29 - 35 = -6$

$\ell_3 = 33 - 35 = -2$, $\ell_4 = 37 - 35 = 2$, $\ell_5 = 41 - 35 = 6$, $\ell_6 = 48 - 35 = 13$

$\therefore$ সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় $\bar{x}$ হলে

$$\bar{x} = A + \frac{\sum \ell_i}{n}$$

$$= 35 + \frac{-10 - 6 - 2 + 2 + 6 + 13}{6}$$

$$= 35 + \frac{3}{6} = 35 + 0.5 = 35.5$$

(ii) **ভারযুক্ত যৌগিক গড় নির্ণয় :**

ধরা যাক, n সংখ্যক চলকের মান যথাক্রমে $x_1, x_2, ..., x_n$ এবং উহাদের পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2 .... f_n$। কোনও একটি রাশিকে (ধরা যাক, A) উহাদের কল্পিত গড় হিসাবে ধরুন। যদি $\ell_1, \ell_2, ... \ell_n$ যথাক্রমে $x_1, x_2, ... x_n$-এর তাদের কল্পিত গড় থেকে পার্থক্য হয়, তবে

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i \ell_i}{n} \quad \text{.... (4)}$$

$= A + \bar{\ell}$ হবে।

এখানে $\overline{x}$ হল চলকের মানগুলির নির্ণেয় যৌগিক গড় এবং $n = \sum f_i$

প্রমাণ : প্রশ্নানুযায়ী $\ell_1 = x_1 - A$, $\ell_1 = x_2 - A$, ... $\ell_n = x_n - A$

সুতরাং $x_1 = \ell_1 + A$, $x_2 = \ell_2 + A$, ... $x_n = \ell_n + A$

$$\therefore \quad \overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_nx_n}{n}$$

$$= \frac{f_1(\ell_1 - A) + f_2(\ell_2 - A) + ... + f_n(\ell_n + A)}{n}$$

$$= \frac{f_1\ell_1 + f_2\ell_2 + ... + f_n\ell_n + A(f_1 + f_2 + ... + f_n)}{n}$$

$$= A + \frac{\sum f_i\ell_i}{n}$$

$$= A + \overline{\ell} \qquad \left(\because \sum_{i=1}^{n} f_i = n\right)$$

উদাহরণ ৪. সূত্র প্রয়োগে উদাহরণ ২-এর যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

দূরভাষ বার্তা সংখ্যা (a)	পরিসংখ্যা (f)	কাল্পনিক গড় (A = 4) থেকে পার্থক্য $\ell = x - A$	$f\ell$
0	4	– 4	– 16
1	10	– 3	– 30
2	13	– 2	– 26
3	21	– 1	– 21
4	23	0	0
5	21	1	21
6	17	2	34
7	10	3	30
8	1	4	4
মোট	N = 120		$\sum f_i\ell_i = -4$

রাশিতথ্যের যৌগিক গড় $\overline{x}$ হলে,

$$\overline{x} = A + \frac{\sum f_i\ell_i}{n} = 4 - \frac{4}{20} = 4 - 0.033 = 3.967$$

6.3.4 শ্রেণিবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের যৌগিক গড় নির্ণয় (Determination of A. M. from Grouped Frequency Distribution)

শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে চলকে যৌগিক গড় নির্ণয় ভারযুক্ত যৌগিক গড় নির্ণয় পদ্ধতিতে করা যায়। এক্ষেত্রে ধরা হয় যে, একটি শ্রেণী বিভাগের মধ্যে চলকের প্রতিটি মানই ঐ শ্রেণী বিভাগের মধ্যবিন্দুর (Mid-point) মানের সঙ্গে সমান। তাহলে শ্রেণী বিভাগের অন্তর্গত পরিসংখ্যাকে উক্ত মধ্যমানের ভার হিসাবে ধারে পূর্বে বর্ণিত প্রক্রিয়ার সাহায্যে যৌগিক গড় নির্ণয় করা হয়। এই নিয়ম সমান বা অসমান উভয় শ্রেণী দৈর্ঘ্যের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

তাহলে, শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন ছক চলকের যৌগিক গড় (2) বা (5) সূত্র প্রয়োগ করে নির্ণয় করা যাবে। বিশেষ করে, পরিসংখ্যা বিভাজনকে শ্রেণী বিভাগগুলির দৈর্ঘ্য পরস্পর সমান (equal width) হয়, তবে নিম্নলিখিত সূত্র প্রয়োগ করে, সহজে যৌগিক গড় নির্ণয় করা যায়।

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i \ell_i}{n} \times c \quad .... (5)$$

$$= A + c.\bar{\ell}$$

যেখানে, $\bar{x}$ = চলকের যৌগিক গড়

$n = \sum f_i$ = মোট পরিসংখ্যা

$$\ell_i = \frac{x_i + A}{c}$$

x_i = i-শ্রেণী বিভাগের মধ্যমান ; i = 1, 2,......k

A = কাল্পনিক গড়

c = শ্রেণীবিভাগের দৈর্ঘ্য।

f_i = i-শ্রেণী বিভাগের পরিসংখ্যা।

প্রমাণ :

$$\ell_i = \frac{x_i + A}{c}$$

বা, $x_i = A + c.\ell_i$

বা, $f_i x_i = Af_i + cf_i\ell_i$

বা, $\sum f_i x_i = A\sum f_i + c\sum f_i \ell_i$

বা, $\frac{\sum f_i x_i}{n} = A\frac{\sum f_i}{n} + c.\frac{\sum f_i \ell_i}{n}$

বা, $\bar{x} = A + c\frac{\sum f_i \ell_i}{n} = A + c.\bar{\ell}$

উদাহরণ ৫. সূত্র (2) , (4) ও (5) প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

একটি শিল্পাঞ্চলে কারখানাগুলির মাসিক বিক্রয়ের পরিসংখ্যা বিভাজন :

মাসিক বিক্রয় (হাজার টাকায়)	কারখানা সংখ্যা
300 – 350	5
350 – 400	14
400 – 450	23
450 – 500	50
500 – 550	52
550 – 600	25
600 – 650	22
650 – 700	7
700 – 750	2

সমাধান :

সূত্র (2) প্রয়োগ করে প্রদত্ত রাশিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড় নির্ণয় :

গণনা কার্য :

মাসিক বিক্রয়ের শ্রেণিবিভাগ (হাজার টাকায়)	মধ্যমান (x)	কারখানা সংখ্যা (f)	fx
300 – 350	325	5	1625
350 – 400	375	14	5250
400 – 450	425	23	9775
450 – 500	475	50	23750
500 – 550	535	52	27300
550 – 600	575	25	14375
600 – 650	625	22	13750
650 – 700	675	7	4725
700 – 750	725	2	1450
মোট	—	n = 200	$\sum f_i x_i = 102000$

সুতরাং, কারখানাগুলির মাসিক বিক্রয়ের যৌগিক গড় $\bar{x}$ হলে,

$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{102000}{200}$ হাজার টাকা

= 510 হাজার টাকা

= 510000 টাকা

সূত্র (4) প্রয়োগ করে প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড় নির্ণয় :

গণনা কার্য :

মাসিক বিক্রয়ের শ্রেণীবিভাগ (হাজার টাকায়)	মধ্যমান (x)	কারখানা সংখ্যা (f)	কাল্পনিক গড় (A = 525) থেকে পার্থক্য $\ell = x - A$	f.l
300 – 350	325	5	– 200	– 1000
350 – 400	375	14	– 150	– 2100
400 – 450	425	23	– 100	– 2300
450 – 500	475	50	– 50	– 2500
500 – 550	525	52	0	0
550 – 600	575	25	50	1250
600 – 650	625	22	100	2200
650 – 700	675	7	150	1050
700 – 750	725	2	200	400
মোট	—	N = 200	—	– 3000

মাসিক বিক্রয়ের যৌগিক গড় $\bar{x}$ হলে

$$\bar{x} = A + \frac{\sum f_i \ell_i}{N}$$

$= \left(525 - \frac{3000}{200}\right)$ হাজার টাকা

= 510 হাজার টাকা

= 510000 টাকা।

সূত্র (5) প্রয়োগ করে প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড় নির্ণয় :

গণনা কার্য :

মাসিক বিক্রয়ের শ্রেণীবিভাগ (হাজার টাকায়)	মধ্যমান (x)	কারখানা সংখ্যা (f)	কাল্পনিক গড় (A = 525) থেকে পার্থক্য $\ell = \frac{x - A}{c}$, c = 50	f.l
300 – 350	325	5	– 4	– 20
350 – 400	375	14	– 3	– 42
400 – 450	425	23	– 2	– 46
450 – 500	475	50	– 1	– 50

মাসিক বিক্রয়ের শ্রেণীবিভাগ (হাজার টাকায়)	মধ্যমান (x)	কারখানা সংখ্যা (f)	কাল্পনিক গড় (A = 525) থেকে পার্থক্য $\frac{\ell = x - A}{c}, c = 50$	f.*l*
500 – 550	525	52	0	0
550 – 600	575	25	1	25
600 – 650	625	22	2	44
650 – 700	675	7	3	21
700 – 750	725	2	4	8
মোট	—	n = 200	—	– 60

মাসিক বিক্রয়ের যৌগিক গড় $\overline{x}$ হলে

$$\overline{x} = A + \frac{\sum f_i \ell_i}{n} \times c$$

$$= \left(525 - \frac{60}{200} \times 50\right) \text{ হাজার টাকা}$$

= 510 হাজার টাকা

= 510000 টাকা

দ্রষ্টব্য : (i) তিনটি পদ্ধতিতে নির্ণেয় যৌগিক গড়ের মানের কোনও তারতম্য হয়না।

(ii) সূত্র (5) প্রয়োগে গণনা কার্য সর্বাপেক্ষা সহজ, তবে শ্রেণীপ্রসার সমান না হলে সূত্র (4) প্রয়োগ করতে হবে।

(iii) সর্বক্ষেত্রে কল্পিত গড় 525 হাজার টাকা ধরা হয়েছে। সুবিধামত মাঝামাঝি ভিন্ন মান নিলেও যৌগিক গড়ের কোনও পরিবর্তন হবে না।

6.4 গুণোত্তর গড়ের সংজ্ঞা

সমজাতীয় n-সংখ্যক রাশির গুণোত্তর গড় রাশিগুলির কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপক একটি সংখ্যা এবং উহার মান রাশিগুলির গুণফলের n-তম মূলের (nth root) সমান।

যদি n সংখ্যক সমজাতীয় রাশি $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ -এর গুণোত্তর গড় G হয়, তবে

$G = (x_1.x_2. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_n)^{1/n}$ .... (6)

ইহাকে অন্যরূপেও প্রকাশ করা হয়। (6)-এর উভয়পক্ষের logarithm লইয়া পাই

$$\log G = \frac{1}{n} \log\left(x_1.x_2 \ldots\ldots x_n\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\log x_1 + \log x_2 + \ldots\ldots + \log x_n\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

অর্থাৎ গুণোত্তর গড়ের logarithm-এর মান রাশিসমূহের logarithm-এর মানগুলির যৌগিক গড়ের সমান।

আবার যদি কোনও চলকের n সংখ্যক মান $x_1, x_2, ..., x_n$ -এর পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, ...f_n$ হয়, তবে গুনোত্তর গড় G হলে,

$$G = \left\{x_1^{f_1}, x_2^{f_2} ....x_n^{f_n}\right\}^{\frac{1}{n}} \quad .... (7)$$

যেখানে $n = \sum_{i=1}^{n} f_i$

এখন (7)-এর উভয়পক্ষের logarithm লইয়া পাই,

$$\log G = \frac{1}{n}\{f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + ... + f_n \log x_n\}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \log x_i$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে গুণোত্তর গড়ের logarithm-রাশিগুলির logarithm-এর ভারযুক্ত গড়ের সমান।

উদাহরণ ৬. 9, 24, 64 সংখ্যা তিনটির গুণোত্তর গড় নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত সংখ্যা তিনটির গুণোত্তর গড় G হলে,

$G = (9 \times 24 \times 64)^{1/3} = (3 \times 3 \times 8 \times 3 \times 4 \times 4 \times 4)^{1/3} = (3^3 \times 2^3 \times 4^2)^{1/3}$

$= 3 \times 2 \times 4 = 24$

উদাহরণ ৭. নিম্নলিখিত পাঁচটি সংখ্যার গুণোত্তর গড় নির্ণয় করুন :

47, 52, 66, 85, 123

সমাধান : প্রদত্ত পাঁচটি সংখ্যার গুণোত্তর গড় G হলে,

$$\log G = \frac{1}{5}[\log 47 + \log 52 + \log 66 + \log 85 + \log 123]$$

$$= \frac{1}{5}[1.6721 + 1.7160 + 1.8195 + 1.9294 + 2.0899]$$

$$= \frac{1}{5} \times 9.2269 = 1.8454$$

$\therefore$ G = Anti log(1.8454) = 70.04

উদাহরণ ৮. গুণোত্তর গড় পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত ভারযুক্ত শ্রেণীসূচক বিভাজন ছক থেকে সাধারণ সূচক নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	A	B	C	D	E	F
শ্রেণী সূচক	118	120	97	107	111	93
ভার	4	1	2	6	5	2

সমাধান :

গণনা কার্য :

শ্রেণী	**শ্রেণীসূচক (x)**	**ভার (f)**	**log x**	**f.log x**
A	118	4	2.0719	8.2876
B	120	1	2.0792	2.0792
C	97	2	1.0968	3.9736
D	107	6	2.0294	12.1764
E	111	5	2.0453	10.2265
F	93	2	1.9685	3.9370
মোট	—	20	—	40.6803

এখন, গুণোত্তর গড় G হলে, $\log G = \frac{1}{n}\sum f_i \log_i$

$= \frac{40.6803}{20}$

$= 2.0340$

$\therefore$ G = Anti log (2.0340) = 108.1

6.5 বিবর্ত যৌগিক গড়ের সংজ্ঞা (Definition of H. M)

সমজাতীয় কতকগুলি রাশির বিবর্ত যৌগিক গড় রাশিগুলির কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপক একটি সংখ্যা এবং উহা রাশিগুলির অনোন্যকের (reciprocal) যৌগিক গড়ের অনোন্যকের সমান।

যদি n সংখ্যক সমজাতীয় রাশি x_1, x_2, ... x_n-এর বির্তক যৌগিক গড় H হয়, তবে

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} \quad .... (8)$$

আবার, যদি x_1, x_2, ..., x_k রাশিগুলির পরিসংখ্যা বা ভার যথাক্রমে f_1, f_2, ..., f_k এবং উহাদের বিবর্ত যৌগিক গড় H হয়, তবে

$$H = \frac{n}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + ... + \frac{f_k}{x_k}} \quad .... (9)$$

যেখানে, $n = \sum f_i$

উদাহরণ ৯. এক ব্যক্তি সাইকেলে ঘন্টায় 20 কিমি বেগে x হইতে y তে যায় এবং ঘন্টায় 24 কিমি বেগে ফিরে আসে? তার ঘন্টায় গড় গতিবেগ কত?

সমাধান : এখান গড় গতিবেগ নির্ণয় করার জন্য বিবর্ত যৌগিক গড় পদ্ধতি প্রয়োগ করা যথোপযুক্ত।

গড় গতিবেগ $H = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{24}}$ কিমি/ঘন্টা

$= \frac{240}{11}$ কিমি/ঘন্টা $= 21.82$ কিমি/ঘন্টা

উদাহরণ ১০. এক ব্যক্তি প্রতি ঘন্টায় 4 মাইল বেগে 12 মাইল, আবার প্রতি ঘন্টায় 5 মাইল বেগে 10 মাইল ভ্রমণ করে। ঐ ব্যক্তির গড় গতিবেগ কত?

সমাধান : এক্ষেত্রে গড় গতিবেগ নির্ণয় করার জন্য ভারযুক্ত বিবর্ত যৌগিক গড় পদ্ধতি প্রয়োগ করা যথোপযুক্ত।

গণনা কার্য :

গতিবেগ (x)	অতিক্রান্ত পথ (f)	(f/x)
4	12	3
5	10	2
মোট	22	5

$\therefore$ গতিবেগ, $H = \frac{n}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2}}$

$= \frac{22}{5}$ মাইল/ঘন্টা $= 4.4$ মাইল/ঘন্টা

6.5.1 বিভিন্ন প্রকার গড়ের পারস্পরিক সম্পর্ক :

(i) যে-কোন সংখ্যক সংখ্যার যৌগিক গড় (A. M,), গুণোত্তর গড় (G. M) এবং বিবর্ত যৌগিক গড়ের (H.M) মধ্যে সম্পর্ক হল :

A. M $\geq$ G.M $\geq$ H.M

(ii) কেবলমাত্র দুটি প্রদত্ত সংখ্যার ক্ষেত্রে,

A. M. × H. M = $(G.\ M)^2$

6.6 মধ্যমা (Median)

সমজাতীয় কতকগুলি রাশির মধ্যমা রাশিগুলির কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপক একটি সংখ্যা এবং ইহার মান রাশিগুলিকে মানের ঊর্দ্ধক্রমে (assending order) সাজালে যে রাশিটির অবস্থান ঠিক মাঝখানে হয় তার সমান। অর্থাৎ মধ্যমা রাশিতথ্যমালাকে দুটি সমান অংশে বিভক্ত করে। একটি ভাগের মধ্যের প্রতেকটি রাশির মান মধ্যমা অপেক্ষা কম এবং অপর ভাগের প্রত্যেকটির রাশির মান মধ্যমা অপেক্ষা বেশি।

(i) সরল শ্রেণীর (simple series) ক্ষেত্রে রাশিতথ্যমালায় মোট রাশির সংখ্যা অযুগ্ম (odd) হলে, উহাদের মানের ক্রম-অনুযায়ী সাজিয়ে ঠিক মাঝখানে একটি রাশি পাওয়া যাবে এবং ঐ রাশিটি মধ্যমা হবে। কিন্তু মোট রাশির সংখ্যা যদি যুগ্ম (even) হয়, তবে মানের ক্রম অনুযায়ী সাজিয়ে মধ্যম স্থানে দুটি রাশি পাওয়া যাবে যাদের মধ্যের যে কোনও সংখ্যাকে মধ্যমা হিসাবে গণ্য করা হয়। তবে নির্দিষ্ট একটি মান পাওয়ার জন্য ঐ মানদ্বয়ের যৌগিক গড়কে মধ্যমা হিসাবে ধরা হয়। অর্থাৎ যদি রাশিতথ্যমালায় মোট রাশির সংখ্যা n (অযুগ্ম) হয়, তবে উহাদের মানের ক্রমানুসারে পরপর সাজালে $\frac{n+1}{2}$ তম রাশির মান মধ্যমা হবে এবং n (যুগ্ম) হলে, $\frac{n}{2}$ তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-তম রাশিদ্বয়ের যৌগিক গড় মধ্যমা হবে।

(ii) পরিসংখ্যা ছকের মাধ্যমে প্রদত্ত রাশিমালা থেকে মধ্যমার মান নিম্নলিখিত সূত্র দিয়ে কেবলমাত্র স্থূলভাবে (approximately) নির্ণয় করা যায়।

$$M = \ell_1 + \frac{\left(\frac{n}{2} - F\right)}{f_m} \times \ell \text{ ..... (10)}$$

সেখানে, M = নির্ণেয় মধ্যমার মান,

n = মোট পরিসংখ্যা,

l_1 = যে শ্রেণী বিভাগে মধ্যমা আছে তার নিম্নসীমানা,

F = যে শ্রেণী বিভাগে মধ্যমা আছে তার নিচের শ্রেণী বিভাগের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা

f_m = যে শ্রেণী বিভাগে মধ্যমা আছে তার পরিসংখ্যা,

এবং c = যে শ্রেণী বিভাগে মধ্যমা আছে তার দৈর্ঘ্য।

উদাহরণ ১১. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির মধ্যমা নির্ণয় করো :

(i) 32, 22, 29, 17, 40, 26, 21

(ii) 88, 72, 33, 29, 70, 86, 54, 91, 61, 57

সমাধান : (i) সংখ্যাগুলিকে মানের উর্দ্ধক্রম অনুসারে সাজিয়ে পাই,

17, 21, 22, 26, 29, 32, 40

মোট রাশির সংখ্যা = 7

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা = $\left(\frac{7+1}{2}\right)$তম বা ৪র্থ স্থানে রাশির মান = 26

(ii) সংখ্যাগুলিকে মানের উর্দ্ধক্রম সাজিয়ে পাই,

29, 33, 54, 57, 61, 70, 72, 86, 88, 91

এখানে রাশির মোট সংখ্যা = 10

নির্ণেয় মধ্যমা $\frac{10}{2}$-তম বা ৫ম ও $\left(\frac{10}{2}+1\right)$-তম বা ৬ষ্ঠ মানের মধ্যবর্তী মানের 61 ও 70-এর মধ্যে যে কোনও সংখ্যা হবে। তবে উহাদের যৌগিক গড় $\frac{61+70}{2}$ বা 65.5 কে নির্দিষ্ট মধ্যমা হিসাবে ধরা হবে।

উদাহরণ ১২. নিম্নলিখিত সরল পরিসংখ্যা বিভাজন করে মধ্যমা নির্ণয় করুন :

x	0	1	2	3	4	5	6	মোট
f	7	44	35	16	9	4	1	116

সমাধান :

গণনা কার্য :

x	**f**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (নিচ থেকে)**
0	7	7
1	44	51
2	⟵ 35 ⟶	86
3	16	102
4	9	111
5	4	115
6	1	116 (= N)
মোট	116 = N	

এক্ষণে $\frac{N}{2}=58$। এই 58-এর স্থান ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা স্তম্ভে 86-এর মধ্যে। ঐ সারিতে চলক x-এর মান 2। সুতরাং, নির্ণেয় মধ্যমা = 2

উদাহরণ ১৩. নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনের মধ্যমা নির্ণয় করুন :

একটি কারকানায় 300 জন শ্রমিকের মাসিক আয়ের পরিসংখ্যা বিভাজন :

মাসিক আয় (টাকায়)	শ্রমিক সংখ্যা
1000 – 1100	16
1100 – 1200	24
1200 – 1300	59
1300 – 1400	100
1400 – 1500	41
1500 – 1600	31
1600 – 1700	19
1700 – 1800	10
মোট	300

সমাধান :

গণনা কার্য :

মাসিক আয়ের শ্রেণীবিভাগ (টাকায়)	শ্রমিকসংখ্যা (f)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
1000 – 1100	16	16
1100 – 1200	24	40
1200 – 1300	59	99 (= F)
1300 – 1400	⟵ 100 (fm) ⟶	199
1400 – 1500	41	240
1500 – 1600	31	271
1600 – 1700	19	290
1700 – 1800	10	300
মোট	300 (= N)	

এক্ষণে, $\frac{N}{2} = \frac{300}{2} = 150$

যে শ্রেণী বিভাগের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা মোট পরিসংখ্যার অর্ধেকের ঠিক বেশি (just greater), তাতে মধ্যমা আছে। এখানে শ্রেণীবিভাগ 1300 – 1400 তে মধ্যমা আছে।

এখানে ℓ_1 = মধ্যমা শ্রেণীর নিম্ন সীমানা = 1300

F = মধ্যমা শ্রেণীর নিচের শ্রেণীর (অর্থাৎ 1200 – 1300) ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা = 99

f_m = মধ্যমা শ্রেণীর পরিসংখ্যা = 100

e = মধ্যমা শ্রেণীর দৈর্ঘ্য = 100

$$\therefore \quad M = \ell_1 + \frac{\frac{n}{2} - F}{f_m} \times c$$

$$= 1300 + \frac{150 - 90}{100} \times 100$$

= 1351

∴ নির্ণেয় মধ্যমার মান = 1351 টাকা।

6.7 সংখ্যাগুরুমান (Mode)

সমজাতীয় কতকগুলির রাশির সংখ্যাগুরু মান রাশিগুলির কেন্দ্রগীয় প্রবণতা পরিমাপক একটি সংখ্যা ও উহার মান রাশিতথ্যমালায় যেমনটি সর্বাপেক্ষা বেশি বার হয়েছে তার সমান। বাণিজ্যে সংখ্যাগুরু মান বেশি ব্যবহৃত হয়। আবহবার্তা বিভাগে এটি বহুল ব্যবহৃত হয়।

কোনও একটি বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান সবসময় থাকবে এমন কোনও কথা নেই। উদাহরণস্বরূপ, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 বিভাজনের কোনও সংখ্যাগুরু মান নেই। আবার কোনও কোনও বিভাজন ছকের একাধিক সংখ্যাগুরু মান থাকতে পারে। যেমন 1, 3, 5, 8, 11, 5, 6, 2, 5, 9 বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান 5 অর্থাৎ বিভাজনটির একটি সংখ্যাগুরু মান আছে। আবার 1, 5, 4, 3, 8, 4, 5, 6, 9, 5 বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান দুটি অর্থাৎ 4 এবং 5। একটি সংখ্যাগুরু মান থাকলে উক্ত বিভাজন ছকের একক সংখ্যাগুরু মান-বিশিষ্ঠ পরিসংখ্যা বিভাজন (Unimodal Frequency Distribution) বলে। দুই বা ততোধিক সংখ্যাগুরু মান থাকলে উক্ত বিভাজন ছককে দুই বা বহুল সংখ্যাগুরু মান-বিশিষ্ট পরিসংখ্যা বিভাজন (Bimodal or Multimodal Distribution) বলে।

(i) সরল পরিসংখ্যা বিভাজনের সংখ্যাগুরু মান হল চলকের সেই মান যার পরিসংখ্যা সর্বাধিক।

(ii) শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজনের ক্ষেত্রে সংখ্যাগুরু মান সঠিকভাবে নির্ণয় করা অসম্ভব। স্থূলভাবে (approximately) সমান শ্রেণীদৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বিভাজনের ক্ষেত্রে নিম্নলিখিত সূত্র দিয়ে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা হয়।

$$\text{সংখ্যাগুরু মান} = \ell_1 + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times c \qquad \ldots (11)$$

যেখানে, ℓ_1 = সংখ্যাগুরু মান শ্রেণীবিভাগের (Modal Class) নিম্ন সীমানা

d_1 = সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা ও তার ঠিক পূর্ববর্তী শ্রেণীর পরিসংখ্যার পার্থক্য
d_2 = সর্বোচ্চ পরিসংখ্যা ও তার ঠিক পরবর্তী শ্রেণীর পরিসংখ্যার পার্থক্য
c = সংখ্যাগুরু মান শ্রেণীর দৈর্ঘ্য

যদি f_o, f_{-1}, f_1 যথাক্রমে সংখ্যাগুরু শ্রেণী, তৎপূর্ববর্তী শ্রেণী ও তৎপরবর্তী শ্রেণীর পরিসংখ্যা হয় তবে $d_1 = |f_o - f_{-1}|$ এবং $d_2 = |f_o - f_1|$

যদি পরিসংখ্যা বিভাজনের শ্রেণী দৈর্ঘ্যগুলি সমদৈর্ঘ্য বিশিষ্ট না হয়, তবে ঐ সব শ্রেণীর পরিসংখ্যা ঘনত্ব নিয়ে কাজ করতে হয়। মধ্যক, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের স্থূল (approximate) সম্পর্ক।

মধ্যক – সংখ্যাগুরু মান = 3 (মধ্যক – মধ্যমা)

ব্যবহার করেও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ ১৪. নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করো।

ওজন (কিগ্রা)	পরিসংখ্যা
45	8
50	15
55	25
60	28
65	14
70	10
মোট	100

সমাধান : যেহেতু 60 কিগ্রা ওজনের পরিসংখ্যা 28 ও ইহাই সর্বোচ্চ। তাই সংখ্যাগুরু মান 60 কিগ্রা।

উদাহরণ ১৫. নিম্নলিখিত বিভাজন ছকে 100 টি দোকানের প্রত্যেক মাসের লাভ টাকাতে দেওয়া আছে। সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

লাভ (টাকায়)	0 – 100	100 – 200	200 – 300	300 – 400	400 – 500	500 – 600
দোকানের সংখ্যা	12	18	27	20	17	6

সমাধান : সংখ্যাগুরু শ্রেণী = 200 – 300

এখানে, $f_0 = 27,\ f_{-1} = 18,\ f_1 = 20$

$d_1 = f_0 - f_{-1} = 27 - 18 = 9$
$d_2 = f_0 - f_1 = 27 - 20 = 7$
$c = 100$
$l_1 = 200$

$\therefore$ সংখ্যাগুরু মান $= 200 + \frac{9}{9+7} \times 100 = 236.25$ টাকা।

6.7.1 যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের তুলনা

(i) একটি ভালো পরিমাপজ সুসংজ্ঞাত হবে। যৌগিক গড় ও সংখ্যাগুরু মান সুসংজ্ঞাত। রাশির সংখ্যা যুগ্ম ছাড়া মধ্যমাও সুসংজ্ঞাত।

(ii) ভালো পরিমাপক সহজে নির্ণয় করা যাবে। তিনটি পরিমাপকই প্রায় সমান শ্রমসাধ্য। অবিচ্ছিন্ন (Continuous) চলকের ক্ষেত্রে কেবলমাত্র চলকের কয়েকটি মান দেওয়া থাকলে সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করা অসুবিধাজনক।

(iii) ভালো পরিমাপক সহজবোধ্য হবে। তিনটি পরিমাপকই সহজবোধ্য। তবে যৌগিক গড় অধিকতর সহজবোধ্য।

(iv) ভালো পরিমাপক সমস্ত রাশির ওপর নির্ভর করে নির্ণয় করা হবে। তিনটি পরিমাপের মধ্যে যৌগিক গড়ের ক্ষেত্রে প্রত্যক্ষভাবে এবং মধ্যমাও সংখ্যাগুরু মানের ক্ষেত্রে পরোক্ষভাবে সমস্ত রাশির মান নেওয়া হয়। অর্থাৎ, রাশির তথ্যমালার একটি মান পরিবর্তন হল যৌগিক গড়ের মান পরিবর্তন হবে, কিন্তু মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের ক্ষেত্রে তা নাও হতে পারে। রাশিমালার মধ্যে যদি দু-একটি অস্বাভাবিক বড় বা ছোট মান থাকে তাতে যৌগিক গড় বিশেষভাবে প্রভাবিত হবে, মধ্যমা বা সংখ্যাগুরু মান প্রভাবিত হবে না।

(v) ভালো পরিমাপকের ক্ষেত্রে সরল বীজগাণিতিক ধর্ম থাকা বাঞ্ছনীয়। কেবলমাত্র যৌগিক গড়ের ক্ষেত্রে এটি প্রতিফলিত হয়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মানের ক্ষেত্রে হয় না।

(vi) প্রান্তীয় শ্রেণীবিভাগ মুক্ত (open) হলে মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান প্রভাবিত হয় না, কিন্তু যৌগিক গড় নির্ণয় অসুবিধাজনক।

6.8 চতুর্থক, দশমক ও শততমক (Quartiles, Deciles and Percentiles)

মধ্যমা, মানের ঊর্দ্ধক্রমে সাজানো রাশিতথ্যমালাকে দুটি সমানভাগে ভাগ করে। ফলে মধ্যমার উভয়দিকে সমান সংখ্যক পর্যবেক্ষণ থেকে থাকে। একইভাবে, রাশিতথ্যমালার যে মানগুলি রাশিতথ্যমালাকে কয়েকটি নির্দিষ্ট সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করে সেই মানগুলিকে রাশিতথ্যমালার অংশক (Partition) বলে। এগুলির মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ হল — চতুর্থক, দশমক ও শততমক।

চতুর্থক (Quartiles) :

মানের ঊর্ধ্বক্রমে সজ্জিত রাশিমালা যে তিনটি মান দ্বারা চারটি সমান অংশে বিভক্ত হয় তাদের চতুর্থক বলে। Q_1, Q_2 ও Q_3-কে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় চতুর্থক বলে। স্পষ্টতঃ Q_2 হল বিস্তৃতির মধ্যমা।

দ্রষ্টব্য : চতুর্থক সম্পর্কে পরবর্তী এককে বিস্তারিত আলোচনা করা হবে।

দশমক (Deciles) : রাশিতথ্যমালার মানগুলিকে ঊর্দ্ধক্রমে সাজালে, রাশিতথ্যমালার যে নয়টি মান উহাকে দশটি সমান ভাগে বিভক্ত করে তাদের দশমক বলে। D_1, D_2, D_3, ..., D_9 দ্বারা দশমকগুলি সূচিত হয়।

(ক) সরল পরিসংখ্যা বিভাজন (Simple frequency distribution) :

$D_1 = \frac{N+1}{10}$ তম পদ

$D_2 = \frac{2(N+1)}{10}$ তম পদ

$D_k = \frac{k(N+1)}{10}$ তম পদ

(k = 1, 2, ... , 9)

(খ) শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন (Grouped frequency distribution) :

D_1 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার $\frac{N}{10}$ -এর অনুরূপ রাশির মান;

D_2 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার $\frac{2N}{10}$ -এর অনুরূপ রাশির মান;

D_k = ক্রমযৌগিখ পরিসংখ্যার $\frac{kN}{10}$ -এর অনুরূপ রাশির মান;

(k = 1, 2,............., 9)

শততমক (Percentiles) :

রাশিতথ্যমালার মানগুলিকে ঊর্ধ্বক্রমে সাজালে, রাশিতথ্যমালার যে 99টি মান উহাকে 100টি সমানভাগে বিভক্ত করে তাদের শততমক বলে। P_1, P_2, P_3, ... P_{99} দ্বারা শততমকগুলি সূচিত হয়।

(ক) সরল পরিসংখ্যা বিভাজন (Simple frequency distribution) :

$P_1 = \frac{N+1}{100}$ -তম পদের মান ;

$P_2 = \frac{2(N+1)}{100}$ -তম পদের মান ;

$P_k = \frac{k(N+1)}{100}$ -তম পদের মান (k – 1, 2, ..., 99)।

(খ) শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা বিভাজন (Grouped frequency distribution) :

P_1 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার $\frac{N}{100}$ -এর অনুরূপ রাশির মান ;

P_2 = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার $\frac{2N}{100}$ -এর অনুরূপ রাশির মান ;

P_k = ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার $\frac{kN}{100}$ -এর অনুরূপ রাশির মান ;

(k= 1, 2, ... 99)

দ্রষ্টব্য : চতুর্থত, দশমক ও শততমক নির্ণয়ে সরল অন্তঃমান পদ্ধতির ব্যবহার সহজততর হয়।

উদাহরণ ১৬ : নীচে 100 জন ছাত্রের রাশিবিজ্ঞানে প্রাপ্ত নম্বরের বিভাজন দেওয়া হল ঃ

প্রাপ্ত নম্বর (অপেক্ষা বেশি) [Marks more than]	0	10	20	30	40	50
ছাত্রসংখ্যা (No. of Students)	100	88	72	42	16	6

যদি 60% ছাত্র পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়, তবে সব থেকে কম কত নম্বর পেয়ে একজন চাত্র উত্তীর্ণ হয়েছে?

সমাধান : উত্তীর্ণ হওয়ার সবচেয়ে কমপ্রাপ্ত নম্বর বা তার চেয়ে বেশী পেয়েছে 60% ছাত্র এবং কম পেয়েছে 40% ছাত্র। সুতরাং চতুর্থ দশমকই হল উত্তীর্ণ হওয়ার সবচেয়ে কমপ্রাপ্ত নম্বর।

দশমকের গণনাকার্য্য

শ্রেণী	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা বেশী)	পরিসংখ্যা (f)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম)
0 – 10	100	12	12
10 – 20	88	16	28
20 – 30	72	30	58
30 – 40	42	26	84
40 – 50	16	10	94
50 এবং এর বেশী	6	6	100
মোট	—	100 = N	—

এখন $\frac{4N}{10} = \frac{4 \times 100}{10} = 40$

$\therefore$ চতুর্থক দশমক শ্রেণী হল : 20 – 30

$$\therefore \quad D_4 = \ell_1 + \frac{\frac{4N}{10} - F}{f} \times i = 20 + \frac{40-28}{30} \times 10 = 24$$

$\therefore$ উত্তীর্ণ হওয়ার সবচেয়ে কম প্রাপ্ত নম্বর হল 24।

উদাহরণ ১৭ : নিম্নে 150 জন ছাত্রের হিসাবশাস্ত্রে প্রাপ্ত নম্বর প্রদত্ত হল :

প্রাপ্ত নম্বর :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
ছাত্রসংখ্যা	6	15	13	50	30	21	15

যদি 64% ছাত্র ঐ পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হয়ে থাকে, তবে সর্বনিম্ন পাশ মার্ক নির্ণয় কর।

সমাধান : (100 – 64)% = 36% ছাত্র উক্ত পরীক্ষায় অনুত্তীর্ণ হয়েছে। সুতরাং 36% ছাত্র সর্বনিম্ন পাশ মার্কের চেয়ে কম নম্বর পেয়েছে অর্থাৎ 36-তম শততমকই হচ্ছে সর্বনিম্ন পাশ মার্ক।

এখানে N = 150, $\therefore \frac{36N}{100} = \frac{\overset{18}{\cancel{36}} \times \overset{3}{\cancel{150}}}{\underset{2}{\cancel{100}}} = 54$

শততমক নির্ণয়ের গণনাকার্য্য

প্রাপ্ত নম্বর (শ্রেণী)	ছাত্রসংখ্যা (f)	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা কম)
0 – 10	6	6
10 – 20	15	21
20 – 30	13	34
30 – 40	50	84
40 – 50	30	114
50 – 60	21	135
60 – 70	15	150

36-তম শতকমান শ্রেণী হল : 30 – 40

এখন,

$30 \rightarrow 40$ P_{36}	$34 \rightarrow 84$ 54

সুতরাং সরল অন্তঃমান নির্ণয়ের সূত্রানুযায়ী, $\frac{P_{36} - 30}{40 - 30} = \frac{54 - 34}{84 - 34}$

বা, $P_{36} = 30 + \frac{\cancel{20}}{\cancel{50}} \times \overset{2}{\cancel{10}} = 34$

সুতরাং, সর্বনিম্ন পাশমার্ক হল 34।

6.9 অনুশীলনী

(১) নীচের প্রতি ক্ষেত্রে কোন্ প্রকারের গড় প্রয়োগ করা উচিত লিখুন :

(ক) কোনও পরীক্ষায় 100 জন ছাত্রের অর্জিত নম্বর।

(খ) কোনও দোকানে যে সাইজের জুতো সর্বাধিক সংখ্যায় বিক্রয় হয়।

(গ) মুক্ত-প্রান্ত শ্রেণী বিভাগযুক্ত পরিসংখ্যা বিভাজন।

(ঘ) অবচয়ের বিভিন্ন হার যা অবচয়িত মূল্যের উপর ধার্য করা হয়।

(২) নিচের প্রতিক্ষেত্রে একটি করে উদাহরণ দিন :

(ক) যৌগিক গড়ের পরিবর্তে মধ্যমান প্রয়োগ যথাযথ হয়।

(খ) যৌগিক গড়ের প্রয়োগ না করে বিবর্ত গড় ব্যবহার করা সঠিক।

(গ) মধ্যমার পরিবর্তে সংখ্যাগুরু মানের প্রয়োগ যথাযথ হয়।

(ঘ) গড় হিসাবে যৌগিক গড়ের চেয়ে গুণোত্তর গড়ের প্রয়োগ যথাযথ হয়।

(৩) কোনও চলকের সকল মানের সাথে যদি 10 যোগ করা হয়, তবে তাদের মধ্যমার কী পরিবর্তন হবে?

(৪) যদি একটি চলক x-এর দুটি মানের গাণিতিক গড় ও গুণোত্তর গড় যথাক্রমে 5 এবং 4 হয়, তবে মান দুটি বিবর্ত গড় নির্ণয় করুন।

(৫) রাশিতথ্যমালার কেন্দ্রীয় প্রবণতার পরিমাপ বলতে কী বোঝ?

(৬) 'ভারযুক্ত গড়' বলতে কী বোঝ? উদাহরণসহ আলোচনা করুন।

(৭) কোনও একটি নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে কোন্ গড় ব্যবহার করবে তা আলোচনা করুন।

(৮) নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

7, 4, 3, 5, 6, 3, 2, 4, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 4, 3, 5, 4, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 2, 3

(৯) যৌগিক গড় নির্ণয় কর :

(i) 2, 4, 6, ... 2n

(ii) 1, 2, 3, ... 16 টি পদ পর্যন্ত

(iii) 3, 6, 12, 24,......... n-সংখ্যাক পদ পর্যন্ত

(১০) 3, 6, 24 ও 48 সংখ্যা চারটির যৌগিক গুণোত্তর ও বিবর্ত যৌগিক গড় নির্ণয় করুন।

(১১) নিম্নলিখিত 80-টি আপেলের ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন :

ওজন (গ্রাম)	110–119	120–129	130–139	140–149	150-159	160–169	170–179	180–189
পরিসংখ্যা	5	7	12	20	16	10	7	3

(১২) নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনের যৌগিক গড়, মধ্যমা ও সংখ্যাগুরু মান নির্ণয় করুন।

শ্রেণী	0–4	5–14	15–19	20–34	35-39
পরিসংখ্যা	2	8	6	14	5

একক 7 ❑ বিস্তৃতির পরিমাপ (Measure of Dispersion)

গঠন

7.0 উদ্দেশ্য

7.1 প্রস্তাবনা

7.2 বিস্তৃতির পরিমাণ

7.2.1 বিস্তৃতির পরম পরিমাপসমূহ

7.2.2 বিস্তৃতির পরম পরিমাপসমূহের তুলনামূলক আলোচনা

7.3 বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপসমূহ

7.4 অনুশীলনী

7.0 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে আপনি বুঝতে পারবেন

- বিস্তৃতি কাকে বলে?
- বিস্তৃতির পরম পরিমাপক সমূহ কী কী?
- পরম পরিমাপক সমূহের তুলনামূলক আলোচনা।
- বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপকের ধারণা।

7.1 প্রস্তাবনা

পরিসংখ্যা বিষয়ক যে কোন অনুসন্ধানে রাশিতথ্যের গড়মান, মধ্যমা বা ভূয়িষ্ঠক সকল সময় উহার প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্য অনুধাবনের জন্য যথার্থ নয়। রাশিতথ্যমালার মানগুলি উক্ত কেন্দ্রীয় মানগুলির চতুর্দিকে কিরূপে বিস্তৃত সেটা জানাও জরুরি। অনেক সময় দুটি পৃথক রাশিতথ্যমালার গড় একই হলেও তাদের প্রকৃতিগত বৈশিষ্ট্য আলাদা হয়। সুতরাং রাশিতথ্যমালার আরেকটি সংখ্যাগত পরিমাপক হল বিস্তৃতি।

7.2 বিস্তৃতির পরিমাপ (Measures of Dispersion)

যে সংখ্যাগত পরিমাপের সাহায্যে কোনও পরিসংখ্যা বিভাজন বা রাশিতথ্যমালার মানগুলি তাদের কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপকের চারদিকে কীভাবে বিস্তৃত (dispersed) অথবা মানগুলির সঙ্গে কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপকের মানের

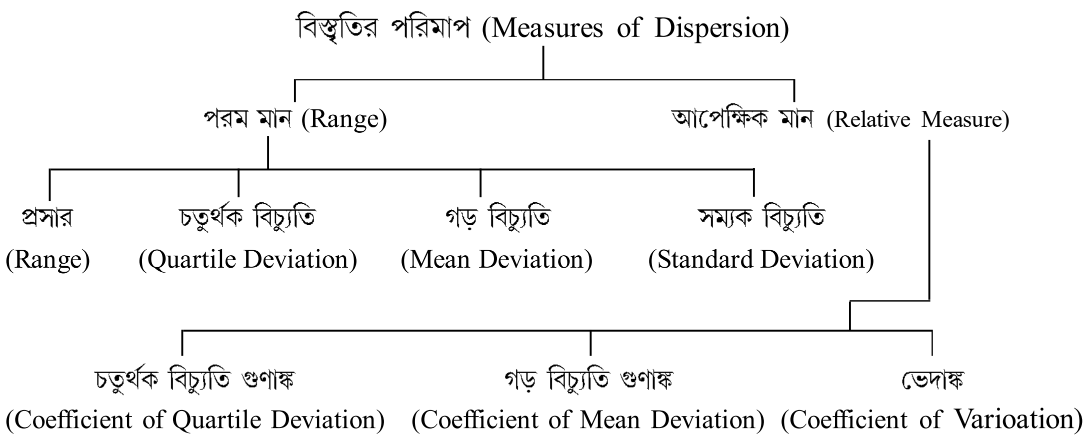
পার্থক্য (deviation) অথবা প্রভেদ (variation) প্রকাশ করে, তাকে বিস্তৃতির পরিমাপ বলে।

কেন্দ্রীয় প্রবণতা পরিমাপক সংখ্যার (গড় বা মধ্যমা বা সংখ্যাগুরু মান) দ্বারা কোনও পরিসংখ্যা বিভাজন বা রাশিতথ্যমালার বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে সম্পূর্ণভাবে বুঝতে পারা যায় না। নিম্নলিখিত উদাহরণ পর্যালোচনা করলে তা বুঝতে পারা যাবে।

A—শ্রেণী—30, 32, 36, 38, 39 মোট—175

B— শ্রেণী—4, 19, 36, 53, 63 মোট—175

প্রদত্ত শ্রেণীদ্বয়ের যৌগিক গড় একই অর্থাৎ 35। এমনকি মধ্যমাও একই ও উহা 36. ফলে শুধু গড় বা মধ্যমা দিয়ে বিচার করলে শ্রেণীদ্বয়ের পার্থক্য বোঝা যাবে না। তবে দেখা যাচ্ছে A শ্রেণীর মানগুলি একে অন্যের কাছাকাছি এবং উহার গড় ও মধ্যমারও কাছাকাছি। কিন্তু B শ্রেণীর মানগুলির মধ্যে সেরকম কোনও বৈশিষ্ট্য পাওয়া যাচ্ছে না। এবং একে অপরের থেকে খুবই ছড়ানো অবস্থায় আছে। এইজন্য আমরা B-শ্রেণীর মানগুলি থেকে বেশি ছড়িয়ে আছে বলতে পারি। এ থেকে বুঝতে পারা যাচ্ছে, কেবলমাত্র গড় পরিসংখ্যা বিভাজনের সব বৈশিষ্ট্য প্রকাশের ক্ষেত্রে যথেষ্ট নয় এবং যেহেতু বিস্তৃতির পরিমাপের প্রয়োজন আছে।



7.2.1 বিস্তৃতির পরম পরিমাপসমূহ (Absolute Measures of Disperison)

বিস্তৃতির পরম পরিমাপগুলি হল —

(i) প্রসার (Range)

(ii) চতুর্থক বিচ্যুতি (Quartile Deviation or Semi-interquartile range)

(iii) গড় বিচ্যুতি (Mean Deviation)

(iv) সম্যক বিচুতি (Standard Deviation)

রাশিতথ্যমালার মানগুলি যে এককে প্রকাশিত হয়, পরম বিস্তৃতির পরিমাপও সেই এককে প্রকাশ করা হয়।

(i) প্রসার (Range) :

প্রসার হল রাশিতথ্যমালার রাশিগুলির বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম রাশিদ্বয়ের মধ্যে পার্থক্যের মান।

অর্থাৎ, প্রসার = বৃহত্তম মান – ক্ষুদ্রতম মান।

ইহা খুব সহজবোধ্য এবং খুব সহজে ও অল্পসময়ে নির্ণয় করা যায়। পরিসংখ্যা বিভাজনে প্রান্তীয় শ্রেণীবিভাগ যদি মুক্ত (open) থাকে, তবে এইটি পরিমাপ করা যায় না। প্রসার একই হলেও রাশিমালার বিচ্যুতি আলাদা হওয়া সম্ভব। বাস্তবে বিস্তৃতির পরিমাপ হিসেবে এটি খুবকম ব্যবহার করা হয়।

উদাহরণ ১. নিম্নলিখিত রাশিগুলির (টাকায়) প্রসার নির্ণয় করুন।

6, 4, 1, 6, 5, 10, 3

সমাধান : এখানে সর্বোচ্চ মান = 10

সর্বনিম্ন মান = 1

∴ নির্ণেয় প্রসার = (10 – 1) টাকা = 9 টাকা।

(ii) চতুর্থক বিচ্যুতি (Quartile Deviation or Semi-Interquartile Range) :

রাশিমালার মানগুলিকে ঊর্দ্ধক্রমে সাজালে ঠিক মধ্যমস্থানের রাশিটিকে মধ্যমা বলা হয়। রাশিতথ্যমালাকে মানের ঊর্দ্ধক্রমে সাজালে উহার এক-চতুর্থাংশ, দুই-চতুর্থাংশ ও তিন-চতুর্থাংশ অবস্থানে স্থিত রাশি তিনটির মানই তিনটি চতুর্থকের মান। এক-চতুর্থাংশ অবস্থানে স্থিত রাশির মানকে প্রথম চতুর্থক (First Quartile) বা নিম্ন চতুর্থক (Lower Quartile) এবং তিন-চতুর্থাংশ অবস্থানে স্থিত রাশির মানকে তৃতীয় চতুর্থক (Third Quartile) বা উচ্চ চতুর্থক (Upper Quartile) বলে। দ্বিতীয় চতুর্থকের মান রাশিমালার মধ্যমার মানের সমান হবে। সাধারণত প্রথম চতুর্থক Q_1 এবং তৃতীয় চতুর্থক Q_3 দ্বারা সূচিত করা হয়। রাশিতথ্যমালার রাশিগুলির মোট সংখ্যার এক-চতুর্থাংশ Q_1 অপেক্ষা ছোট ও তিন-চতুর্থাংশ উহার চেয়ে বড় হয় এবং মোট সংখ্যার তিন-চতুর্থাংশ Q_3 অপেক্ষা ছোট এবং এক-চতুর্থাংশ উহার চেয়ে বড় হয়। এদের একটি সাধারণ পরিমাপ হচ্ছে দশমক (Decile) অথবা শততমক (Percentile)। একটি দশমক বা শততমক, Z_p-তম মান হচ্ছে সেই মান যার নিচে p-অংশক রাশি ও উপরে (1 – p) অংশক রাশি রয়েছে।

সরল বিভাজন ছকের ক্ষেত্রে, যদি রাশিগুলির মোট সংখ্যা n হয় এবং ঊর্দ্ধক্রমে সাজানো হয়, তবে $\frac{n}{4}$ -তম এবং $\frac{3n}{4}$ -তম অবস্থানের রাশিদ্বয়ের মান যথাক্রমে Q_1 ও Q_3 -এর মান হবে।

শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা ছকের ক্ষেত্রে, প্রদত্ত রাশিমালার চতুর্থকদ্বয়ের মান নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত সূত্র প্রয়োগ করতে হবে।

$$Q_1 = \ell_1 + \frac{\left(\frac{n}{4} - F\right)}{f_m} \times c \qquad \ldots (1)$$

$$Q_3 = \ell_1 + \frac{\left(\frac{3n}{4} - F\right)}{f_m} \times c \qquad \ldots (2)$$

যেখানে, ℓ_1 = যে শ্রেণীবিভাগে প্রথম বা তৃতীয় চতুর্থক থাকে তার নিম্নসীমানা,

F = যে শ্রেণীতে প্রথম বা তৃতীয় চতুর্থক আছে তার নিচের শ্রেণীর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা,

f_m = যে শ্রেণীতে প্রথম বা তৃতীয় চতুর্থক আছে তার পরিসংখ্যা,

c = যে শ্রেণীতে প্রথম বা তৃতীয় চতুর্থক আছে তার দৈর্ঘ্য এবং

n = মোট পরিসংখ্যা।

নিম্ন ও উচ্চ চতুর্থক থেকে অন্য একটি বিস্তৃতির পরিমাপ পাওয়া যায়। যদি চতুর্থকদ্বয়ের মধ্যে পাথর্ক্য বেশি হয়, তবে রাশিমালার বিস্তৃতিও বেশি হবে। মধ্যমা থেকে নিম্ন চতুর্থকের পার্থক্য এবং উচ্চ চতুর্থকের থেকে মধ্যমার পার্থক্যের গড়কে একটি নতুন বিস্তৃতির পরিমাপ হিসাবে গণ্য করা হয়। ইহাকে চতুর্থক বিচ্যুতি বলা হয়। তাহলে

$$\text{চতুর্থক বিচ্যুতি } (Q) = \frac{(M - Q_1) + (Q_3 - M)}{2}$$

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2} \quad .... (3)$$

যেখানে, Q_1 = নিম্ন চতুর্থক বা প্রথম চতুর্থক,

Q_3 = উচ্চ চতুর্থক বা তৃতীয় চতুর্থক।

চতুর্থক বিচ্যুতিকে অর্ধ-চতুর্থক প্রসারও (Semi Interquartile Range) বলা হয়।

উদাহরণ ২. একক-৩-এর উদাহরণ ১১ (ii)-এর চতুর্থক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

সমাধান : সংখ্যাগুলিকে মানের উর্দ্ধক্রমে সাজিয়ে পাই,

29, 33, 54, 57, 61, 70, 72, 86, 88, 91

মোট রাশির সংখ্যা = n = 10

∴ প্রথম চতুর্থক $(Q_1) = \frac{n}{4}$ তম বা 2.5 তম রাশি = 3 তম রাশি = 54

∴ তৃতীয় চতুর্থক $(Q_3) = \frac{3n}{4}$ তম বা 7.5 তম রাশি = 8 তম রাশি = 86

$$\therefore \text{ নির্ণেয় চতুর্থক বিচ্যুতি } (Q) = \frac{86 - 54}{2} = 16$$

উদাহরণ ৩. একক-৩-এর উদাহরণ ১২-এর চতুর্থক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে, $\frac{N}{4} = \frac{116}{4} = 29$ এবং $\frac{3N}{4} = 87$

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা স্তম্ভ পর্যবেক্ষণ করে পাই,

প্রথম চতুর্থক $(Q_1) = 1$ এবং তৃতীয় চতুর্থক $(Q_3) = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় চতুর্থক বিচ্যুতি $(Q) = \frac{3-1}{2} = 1$

উদাহরণ ৪. একক-৩-এর উদাহরণ ১৩-এর চতুর্থক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে $\frac{n}{4} = \frac{300}{4} = 75$ এবং $\frac{3n}{4} = 225$

$\therefore$ প্রথম চতুর্থক $(Q_1) = 1200 + \frac{(75-40)}{59} \times 100 = 1259.32$ টাকা।

$\therefore$ তৃতীয় চতুর্থক $(Q_3) = \ell_1 + \frac{\left(3\frac{n}{4} - F\right)}{f_m} \times c$

$= 1400 + \frac{(225-199)}{41} \times 100 = 1463.41$ টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় চতুর্থক বিচ্যুতি $(Q) = \frac{(Q_3 - Q_1)}{2} = 102.045$ টাকা।

(iii) গড় বিচ্যুতি (Mean Deviation) :

গড় বিচ্যুতি হল কোনও একটি চলকের মানগুলির কোনও একটি (কেন্দ্রীয় প্রবণতার মাপকের গড়, যখন মধ্যমা বা সংখ্যাগুরু মান) মান থেকে উহাদের মানগুলির বিস্তৃতির একটি পরম পরিমাপ এবং উহার মান, যৌগিক গড়, মধ্যমা বা ভূয়িষ্ঠক থেকে চলকের মানগুলির ধনাত্মক পার্থক্যের যৌগিক গড়ের সমান।

যদি কোনও একটি চলকের n-সংখ্যক মানগুলি যথাক্রমে $x_1, x_2, ...x_n$ এবং ঐ মানগুলির যৌগিক গড় $\overline{x}$ হয় তবে, $\overline{x}$ এর সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি হল—

$$MD_{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n} \quad ... (4)$$

আবার, যদি $x_1, x_2, ..., x_k$ এর পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, ..., f_k$ হয়, তবে গড় বিচ্যুতি,

$$MD_{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i - \overline{x}| f_i}{n} \quad ... (5)$$

যেখানে, $n = \sum_{i=1}^{k} f_i$

উদাহরণ ৫. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় ও মধ্যমার সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় কর।

46, 79, 26, 85, 39, 65, 99, 29, 56, 72

সমাধান : প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে মানের ঊর্দ্ধক্রমে সাজিয়ে পাই,

26, 29, 39, 46, 56, 65, 72, 79, 85, 99

এখানে, n = 10

$\therefore$ $\frac{n}{2}$ তম বা 5 তম ও $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ -তম বা 6 তম মানের যৌগিক গড় $\frac{56+65}{2} = 60.5$ কে মধ্যমা হিসাবে ধরা যাক।

আবার সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় = $\frac{26+29+39+46+56+65+72+79+85+99}{10}$

$= \frac{596}{10} = 59.6$

গড় বিচ্যুতি নির্ণয়ের গণনা কার্য :

রাশির মান (x)	**রাশিগুলির যৌগিক গড় থেকে ধনাত্মক পার্থক্য = |x − 59.6|**	**রাশিগুলির মধ্যমা থেকে ধনাত্মক পার্থক্য = |x − 60.5|**
26	33.6	34.5
29	30.6	31.5
39	20.6	21.5
46	13.6	14.5
56	3.6	4.5
65	5.4	4.5
72	12.4	11.5
79	19.4	18.5
85	25.4	24.5
99	39.4	38.5
মোট	204.0	204.0

$\therefore$ যৌগিক গড়ের সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতির মান, $MD_{\bar{x}} = \frac{204}{10} = 20.4$

$\therefore$ মধ্যমার সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতির মান, $MD_{M\bar{e}} = \frac{204}{10} = 20.4$

উদাহরণ ৬. একক-৩ এর উদাহরণ-২ এর ক্ষেত্রে মধ্যমার সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ময় করুন।

সমাধান : গড় বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য গণনাকার্য :

দূরভাষ (x)	পরিসংখ্যা (f)	যৌগিক পরিসংখ্যা	|x − Me|	|x − Me| f
0	4	4	4	16
1	10	14	3	30
2	13	27	2	26
3	21	48	1	21
4	23	71	0	0
5	21	92	1	21
6	17	109	2	34
7	10	119	3	30
8	1	120	4	4
মোট	120	—	—	182

এখানে মধ্যমা, Me = 4

$\therefore$ মধ্যমার সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি, $MD_{Me} = \frac{182}{120} = 15.17$ (প্রায়)

উদাহরণ 7. নিম্নের রাশিতথ্যের যৌগিক গড় ও মধ্যমা সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

শ্রেণীবিভাগ	0–10	10–20	20–30	30–40
পরিসংখ্যা	2	6	8	4

সমাধান : যৌগিক গড় ও মধ্যমা নির্ণয়ের গণনাকার্য

শ্রেণীবিভাগ	**পরিসংখ্যা (f)**	**মধ্যমান (x)**	**x− A (A=25)**	$y = \frac{x-A}{i}$ **(i = 10)**	**fy**	**ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা (অপেক্ষা-কম)**
0 – 10	2	5	– 20	– 2	– 4	2
10 –20	6	15	– 10	1	– 6	8
20 – 30	8	25	0	0	0	16
30 – 40	4	35	10	1	4	20 = N
মোট	N = 20				– 6	

$\therefore$ যৌগিক গড় $(\bar{x}) = A + i \times \left(\frac{\sum fy}{N}\right) = 25 + 10 \times \left(\frac{-6}{20}\right) = 25 - 3 = 22$

এখানে, $\frac{N}{2} = \frac{20}{2} = 10$, উহা ক্রমযৌগি পরিসংখ্যা 8 ও 16 এর মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং শ্রেণীবিভাগ 20 – 30-তে মধ্যমা আছে।

$$\therefore \text{মধ্যমা (M)} = l_1 + \frac{\frac{N}{2} - F}{f_m} \times i = 20 + \frac{10-8}{8} \times 10 = 22.5$$

যৌগিক গড় ও মধ্যমা সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি নির্ণয়ের গণনাকার্য্য

x	f	$\lvert x - \bar{x} \rvert$	$f \times \lvert x - \bar{x} \rvert$	$\lvert x - M \rvert$	$f \times \lvert x - M \rvert$
5	2	17	34	17.5	35
15	6	7	42	7.5	45
25	8	3	24	2.5	20
35	4	13	52	12.5	50
মোট	20	—	152	—	150

$\therefore$ যৌগিক গড় সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি $\frac{\sum fx \lvert x - \bar{x} \rvert}{N} = \frac{152}{20} = 7.6$

এবং মধ্যমা সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি $= \frac{\sum f \times \lvert x - M \rvert}{N} = \frac{150}{20} = 7.5$

(iv) সম্যক বা প্রমাণ বিচ্যুতি (Standard Deviation) :

সম্যক বিচ্যুতি বিস্তৃতির সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ পরম পরিমাপক এবং ইহার মান রাশিমালার যৌগিক গড় থেকে রাশিগুলির পার্থক্যের বর্গের যৌগিক গড়ের ধনাত্মক বর্গমূলের সমান।

সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয়ের সূত্রাবলী :

(ক) সরল সংখ্যাশ্রেণীর সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত যে কোনও একটি সূত্র প্রয়োগে করা যায় :

(i) $s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ ... (6)

(ii) $s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$ ... (7)

(খ) পরিসংখ্যা বিভাজন ছক থেকে সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য নিম্নলিখিত যে কোনও একটি সূত্র প্রয়োগে করা যায় :

(i) $s=\sqrt{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2 f_i}{n}}$ .... (8)

(ii) $s=\sqrt{\dfrac{\sum x_i^2 f_i}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\dfrac{\sum x_i^2 f_i}{n}-\left(\dfrac{\sum x_i f_i}{n}\right)^2}$

$=\dfrac{\sqrt{n\sum x_i^2 f_i-(\sum x_i f_i)^2}}{n}$ .... (9)

(iii) $S/A=i\times\left\{\sqrt{\dfrac{\sum fy^2}{n}-\left(\dfrac{\sum fy}{n}\right)^2}\right\}$ ... (10)

সেখানে, $y=\dfrac{x-A}{i}$

যেখানে, s : সম্যক বা প্রমাণ বিচ্যুতির প্রতীক।

$\bar{x}:x_1,x_2,..........x_n$ -এর যৌগিক গড়।

$n=\sum f_i$ = পরিসংখ্যা বিভাজনের মোট পরিসংখ্যা।

সম্যক বা প্রমাণ বিচ্যুতির ধর্ম :

(ক) যদি চলকের মানগুলি সমান হয়, তবে সম্যক বিচ্যুতির মান শূন্য হবে। অর্থাৎ

$x_i = c$; i = 1, 2,...........n হলে s = 0

(খ) সম্যক বিচ্যুতির মান মূল বিন্দুর অবস্থানের ওপর (Origin) নির্ভর করে না, কিন্তু চলকের একক বা স্কেলের (Unit or Scale) ওপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ, যদি $l=\dfrac{x-a}{c}$ হয়, তবে $S_x=|c|S_l$

(গ) যদি x_1, x_2, ..., x_{n_1} এই n_1 সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় ও সম্যক বিচ্যুতি $\bar{x}$ ও s_x এবং y_1, y_2, ... y_{n_2} -এই n_2 সংখ্যক রাশির যৌগিক গড় ও সম্যক বিচ্যুতি $\bar{y}$ ও s_y হয়, তবে x_1, x_2, ... x_{n_1}, y_1, y_2, ..., y_{n_2} -এই $(n_1 + n_2)$ সংখ্যক রাশির সম্যক বিচ্যুতি হবে

$$\sigma=\left\{\frac{n_1 s_x^2+n_2 s_y^2}{n_1+n_2}+\frac{n_1\left(\bar{x}-\bar{\bar{x}}\right)^2+n_2\left(\bar{y}-\bar{\bar{x}}\right)^2}{n_1+n_2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

যেখানে, $\bar{\bar{x}} = \frac{n_1\bar{x} + n_2\bar{y}}{n_1 + n_2}$

(ঘ) সম্যক বিচ্যুতি রাশিগুলির পার্থক্যের বর্গের যৌগিক গড়ের ধনাত্মক বর্গমূলগুলোর মধ্যে সবচেয়ে ছোটো।

অর্থাৎ, $\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2} \le \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i - A)^2}$ যে কোনও A-এর জন্য।

উদাহরণ ৮. নিম্নলিখিত রাশিগুলির সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় কর : 49, 63, 46, 59, 65, 52, 60, 54

সমাধান :

সম্যক বিচ্যুতির গণনা কার্য :

রাশি (x)	যৌগিক গড় 56 হইতে রাশিগুলির পার্থক্য, d = x − 56	d^2
49	− 7	49
63	7	49
46	− 10	100
59	3	9
65	9	81
52	− 4	16
60	4	16
54	− 2	4
448	—	324

রাশিগুলির যৌগিক গড়, $\bar{x} = \frac{448}{8} = 56$

∴ নির্ণেয় সম্যক বিচ্যুতি ∴ $s = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{324}{8}} = \frac{9}{2}\sqrt{2} = 6.36$ (প্রায়)

উদাহরণ ৯. নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজনের সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

x	5	15	25	35	45	55	65	75
f	3	7	9	23	15	8	6	4

সমাধান :

সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয়ের গণনা কার্য :

x	f	$y = \frac{x-35}{10}$	fy	fy^2
5	3	– 3	– 9	27
15	7	–2	– 14	28
25	9	– 1	– 9	9
35	23	0	0	0
45	15	1	15	15
55	8	2	16	32
65	6	3	18	54
75	4	4	16	64
মোট	75	—	33	229

এখন, $s_y^2 = \frac{\sum f_i y_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i y_i}{n}\right)^2 = \frac{229}{75} - \left(\frac{33}{75}\right)^2 = 3.053 - (0.44)^2 = 2.859$

$\therefore \ S_y = \sqrt{2.859} = 1.69$

$\therefore \ s_x = |c| s_y = 10 \times 1.69 = 16.9$

উদাহরণ ১০. একটি পরীক্ষায় ২০০ জন ছাত্রের প্রাপ্ত নম্বর নিম্নরূপ :

নম্বর	ছাত্রসংখ্যা
10-এর কম	28
20-এর কম	60
30-এর কম	100
40-এর কম	150
50-এর কম	174
60-এর কম	190
70-এর কম	200

উক্ত রাশিতথ্যের যৌগিক গড় ও সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত রাশিতথ্য থেকে যৌগিক গড় ও সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয়ের জন্য নীচের ছকটি তৈরি করা হল—

নম্বর	ছাত্রসংখ্যা (f)	মধ্যমান (x)	x – A (A = 35)	$y = \frac{x-A}{i}$ (i = 10)	fy	fy^2
0 – 10	28	5	– 30	– 3	– 84	252
10 – 20	32	15	– 20	– 2	– 64	128
20 – 30	40	25	– 10	– 1	– 40	40
30 – 40	50	35 = A	0	0	00	00
40 – 50	24	45	10	1	24	24
50 – 60	16	55	20	2	32	64
60 – 70	10	65	30	3	30	90
মোট	n = 200	—	—	—	– 102	598

$\therefore$ যৌগিক গড় $(\bar{x}) = A + i \times \left(\frac{\sum fy}{n}\right) = 35 + 10 \times \left(\frac{-102}{200}\right)$

$= 35 - \frac{51}{10} = 35 - 5.1 = 29.9$

সম্যক বিচ্যুতি = $(S.D)_y = \sqrt{\frac{\sum fy^2}{n} - \left(\frac{\sum fy}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{598}{200} - \left(\frac{-102}{200}\right)^2}$

$= \sqrt{2.99 - 0.9601} = \sqrt{2.7299} = 1.652241 = 1.65$ (প্রায়)

$\therefore (S.D)_x = i \times (S.D)_y = 10 \times 1.65 = 16.5$

$\therefore$ নির্ণেয় যৌগিক গড় ও সম্যক বিচ্যুতি যথাক্রমে 29.9 ও 16.5।

7.2.2 বিস্তৃতির পরম পরিমাণসমূহের তুলনামূলক আলোচনা

সমস্ত বিস্তৃতির পরম পরিমাপসমূহ সুসংজ্ঞাত। তবে প্রসারে ক্ষেত্রে প্রান্তীয় শ্রেণীবিভাগদ্বয়ের মধ্যে কমপক্ষে একটি মুক্ত (open) হলে এটি অর্থহীন হয়। চতুর্থক বিচ্যুতি নির্ণয়ে রাশিতথ্যমালার প্রত্যেকটি রাশি ব্যবহৃত হয় না এবং বীজগণিতের সহজ নিয়মাবলী প্রয়োগের ক্ষেত্রে ইহার ব্যবহার সুবিধাজনক নয়। বাস্তবক্ষেত্রে ইহার ব্যবহার খুব সীমিত।

প্রসার সহজে নির্ণয় করা যায়। অন্য পরিমাপগুলোর ক্ষেত্রে গণনাকার্যের শ্রম প্রায় সমপরিমাণ আছে।

প্রসারের তাৎপর্য সহজবোধ্য। চতুর্থক বিচ্যুতি ও গড় বিচ্যুতিও বোধগম্য। কিন্তু সম্যক বিচ্যুতি কিছুটা জটিল।

গড় বিচ্যুতি ও সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয়ে রাশিতথ্যমালার সমস্ত রাশি ব্যবহৃত হয়। কিন্তু চতুর্থক বিচ্যুতির ক্ষেত্রে রাশিতথ্যমালার কিছু রাশি পরিবর্তন করলেও উহার মান অপরিবর্তিত থাকতে পারে। এই দিক থেকে প্রসার

সর্বনিম্নে। প্রসারের ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান দু'টি ঠিক রেখে বাকি সমস্ত রাশি পরিবর্তন করলেও উহার মান অক্ষত থাকে।

সম্যক বিচ্যুতির মান নিরূপণে বীজগণিতের সহজ নিয়মাবলীর প্রয়োগ সম্ভব। সেইজন্য পরিসংখ্যান শাস্ত্রের অন্যান্য বৈশিষ্ট্য পরিমাপক সংখ্যার মান নির্ণয়ে ইহার ব্যাপক প্রয়োগ হয়ে থাকে।

সম্যক বিচ্যুতির সাহায্যে দুই বা ততোধিক সংখ্যাশ্রেণীর মিলিত (combined) বিস্তৃতির পরিমাপ সম্ভব। অন্য কোনও পরিমাপকের সাহায্যে এইরকম পরিমাপ সম্ভব নয়।

এইজন্য সাধারণভাবে সম্যক বিচ্যুতিকে বিস্তৃতির সবচেয়ে ভালো পরিমাপক মনে করা হয়, যেমনভাবে যৌগিক গড়কে কেন্দ্রীয় প্রবণতার সবচেয়ে ভালো পরিমাপক মনে করা হয়।

7.3 বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপ সমূহ (Relative Measures of Dispersion)

মূল রাশিতথ্যমালা যে এককে দেওয়া থাকে, বিস্তৃতির পরম পরিমাপও সেই এককে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং, দুই বা ততোধিক রাশিতথ্যমালা যদি একই এককে প্রকাশিত হয়, তবে সহজেই বিস্তৃতির পরিমাপ পরম মানের সাহায্যে তুলনা করা যায়। কিন্তু দুই বা ততোধিক রাশিমালা যদি বিভিন্ন এককে প্রকাশিত থাকে, তবে বিস্তৃতির পরম মানের সাহায্যে উহাদের তুলনা করা যায় না। এই সকল ক্ষেত্রে বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপের সাহায্যে রাশিতথ্যমালাগুলি তুলনা করা যায়।

বিস্তৃতির কোনও পরম পরিমাপক কোনও কেন্দ্রীয় প্রবণতা মাপকের শতকরায় প্রকাশ করে বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপ (Relative measure) নির্ণয় করা হয়। এর ফলে রাশিতথ্যমালায় এককের ওপর ততোধিক রাশিতথ্যমালার বিস্তৃতির মধ্যে তুলনামূলক আলোচনা এর দ্বারা করা যায়। বিস্তৃতির আপেক্ষিক পরিমাপগুলি হল ঃ

(i) চতুর্থক বিচ্যুতি গুণাঙ্ক (Coefficient of Quartile Deviation)

(ii) গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক (Coefficient of Mean Deviation)

(iii) ভেদাঙ্ক (Coefficient of Variation)

(i) চতুর্থক বিচ্যুতি গুণাঙ্ক (Coefficient of Quartile Deviation) :

$$\text{চতুর্থক বিচ্যুতি গুণাঙ্ক} = \frac{\text{চতুর্থক বিচ্যুতি (Quartile Deviation)}}{\text{মধ্যমা (Median)}} \times 100\%$$

অর্থাৎ, কোন বিভাজনের প্রথম ও তৃতীয় চতুর্থক যথাক্রমে Q_1 ও Q_3 এবং মধ্যমা Q_2 হলে,

$$\text{চতুর্থক বিচ্যুতি গুণাঙ্ক} = \frac{\frac{(Q_3 - Q_1)}{2}}{Q_2} \times 100\% = \frac{Q_3 - Q_1}{2Q_2} \times 100\%$$

উদাহরণ ১১. উদাহরণ ২-এর চতুর্থক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

সমাধান : ∴ চতুর্থক বিচ্যুতি গুণাঙ্ক = $\frac{16}{65.5} \times 100\% = 24.43\%$

(ii) গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক (Coefficient of Mean Deviation) :

গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক হল বিস্তৃতির একটি আপেক্ষিক পরিমাপ এবং ইহার সংখ্যা নিম্নরূপ :

$$\text{গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক} = \frac{\text{গড় বিচ্যুতি (Mean Deviation)}}{\text{যৌগিক গড় বা মধ্যমা (Mean or Median)}} \times 100\%$$

উদাহরণ ১২. উদাহরণ (৫)-এর গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক নির্ণয় করুন।

সমাধান : এখানে যৌগিক গড় = 59.6 ও মধ্যমা = 60.5

গড় বিচ্যুতি = 20.4

∴ যৌগিক গড়ের সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক = $\frac{20.4}{59.6} \times 100\% = 34.23\%$

∴ মধ্যমার সাপেক্ষে গড় বিচ্যুতি গুণাঙ্ক = $\frac{20.4}{60.5} \times 100\% = 33.72\%$

লক্ষনীয় যে, গড় বিচ্যুতি সমান হওয়া সত্ত্বেও যৌগিক গড় ও মধ্যমা ভিন্ন হওয়ার জন্য আপেক্ষিক গড় বিচ্যুতিদ্বয় ভিন্ন।

(iii) ভেদাঙ্ক (Coefficient of Variation) :

ভেদাঙ্ক হল বিস্তৃতির সর্বাপেক্ষা গুরুত্বপূর্ণ আপেক্ষিক পরিমাপ এবং ইহার সংজ্ঞা নিম্নরূপ :

$$\text{ভেদাঙ্ক} = \frac{\text{সম্যক বিচ্যুতি (Standard Deviation)}}{\text{যৌগিক গড়}} \times 100\%$$

উদাহরণ ১৩. উদাহরণ ৮ -এর ভেদাঙ্ক (Coefficient of Variation) নির্ণয় করুন :

সমাধান : মধ্যক = 56 এবং সম্যক বিচ্যুতি = 6.36

∴ নির্ণেয় ভেদাঙ্ক = $\frac{6.36}{56} \times 100\% = 11.36\%$

7.4 অনুশীলনী

(১) একটি পরিসংখ্যা বিভাজনের উভয় প্রান্তিক শ্রেণীভুক্ত হলে বিভাজনটির বিস্তৃতির একটি উপযুক্ত মাপক দাও।

(২) কোনও চলকের মানগুলিকে যদি 10 দিয়ে ভাগ করা হয়, তবে সম্যক বিচ্যুতি কী পরিবর্তন হবে?

(৩) সকল প্রকার বিস্তৃতির মধ্যে কোন্‌গুলি বেশি ব্যবহৃত হয়?

(৪) আপেক্ষিক বিস্তৃতিগুলির মধ্যে কোন্‌টি বেশী ব্যবহৃত হয়?

(৫) বিস্তৃতির পরিমাপ বলতে কী বোঝ? বিস্তৃতির বিভিন্ন পরিমাপ আলোচনা করুন।

(৬) বিস্তৃতির পরম ও আপেক্ষিক পরিমাপের মধ্যে পার্থক্য উদাহরণ সহযোগে আলোচনা করুন।

(৭) বিস্তৃতির পরিমাপক হিসাবে প্রসার, চতুর্থক বিচ্যুতি, গড় বিচ্যুতি ও সম্যক বিচ্যুতির পারস্পরিক সুবিধা সম্বন্ধে আলোচনা করুন।

(৮) প্রসার, চতুর্থক বিচ্যুতি, গড় বিচ্যুতি (যৌগিক গড় ও মধ্যমার সাপেক্ষে) এবং সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

(i) 27, 33, 48, 63, 76, 104, 126

(ii) 24, 35, 51, 65, 78, 106, 129

(৯) নিম্নলিখিত তথ্য হতে গড় বিচ্যুতি (যৌগিক গড় সাপেক্ষে) এবং সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন।

নম্বর	0–10	10 –20	20–30	30–40	40–50
ছাত্রসংখ্যা	10	16	30	32	12

(১০) নিম্নলিখিত তথ্য হতে চতুর্থক বিচ্যুতি এবং সম্যক বিচ্যুতি নির্ণয় করুন :

বেতন	30 – 34	34 – 38	38–42	42 – 46
শ্রমিক সংখ্যা	30	30	20	10

একক 8 ❑ সহগতি ও নির্ভরন (Correlation and Regression)

গঠন

8.0 উদ্দেশ্য

8.1 প্রস্তাবনা

8.2 দ্বিচলভিত্তিক রাশিতথ্য

8.3 বিক্ষেপণ চিত্র

8.4 সহগাঙ্ক

8.4.1 সহগাঙ্ক-এর কয়েকটি ধর্ম

8.5 নির্ভরন তত্ত্ব

8.5.1 নির্ভরনের কয়েকটি ধর্ম

8.6 মানক্রমিক সহগতি

8.7 অনুশীলনী

8.0 উদ্দেশ্য

এই এককটি পড়বার পর আপনি জানতে পারবেন—

- দ্বিচল রাশিতথ্য কী?
- বিক্ষেপণ চিত্র কাকে বলে?
- সহগাঙ্ক কী ও তার ধর্ম।
- নির্ভরনতত্ত্ব কাকে বলে ও তার ধর্ম কী কী?

8.1 প্রস্তাবনা

পূর্ববর্তী কয়েকটি অধ্যায়ে একটি চলকের ভিত্তিতে কীভাবে পরিসংখ্যা বিভাজন গঠন করতে হয় এবং তার বৈশিষ্ট্যগুলি নির্ণয় করা যায় সে সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। কিন্তু ব্যবসা ও অন্যান্য অনুসন্ধান ক্ষেত্রে অনেক সময় দুই বা ততোধিক চলক সম্পর্কে রাশিতথ্য বিশ্লেষণ করা প্রয়োজন হয়। সেই রাশিতথ্যের ভিত্তিতে দুইটি চলরাশির পারস্পরিক সম্পর্ক সম্বন্ধে কী জানা যায় তা এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হবে। উদাহরণস্বরূপ, আয়-ব্যয়, আয়-সঞ্চয়, চাহিদা-মূল্য, যোগান-দাম, মুনাফা-উৎপাদন, মুনাফা-বিক্রয়, ক্রয়-বিক্রয়, বিক্রয়-বিজ্ঞাপন, চাহিদা-যোগান ইত্যাদি। এ ধরনের দ্বিচল ভিত্তিক রাশিতথ্য থেকে প্রধানত দুটি সমস্যা সমাধানের চেষ্টা করা হয়।

প্রথমত, এদের মধ্যে কোনও পারস্পরিক সম্পর্ক আছে কিনা এবং তা থাকলে তাদের সম্পর্কের প্রকৃতি ও গভীরতা পরিমাপ করার চেষ্টা করা। তাদের মধ্যে সরলরেখা ভিত্তিক বা অন্য কোনও বক্ররেখা ভিত্তিক সম্পর্ক আছে কিনা দেখা। এই ঘনিষ্ঠতার প্রকৃতি ও তা কতখানি গভীর তার বিশ্লেষণ হয় সহগতির সাহায্যে।

দ্বিতীয়ত, দুটি চলকের মধ্যে একটির কোনও কিছু মান জানা থাকলে তার ভিত্তিতে অপরটি সম্পর্কে অনুমান করা অর্থাৎ, প্রথম চলকের উপর দ্বিতীয় চলকের একপ্রকার নির্ভরতা নির্ণয় করে তার সাহায্যে প্রথম চলকটির সাহায্যে দ্বিতীয় চলকটিকে অনুমান করা হয় 'নির্ভরন'-এর সাহায্যে।

8.2 দ্বিচলভিত্তিক রাশিতথ্য (Bivariate data)

এই জাতীয় রাশিতথ্যের প্রতিটি বস্তু বা ব্যষ্টির (item) জন দ্বিচল অর্থাৎ, দুটি চলকের সম্পর্কে তথ্য পাওয়া যায়। এখানে প্রথম চলকটিকে যদি x এবং দ্বিতীয় চলককে y ধরা হয়, তবে জোড়া সংখ্যা অর্থাৎ (x,y) মান দেওয়া থাকবে প্রতিটি ব্যষ্টির জন্য। ধরা যাক, এরকম n-জোড়া মান দেওয়া আছে। উদাহরণস্বরূপ, নিম্নে প্রদত্ত তথ্য সারণিটি (সারণি-1)। ধরা যাক, যেখানে দাম (x) এবং যোগান (y) সম্বন্ধে 10 জোড়া মান দেওয়া আছে।

সারণি—৫.১

দাম (টাকায়/কিলোগ্রাম)	10	12	18	16	15	191	18	17	21	23
যোগান (কুইন্টাল)	30	35	45	44	42	48	47	46	51	55

অনেক সময় এরকম জোড়া সংখ্যা যদি আরও বেশি সংখ্যক হয়, তবে এ ধরনের সারণি থেকে তথ্য নিষ্কাশন সমস্যা হবে, সেক্ষেত্রে আমরা দ্বিচলভিত্তিক পরিসংখ্যা বিভাজন গঠন করতে পারি। নিচের পরিসংখ্যা সারণিতে (সারণি-২) 100 টি পরিবারের মোট ব্যয় y এবং খাদ্য-সামগ্রীর ব্যয় (x)-এর ভিত্তিতে গঠিত একটি পরিসংখ্যা বিভাজন দেখনো হয়েছে, যেখানে x এবং y -এর যথাক্রমে 4টি ও 5টি শ্রেণী ব্যবহার করা হয়েছে। ফলে, সারণিটিতে 20টি পৃথক পৃথক কোষ ব্যবহার করা হয়েছে। এই কোষগুলির x এবং y -এর এক জোড়া নম্বর নিয়ে গঠিত এক একটি শ্রেণীর পরিসংখ্যা নির্দেশ করছে।

সারণি—৫.২

খাদ্য-সামগ্রীর ব্যয় ও পারিবারিক আয়ের বিভাজন

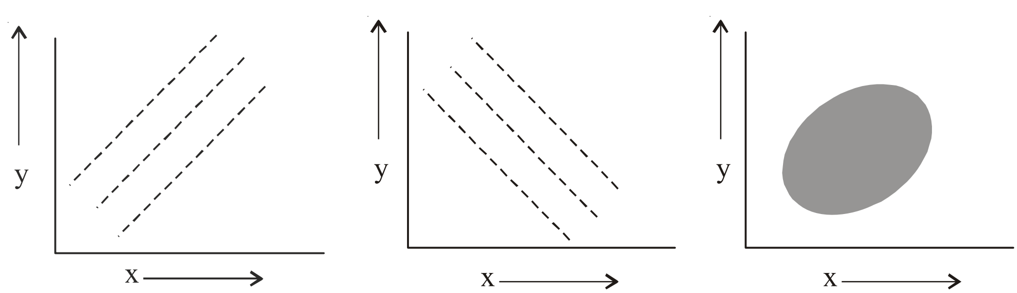
পারিবারিক আয় (টাকায়)

খাদ্য সামগ্রীর ব্যয় (শতাংশ)	2000–3000	3000–4000	4000–5000	5000–6000	6000–7000
10 – 15	—	—	—	3	7
15 – 20	—	4	9	4	3
20 – 25	7	6	12	5	—
25 – 30	3	10	19	8	—

8.3 বিক্ষেপণ চিত্র (Scatter Diagram)

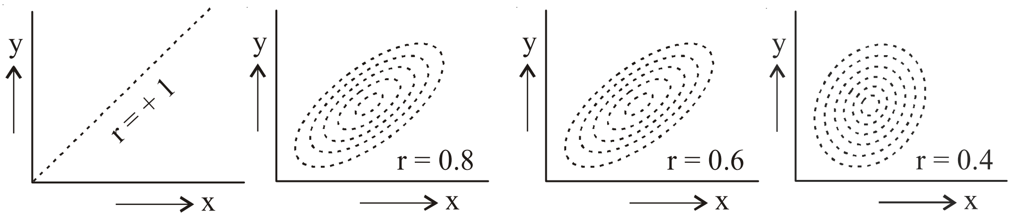
মনে করা যাক, দুটি চলকের সম্পর্কে n-জোড়া মান দেওয়া আছে। এখন রাশিবিজ্ঞান প্রয়োগ করে সহগতির পরিমাণ ও প্রকৃতি নির্ধারণ করা আমাদের উদ্দেশ্য। এই বিষয়ে বিক্ষেপণ চিত্রের অবদান যথেষ্ট। বিক্ষেপণ চিত্র আসলে n-সংখ্যক বিন্দুর একটি জ্যামিতিক চিত্র, যেখানে ঐ বিন্দুগুলি পাওয়া যাবে n সংখ্যক জোড়া মান থেকে। বিক্ষেপণ চিত্রই দুটি চলকের মধ্যে সহগতির পরিমাণ ও প্রকৃতি নির্দেশ করে। পরবর্তী পরিচ্ছেদে দেখা যাবে সহগাঙ্ক (Correlation coefficient) r_{xy} -এর সর্ব্বনিম্ন মান—1 এবং সর্বোচ্চ মান + 1 হয়।

সাধারণভাবে একটি চলকের (x) -এর মান বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে যদি অন্য চলকের (y) মান বাড়তে থাকে অথবা একটি চলকের (x) মান বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে অন্য চলকের (y) মান কমতে থাকে, তবে বুঝতে হবে যে চলদ্বয়ের মধ্যে সহগতি আছে। প্রথম প্রকারের সহগতিকে ধনাত্মক সহগতি ও পরের সহগতিকে **ঋণাত্মক সহগতি** বলে। পক্ষান্তরে, একটি চলকের বৃদ্ধির সঙ্গে অন্যটির লক্ষণীয় বৃদ্ধি বা হ্রাসের কোন প্রবণতাই যদি না থাকে, তবে বলা হয় যে চলদ্বয়ের মধ্যে কোনও সহগতি নেই। এক্ষেত্রে চলক দুটি সহগতি মুক্ত (Uncorrelated) বলা হয়। আবার চলক দুটির মধ্যে যে ধরনের সম্পর্কের কথা বলা হচ্ছে তা মোটামুটিভাবে সরলরেখা সূত্রে প্রকাশযোগ্য। অর্থাৎ দুটি চলকের সহগতি হচ্ছে তাদের একটির পরিবর্তনে অন্যটির সরলরৈখিক পরিবর্তনশীলতা। ধনাত্মক সহগতির ক্ষেত্রে r_{xy}-এর মান ধনাত্মক হয়। অনুরূপে, ঋণাত্মক সহগতির ক্ষেত্রে r_{xy} -এর মান ঋণাত্মক হয়। পক্ষান্তরে, অ-সহগতির ক্ষেত্রে r_{xy}-এর মান শূন্য হয়। এই যে তিনপ্রকার সহগতির কথা বলা হয়েছে তার প্রতিটি ক্ষেত্রে বিক্ষেপণ চিত্রের আকার যে ধরনের হয় তা নিচের চিত্রে দেখান হল—



ধনাত্মক সহগতি ঋণাত্মক সহগতি অ-সহগতি

সহগতির মানের ওপর নির্ভর করে তার ঘনিষ্ঠতার পরিমাণ। উদাহরণ হিসাবে ধনাত্মক সহগতির কথা ধরা যাক অর্থাৎ r_{xy} -এর মান যখন 0 থেকে বাড়তে বাড়তে 1 পর্যন্ত হয়, তখন ঘনিষ্ঠতার যে পরিবর্তন করা হয় তা জ্যামিতিক চিত্রে নিচে দেখানো হল।



চিত্রটি থেকে পরিষ্কার বোঝা যাচ্ছে, r_{xy}-এর মান যতই 0 থেকে 1-এর দিকে যাচ্ছে ততই চলরাশি দু'টির মধ্যে ঘনিষ্ঠতা বাড়ছে। অনুরূপে, ঋণাত্মক সহগতির মানও যখন 0 থেকে কমতে কমতে –1 এর দিকে যায়, তখন ঘনিষ্ঠতাও ক্রমে বাড়তে থাকে। সহগতি সূচকের মান যখন +1 অথবা –1 হয়, তখন সমস্ত বিক্ষিপ্ত বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থান করে।

8.4 সহগাঙ্ক (Correlation)

মনে কর, দুটি চলক (x, y)-এর প্রত্যেকের n-সংখ্যক মান হল $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots\ldots (x_n, y_n)$। এদের মধ্যে (x_i, y_i) হচ্ছে i-তম ব্যক্তির x এবং y-এর মান। x এবং y-এর মধ্যে কার্ল পিয়ারসন (Karl Pearson)-এর সহগাঙ্কের সংজ্ঞা (যা r_{xy} দিয়ে চিহ্নিত করা হয়) হল,

সহগাঙ্ক = x ত y‌ত্ততত্ততত্তত্ততত্ত / √(x‌ত্ততত্ততত্তত্ততত্ত × y‌ত্ততত্ততত্তত্ততত্ত)

এখানে দু'টি চলরাশি x এবং y-এর সহভেদমান (Covariance) হল ভেদমান-এর অনুরূপ পরিমাপ। কিন্তু ভেদমান যেমন একটি চলকের ক্ষেত্রে প্রযোজ্য, সহভেদমান তেমন দুটি চলকের সহবিচ্যুতি পরিমাপের জন্য প্রয়োজ্য।

সুতরাং,

$$\text{সহগাঙ্ক } \left(r_{xy}\right) = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\ \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2}\ \sqrt{\frac{1}{n}\sum y_i^2 - \bar{y}^2}}$$

$$= \frac{\sum x_i y_i - n.\bar{x}\,\bar{y}}{\sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\cdot\bar{y}}{s_x \cdot s_y}$$

8.4.1 সহগাঙ্ক (r_{xy})-এর কয়েকটি ধর্ম (Properties of Corrclation Coefficient, r_{xy})

(i) সহগাঙ্ক (r_{xy}) একটি বিশুদ্ধ সংখ্যা অর্থাৎ x এবং y যে একক দিয়েই প্রকাশ করা হোক না কেন, সহগাঙ্ক তার প্রভাব থেকে সম্পূর্ণ মুক্ত।

(ii) সহগাঙ্ক, r_{xy}-এর সর্বনিম্ন মান – 1 এবং সর্বোচ্চ মান + 1 অর্থাৎ, – 1 # r_{xy} # + 1

প্রমাণ : মনে কর, x ও y দুইটি চলক এবং (x_1, y_1), (x_2, y_2),........... (x_n, y_n) উহাদের n-জোড়া মান। $\bar{x}$, $\bar{x}$ উহাদের গড়দ্বয় এবং s_x, s_y উহাদের সম্যক বিচ্যুতিদ্বয়।

মনে করো, $u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$ এবং $v_i = \frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$

তাহলে, $\sum u_i^2 = \sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{s_x^2} = \frac{ns_x^2}{s_x^2} = n$

অনুরূপ, $\sum v_i^2 = \sum\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right)^2 = n$

আবার, $\sum v_i u_i = \sum\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right) = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_1 - \bar{y})}{s_x s_y} = \frac{nr_{xy}s_x s_y}{s_x \cdot s_y} = n.r_{xy}$

যেহেতু $(u_i + v_i)^2$ কখনও ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই $\sum(u_i + v_i)^2 \geq 0$

$$\sum(u_i + v_i)^2 \geq 0$$

বা, $\sum u_i^2 + \sum v_i^2 + 2\sum u_i v_i \geq 0$

বা, $n + n + 2nr_{xy} \geq 0$

বা, $r_{xy} \geq -1$ .... (*)

অনুরূপে, যেহেতু $(u_i - v_i)^2$ কখনও ঋণাত্মক হতে পারে না, তাই

$$\sum (u_i - v_i)^2 \geq 0$$

বা, $\sum u_i^2 + \sum v_i^2 - 2\sum u_i v_i \geq 0$

বা, $n + n - 2nr_{xy} \geq 0$

বা, $r_{xy} \leq 1$ ... (**)

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1$$

(iii) x ও y-এর মূলবিন্দু ও মাত্রার (Origin and Scale) পরিবর্তনে সহগাঙ্ক (r_{xy})-এর মানের পরিবর্তন হয় না, যদি মাত্রাদ্বয় সমচিহ্ন বিশিষ্ট হয়। যদি মাত্রাদ্বয় বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয়, তবে নতুন চলদ্বয়ের সহগাঙ্ক পূর্বোক্ত সহগাঙ্কের বিপরীত চিহ্নযুক্ত হয়।

অর্থাৎ যদি $u = \frac{x-a}{b}$ এবং $v = \frac{y-c}{d}$ হয় তবে,

$r_{uv} = r_{xy}$ যদি b ও d একই চিহ্নবিশিষ্ট হয়।

$= -r_{xy}$ যদি b ও d বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয়।

প্রমাণ : মনে করে, x ও y দুটি চলক ও $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots (x_n, y_n)$ উহাদের n-জোড়া মান। এখন x ও y-এর মূল a ও c বিন্দুতে এবং মাত্রাদ্বয় b ও d পরিমাণ পরিবর্তন করা হল।

তাহলে, $u_i = \frac{x_i - a}{b}$ এবং $v_i = \frac{y_i - c}{d}$ .... (A)

(A) থেকে পাই, $x_i = a + bu_i$ এবং $y_i = c + dv_i$

তাহলে, $\overline{x} = a + b\overline{u}$ এবং $\overline{y} = a + d\overline{v}$

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum(a + bu_i - a - b\overline{u})^2 = \frac{b^2}{n}\sum(u_1 - \overline{u})^2 = b^2 s_u^2$$

$\therefore \quad s_x = |\,b\,| s_u$

অনুরূপে, $s_y = |d| s_v$

এখন, $\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n}\sum(a + bu_i - a - b\bar{u})(c + dv_i - c - d\bar{v})$

$$= bd\frac{1}{n}\sum(u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})$$

$$\therefore \quad r_{xy} = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_1 - \bar{y})}{s_x s_y}$$

$$= \frac{bd}{|b|\cdot|d|}\cdot\frac{\frac{1}{n}\sum(u_i - \bar{u})(v_1 - \bar{v})}{s_u \cdot s_v}$$

$$= \frac{bd}{|b|\cdot|d|}\cdot r_{uv}$$

$$\therefore r_{uv} = \frac{|b|\cdot|d|}{bd}\cdot f_{xy}$$

$\therefore r_{uv} = r_{xy}$ যদি b ও d সমচিহ্ন বিশিষ্ট হয়।

$= -r_{xy}$ যদি b ও d বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয়।

উদাহরণ ১. কোনও বাজারে পরপর ৪ সপ্তাহে আলুর দর (x) ও বিক্রয় পরিমাণ (y) সংক্রান্ত তথ্য দেওয়া আছে। দর ও বিক্রয় পরিমাণের মধ্যে সহগাঙ্কের মান নির্ণয় কর এবং তোমার মতামত দিন।

x (টাকা/কেজি)	5.2	6.3	6.8	6.5	5.8	5.4	6.0	6.5
y (কুইন্ট্যাল)	19.4	17.0	15.1	16.2	17.8	19.5	16.5	15.2

সমাধান : সহগাঙ্ক নির্ণয়ের জন্য গণনা কার্য :

সপ্তাহ	কেজি প্রতি দর (টাকায়) (x_i)	বিক্রয় পরিমাণ (কুঃ) (y_i)	$u_i = x_i - 6$	$v_i = y_i = 18$	u_1^2	v_1^2	u_iv_i
1	5.2	19.4	– 0.8	1.4	0.64	1.96	– 1.12
2	6.3	17.0	0.3	– 1.0	0.09	1.00	– 0.30
3	6.8	15.1	0.8	– 2.9	0.64	8.41	– 2.32
4	6.5	16.2	0.5	– 1.8	0.25	3.24	– 0.90
5	5.8	17.8	– 0.2	– 2.0	0.04	0.04	0.04
6	5.4	19.5	– 0.6	1.5	0.36	2.25	– 0.90
7	6.0	16.5	0.0	– 1.5	0.00	2.25	– 0.00
8	6.5	15.2	0.5	– 2.8	0.25	7.84	– 1.40
মোট	—	—	0.5	– 7.3	2.27	26.99	– 6.90

যদি x ও y -এর সহগাঙ্ক r_{xy} হয়, তবে

$$r_{xy} = r_{uv} = \frac{n\sum u_i v_i - \left(\sum u_i\right)\left(\sum v_i\right)}{\sqrt{\left\{n\sum u_i^2 - \left(\sum u_i\right)^2\right\}\left\{n\sum v_i^2 - \left(\sum v_i\right)^2\right\}}}$$

$$= \frac{8 \times (-6.9) - (0.5)(-7.3)}{\sqrt{\left\{8 \times 2.27 - (0.5)^2\right\}\left\{8 \times 26.99 - (-7.3)^2\right\}}}$$

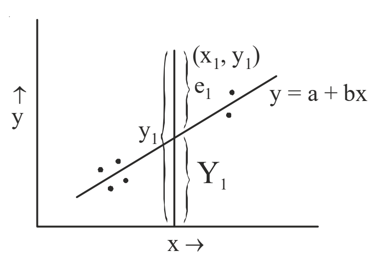
$$= \frac{51.55}{4.232 \times 12.753} = -0.955$$

নির্ণেয় সহগাঙ্কের মান খুব বেশি, আবার উহার ধনাত্মক বলে এটা স্পষ্ট যে, আলুর কেজি প্রতি দর বাড়লে বিক্রয় পরিমাণ কমবে এবং চলক দুটির সম্পর্ক ঋণাত্মক ঢাল সহ প্রায় ঋজুরৈখিক।

8.5 নির্ভরন তত্ত্ব (Regression Theory)

অনেক সময় দেখা যায়, দুটি চলকের মধ্যে একটি অপরটির ওপর কোনও না কোনভাবে নির্ভরশীল। যেমন—মুনাফার পরিমাণ নির্ভর করে বিক্রয়ের পরিমাণের ওপর। কোনও পরিবারে ব্যয় নির্ভর করে পরিবারের মোট আয়ের ওপর ইত্যাদি। এই নির্ভরশীলতার কথা মনে রেখে, যে চলকটি অপর চলকটির ওপর নির্ভর করছে সেটিকে নির্ভরী বা অধীন চলক (dependent variable) এবং অপরটি স্বনির্ভর বা অনপেক্ষ বা স্বাধীন চলক (independent variable) বলে। এই নির্ভরতার পরিপ্রেক্ষিতে স্বনির্ভর চলকটির মান সম্পর্কে কোনও জ্ঞাত তথ্য থেকে নির্ভরী চলকটির মান সম্পর্কে রাশিবিজ্ঞান সম্মত ও নির্ভরযোগ্য কোনও অনুমান করা যায় কিনা সেটাই আমাদের প্রধান উদ্দেশ্য।

মনে কর, x হচ্ছে একটি স্বাধীন বা অনপেক্ষ চলক ও y আর একটি চলক। এখন x এবং y-এর নির্ভরতা অনুমান করার উপায় হচেছ x-এর মানের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে y-এরও মানের পরিবর্তন হচ্ছে কিনা দেখা। যদি চলকদ্বয়ের মধ্যে মোটামুটি সরলরৈখিক সম্পর্ক থাকে তবে আমরা বলি উহাদের মধ্যে সরল নির্ভরন (Simple regression) আছে। যদিও প্রকৃত নির্ভরনের স্বরূপটি অনুমান করা বেশ কঠিন, y = a + bx, যেখানে a ও b দুটি ধ্রুবক, রেখাটিকে x-এর উপর y-এর নির্ভরণ রেখা হিসাবে ধরা যেতে পারে।



উপরোক্ত বিক্ষেপণ চিত্রটি দেখে আমরা x-এর উপর y -এর একটি নির্ভরণ সরলরেখা (Regression fine) নির্ণয় করছি। (x_i, y_i), i = 1, 2, ... n লেখচিত্রের মধ্যে বিক্ষিপ্ত বিন্দুগুলি হল (x, y) জোড়া মানের সম্পর্ক জ্ঞাত রাশি।

এখানে,

y_i = x-অক্ষের x_i স্থানে y-এর জ্ঞাত রাশি।

Y_i = x-অক্ষের x_i স্থানে y-এর অনুমিত রাশি।

এবং

$$y_i = Y_i + e_i$$
$$= a + bx_i + e_i \quad .... (1)$$

যেখানে, e_i হল x_i বিন্দুতে y-এর জ্ঞাত ও অজ্ঞাত রাশির মধ্যে দূরত্ব।

এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে, (1) নং সমীকরণে a এবং b দুটি অজ্ঞাত রাশি। কাজেই নমুনালব্ধ রাশিতথ্যের ভিত্তিতে এদের দুটি প্রাক্কলক (estimate) নির্ণয় করা দরকার। প্রাক্কলক নির্ণয়ে যে নীতি অনুসরণ করা হয় তাকে লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি (method of least squares) বলে। এই পদ্ধতিতে a ও b-এর মান এমনভাবে নির্ণয় করা হয় যাতে (x_i, y_i) এবং (x_i, Y_i) বিন্দুগুলির দূরত্ব সামগ্রিকভাবে কম হয়। অর্থাৎ a ও b এমনভাবে বেছে নেওয়া হয় যাতে

$$e^2 = \sum_{i=1}^{n} e_1^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2$$

সর্বাপেক্ষা কম হয় এই হল লঘিষ্ঠ পদ্ধতি। এই পদ্ধতিতে যে দুটি মৌল বা সুসম্বদ্ধ সমীকরণ (Normal equatons) সমাধান করে a এবং b-এর মান নির্ণয় করা হয় সেগুলি হল :

$$\sum y_i = na + b\sum x_i \qquad ... (2)$$

$$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2 \qquad ... (3)$$

সমীকরণ (2) ও (3)-এর a এবং b ছাড়া সমস্ত রাশি জানা আছে। তাই অতি সহজেই a এবং b-এর মান বের করা যাবে এবং সেগুলি হল :

$$\hat{b} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}.\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad ... (4)$$

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} \qquad ... (5)$$

$\hat{a}$ এবং $\hat{b}$ হল লঘিষ্ঠ গড় পদ্ধতিতে নির্ণয় করা a এবং b-এর প্রাককলিত (estimated) মান।

অনুরূপে, x যদি y-এর ওপর নির্ভরশীল চলক হয়, তবে আমরা y-এর উপর x-এর একটি নির্ভরন সরলরেখার কথা ভাবতে পারি। ধরা যাক, সেটি হল—

$x = c + dy$ .... (6)

এখন x-এর জ্ঞাত রাশির সাথে অনুমিত রাশির দূরত্ব নিয়ে সেগুলির উপর লঘিষ্ঠ বর্গ পদ্ধতি প্রয়োগ করে c এবং d-এর প্রাক্কলক নির্ণয় করা যাবে এবং সেগুলি হল—

$$\hat{d} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2} \qquad \text{.........} (7)$$

এবং $\hat{c} = \bar{x} - \hat{d}\bar{y}$ .... (8)

8.5.1 নির্ভরনের কয়েকটি ধর্ম

(a) (i) x-এর উপর y-এর অনুমিত নির্ভরন সরলরেখাটির সমীকরণ হল :

$$y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x}) \qquad \text{..........} (9)$$

যেখানে b_{yx} হল x-এর উপর y-এর নির্ভরাঙ্ক এবং

$$b_{yx} = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x^2} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \qquad \text{..........} (10)$$

(ii) y-এর উপর x-এর অনুমিত নির্ভরন সরলরেখার সমীকরণ হল :

$$x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y}) \qquad \text{..........} (11)$$

যেখানে b_{xy} হল y-এর উপর x-এর নির্ভরাঙ্ক

এবং $b_{xy} = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_y^2} = \frac{\sum x_i, y_i - n\bar{x}.\bar{y}}{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}$ .... (12)

(b) r_{xy}, b_{xy} এবং b_{yx}-এর চিহ্ন সর্বদা একই হয়।

(c) $b_{xy} \times b_{yx} = r^2_{xy}$

(d) x-এর উপর y-এর এবং y-এর উপর x-এর নির্ভরন সরলরেখা দুটি $(\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(d) যখন $r_{xy} = \pm 1$, তখন নির্ভরন সরলরেখা দুটি অভিন্ন রেখাতে রূপান্তরিত হয়।

(f) যখন $r_{xy} = 0$, তখন নির্ভরন সরলরেখা দুটি পরস্পর লম্ব হয়। অর্থাৎ একটি চলক অপর চলকের দ্বারা কোনওভাবেই প্রবাবিত হয় না।

উদাহরণ ২. নিম্নলিখিত রাশিতথ্য থেকে নির্ভরন সরলরেখা দুটি নির্ণয় কর।

বিক্রয়মূল্য (টাকায়)	91	97	108	121	67	124	51	73	111	57
ক্রয়মূল্য (টাকায়)	71	75	69	97	70	91	39	61	80	47

সমাধান : মনে কর, বিক্রয়মূল্যকে x-চলক ও ক্রয়মূল্যকে y-চলক দ্বারা প্রকাশ করা হল :

নির্ভরন সরলরেখা নির্ণয়ের গণনা কার্য :

x	y	$u = x - \bar{x}$	$v = y - \bar{y}$	u^2	v^2	uv
91	71	1	1	1	1	1
97	75	7	5	49	25	35
108	69	18	– 1	324	1	– 18
121	97	31	27	961	729	837
67	70	– 23	0	529	0	0
124	91	34	21	1156	441	714
51	39	– 39	– 31	1521	961	1209
73	61	– 17	– 9	289	81	153
111	80	21	10	441	100	210
57	47	– 33	– 23	1084	529	759
মোট 900	700	0	0	6360	2868	3900

এখন $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{900}{10} = 90$ এবং $\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{700}{10} = 70$

$$b_{yx} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2} = \frac{\sum uv}{\sum u^2} = \frac{3900}{6360} = 0.6132$$

$$b_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(x-\bar{y})}{\sum(y-\bar{y})^2} = \frac{\sum uv}{\sum v^2} = \frac{3900}{2868} = 1.361$$

এক্ষণে, x-এর উপর y-এর নির্ভরন সরলরেখাটি হল :

$$y = \bar{y} + b_{yx}(x - \bar{x})$$

$$= 70 + 0.6132\ (x - 90)$$

$$= 14.812 + 0.6132x$$

এবং y-এর উপর x-এর নির্ভরন সরলরেখাটি হল :

$$x = \bar{x} + b_{xy}(y - \bar{y}) = 90 + 1.361\ (y - 70) = -\ 5.27 + 1.361\ y$$

উদাহরণ ৩. নীচে 7টি শহরে লোকসংখ্যা (x)-এর টি.ভি. সেটের চাহিদা (y)-এর তথ্য দেওয়া হল। x-এর উপর y-এর নির্ভরন সরলরেখাটি নির্ণয়কর। যে শহরের লোকসংখ্যা 30 হাজার, যেখানে অনুমিত কতকগুলি টি. ভি. সেটের চাহিদা থাকবে?

লোকসংখ্যা (x) ('000)	11	14	14	17	17	21	25
টি. ভি. সেটের চাহিদা (y) ('00)	15	27	27	30	34	38	46

সমাধান : x-এর উপর y-এর নির্ভরন সরলরেখা নির্ণয়ের জন্য গণনা কার্য :

শহর	x_i	y_i	$u_i = x_i - \bar{x}$	$v_i = y_i - \bar{y}$	u_i^2	$u_i v_i$
1	11	15	6	– 16	36	96
2	14	27	– 3	– 4	9	12
3	14	27	– 3	– 4	9	12
4	17	30	0	– 1	0	0
5	17	34	0	3	0	0
6	21	38	4	7	16	28
7	25	46	8	15	64	120
মোট	119	217	0	0	134	268

এখন, $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{119}{7} = 17$ এবং $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{217}{7} = 31$

$$b_{yx} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum u_i v_i}{\sum u_i^2} = \frac{268}{134} = 2$$

এক্ষেত্রে x-এর উপর y-এর নির্ভরন সরলরেখাটি হল,

$$y = \bar{y} + b_{yx}(x - \bar{x})$$

$= 31 + 2(x - 17)$

$= -3 + 2x$

তাহলে, x = 30 হলে, y-এর অনুমিত মান হবে,

$y = -3 + 2 \times 30 = 57$

সুতরাং, 30 হাজার লোকসংখ্যা বিশিষ্ট শহরে অনুমিত 5700 টি. ভি. সেটের চাহিদা থাকবে।

উদাহরণ ৪ : x -চলকের ভেদমান 9 এবং নির্ভরনের সমীকরণদ্বয় $8x - 10y + 66 = 0$ এবং $40x - 18y = 214$ হলে, (i) x এবং y-এর গড় (ii) x ও y -এর সহগাঙ্ক এবং (iii) y চলকের প্রমাণ বিচ্যুতির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : (i) আমরা জানি, নির্ভরনের সমীকরণদ্বয় $(\bar{x}, \bar{y})$ বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় সমাধান করে x ও y-এর গড় মান অর্থাৎ $\bar{x}$ ও $\bar{y}$ -এর মান পাওয়া যাবে।

এখানে সমীকরণদ্বয় হল :

$8x - 10y + 66 = 0$ বা, $4x - 5y = -33$ ... (1)

$40x - 18y = 214$ বা, $20x - 9y = 107$ ... (2)

(2) কে (1) **সমীকরণের** 5 গুণ থেকে বিয়োগ করে,

$$\begin{array}{r} 20x - 25y = -165 \\ 20x - 9y = +107 \\ - \quad + \quad - \\ \hline -16y = -272 \end{array}$$

বা, $y = 17$

এখন y-এর মান (1) -এ বসিয়ে পাই,

$4x - 5 \times 17 = -33$

বা, $x = 13$

সুতরাং, x ও y চলকদ্বয়ের গড় মান যথাক্রমে 13 ও 17.

(ii) সমীকরণ (1) থেকে পাই,

$$y = \frac{4x}{5} + \frac{33}{5} \text{ ...... (3)}$$

এবং সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$$x = \frac{9y}{20} + \frac{107}{20} \quad \text{... (4)}$$

মনে কর, সমীকরণ (3) হল x-এর উপর y-এর নির্ভরন সরলরেখা এবং সমীকরণ (4) হল y-এর উপর x-এর নির্ভরন সরলরেখা।

তাহলে, $b_{yx} = \frac{4}{5}$ এবং $b_{xy} = \frac{9}{20}$

সুতরাং, x এবং y-এর সহগাঙ্ক-এর বর্গ অর্থাৎ $r_{xy}^2 = b_{yx} \times b_{xy} = \frac{4}{5} \times \frac{9}{20} = \frac{9}{25}$

অর্থাৎ, $r_{xy} = \pm\frac{3}{5} = \pm 0.6$

যেহেতু b_{xy} এবং b_{yx} উভয়েই ধনাত্মক, তাই r_{xy} এর মান ধনাত্মক হবে।

সুতরাং নির্ণেয় সহগাঙ্ক (r_{xy})-এর মান 0.6

(iii) x-এর ভেদমান 9, প্রদত্ত

আবার, $b_{yx} = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$

বা, $\frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{s_y}{3}$ $[\therefore s_y^2 = 9$ অর্থাৎ $s_x = 3]$

বা, $s_y = 4$

সুতরাং, y-এর প্রমাণ বিচ্যুতি হল 4।

8.6 মানক্রমিক সহগতি (Rank Correlation)

কোনও কোনও সময় দেখা যায়, যে দুটি ভিন্ন চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করতে হবে সেগুলি সবসময় সংখ্যা যোগে পরিমাপযোগ্য নয়, কিন্তু মানক্রমিক (rank)-এ সাজানো যায়। যেমন—শিক্ষার মান—সততা, প্রতিভা—শিল্পবোধ, শিক্ষারমান—আদর্শ ইত্যাদি চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যগুলি সংখ্যা দিয়ে পরিমাপ যোগ্য নয়, কিন্তু এগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সাজানো সম্ভব। এইসকল ক্ষেত্রে কার্ল পিয়াসন-এর সহগাঙ্ক-এর সাহায্যে বৈশিষ্ট্য দুটির মধ্যে সংস্রব পরিমাপ অসম্ভব। এক্ষেত্রে আমরা একটি নতুন ধরনের মাপনাঙ্ক (Coefficient) ব্যবহার করে এদের মধ্যে সংস্রব পরিমাপের চেষ্টা করি। এরকম মাপনাঙ্ককে মানক্রমিক সহগাঙ্ক (Rank Correlation) বলা হয়। এই পরিচ্ছেদে, ব্রিটিশ সংখ্যাতত্ত্ববিদ স্পিয়ারম্যান (Spearman)-এর মানক্রমিক সহগাঙ্কের বিষয় বিশদভাবে আলোচনা করা করা হবে।

মনে কর, A ও B দুটি চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য n-সংখ্যক বিচ্ছিন্ন ব্যক্তির মধ্যে ভিন্ন ভিন্ন মাত্রায় আছে, যাদের মানের ক্রমানুসারে সাজানো যায়। অর্থাৎ n-সংখ্যক ব্যক্তির মধ্যে A চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যটি কার মধ্যে সবচেয়ে বেশি আাছে, তার পরবর্তীমাত্রায় কার মধ্যে আছে ইত্যাদি এবং সবশেষে কার মধ্যে সবচেয়ে স্বল্পমাত্রায় আছে তা নির্ণয় করা যায়। সেইমতো সর্বোচ্চ মাত্রাধিকারীকে 1 পরবর্তী মাত্রাধিকারীকে 2 ইত্যাদি এবং সর্বনিম্ন মাত্রাধিকারীকে মানক্রম -n দেওয়া হল। তাহলে কোনও ব্যক্তিকে মানক্রম i আরোপ করা হবে যদি $(i - 1)$ সংখ্যক ব্যক্তির মধ্যে A চরিত্রটি অধিকতর মাত্রায় থাকে; $i = 1, 2, 3$ ....n। মনে কর, A-এর চরিত্রানুযায়ী, n-সংখ্যক ব্যক্তির অনুক্রম মান হল $u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots u_n$; এখানে u_i $(i = 1, 2 \ldots\ldots n)$ হচ্ছে 1, 2, 3,............n-এর মধ্যবর্তী যে কোনও একটি সংখ্যা এবং $i \neq j$ হলে $u_i \neq u_j$ হবে। অনুরূপভাবে, B-এর চরিত্রানুযায়ী, ঐ n-সংখ্যক ব্যক্তির মানক্রম যথাক্রমে $v_1, v_2, \ldots\ldots v_n$; যেখানে v_i $(i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ সংখ্যাটিও 1, 2, 3,........... n-এর মধ্যবর্তী একটি সংখ্যা এবং $i \neq j$ হলে $v_i \neq v_j$ হবে। এখন A ও B বৈশিষ্ট্য দুটির মানক্রমিক সহগাঙ্ক (Rank Correlation) যদি আমরা R দিয়ে চিহ্নিত করি, তবে

$$R = \frac{\text{cov}(u, v)}{\sqrt{\text{var}(u).\,\text{var}(v)}} \quad \ldots\ldots (13)$$

$$= \frac{\text{u ও v-এর সহ-ভেদমান}}{\sqrt{\text{u-এর ভেদমান} \times \text{v-এর ভেদমান}}}$$

এখন স্পিয়ারম্যানের মানক্রমিক সহগাঙ্ক হল,

$$R = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n\left(n^2 - 1\right)} \quad \text{... (14)}$$

যেখানে $d_i = u_i - v_i$; $i = 1, 2, ..., n$

যদি দেখা যায় $u_i = v_i$ হয়, প্রত্যেক $i = 1, 2, ..., n$, -এর জন্য, তবে $R = 1$ অর্থাৎ A ও B বৈশিষ্ট্য দু'টি ধনাত্মকভাবে সম্পূর্ণ সংস্রবযুক্ত। পক্ষান্তরে যদি $v_i = n - u_i + 1$ হয় প্রত্যেক $i = 1, 2, ...n$ এরজন্য, $R = -1$ অর্থাৎ, A ও B চরিত্র দু'টি ঋণাত্মকভাবে সম্পূর্ণ সংস্রবযুক্ত।

মানক্রমিক সহগতির যে সূত্র (14)-এ দেওয়া হয়েছে তাতে উভয় চরিত্রানুযায়ীই প্রত্যেকটির ব্যষ্টির মানক্রম পরস্পর পৃথক। কিন্তু কখনো এমন কখনো হতে পারে যে একাধিক ব্যষ্টি ঠিক সমপরিমাণে কোনও চারিত্রিক বৈশিষ্ট্যের অধিকারী। সেক্ষেত্রে ঐ সকল ব্যষ্টির প্রত্যেককে একই অনুক্রম মান আরোপ করা উচিত। এরকম হলে বলা হয় যে, ঐ ব্যষ্টিগুলির মধ্যে ঐ চারিত্রিক বৈশিষ্ট্য অধিকারের ব্যাপারে সমতা বা সম মানক্রম (tie) সৃষ্টি হয়েছে। সেক্ষেত্রে স্পিয়ারম্যানের মানক্রমিক সহগাঙ্ক হল,

$$R = \frac{\frac{n^2 - 1}{12} - \frac{T_u + T_v}{2} - \frac{1}{2n}\sum d_i^2}{\sqrt{\frac{n^2 - 1}{12} - T_u}\sqrt{\frac{n^2 - 1}{12} - T_v}} \quad \text{.... (15)}$$

যেখানে, $$T_u = \sum_{j=1}^{r} \frac{t\left(t^2 - 1\right)}{12n}$$

$$T_v = \sum_{j=1}^{s} \frac{t'\left(t'^2 - 1\right)}{12n}$$

t_1, t_2 ...., t_r হল u চলকে r টি সমমানক্রমের দৈর্ঘ্য ও t'_1, t'_2, ... t'_s হ'ল v-চলকে sটি সমমানক্রমের দৈর্ঘ্য।

উদাহরণ : ৫. 15 জন ছাত্রের দুটি বিষয়ে প্রাপ্ত নম্বরের মানক্রমানুপাতগুলি নিম্নরূপ :
বিষয় দুটির মানক্রমিক সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন।

ক্রমিক সংখ্যা	A বিষয়ে মানক্রম	B বিষয়ে মানক্রম
1	1	10
2	2	7
3	3	2
4	4	6
5	5	4
6	6	8
7	7	3
8	8	1
9	9	11
10	10	15
11	11	9
12	12	5
13	13	14
14	14	12
15	15	13

সমাধান : মানক্রমিক সহগাঙ্ক নির্ণয়ের গণনাকার্য :

A বিষয়ে মানক্রম (u_i)	B বিষয়ে মানক্রম (v_i)	$d_i = u_i - v_i$	d_i^2
1	10	– 9	81
2	7	– 5	25
3	2	1	1
4	6	– 2	4
5	4	1	1
6	8	– 2	4
7	3	4	16
8	1	7	49
9	11	– 2	4
10	15	– 5	25
11	9	2	4
12	5	7	49
13	14	– 1	1
14	12	2	4
15	13	2	4
মোট	—	—	272

$$\therefore \quad R = 1 - \frac{6 \times 272}{15(225-1)} = 1 - \frac{17}{35}$$

$$= \frac{18}{35} = 0.51 \text{ (আসন্ন)}$$

উদাহরণ ৬. নিচের সারণিতে দশজন বিক্রয়কারীর মেধা পরীক্ষার প্রাপ্ত নম্বর এবং তাদের সাপ্তাহিক বিক্রয় (হাজার টাকায়) দেওয়া আছে। মানক্রমিক সহগতি নির্ণয় করুন।

বিক্রয়কারী	প্রাপ্ত নম্বর	বিক্রয় পরিমাণ (হাজার টাকায়)
1	50	25
2	70	60
3	50	45
4	60	50
5	80	45
6	50	20
7	90	55
8	50	30
9	60	45
10	60	30

সমাধান : মানক্রমিক সহগতি নির্ণয়ের গণনাকার্য :

বিক্রয়কারী	প্রাপ্ত নম্বরের মানক্রম (u)	বিক্রয়ের মানক্রম (v)	d = u – v	d^2
1	8.5	9	– 0.5	0.25
2	3	1	2.0	4.00
3	8.5	5	3.5	12.25
4	5	3	2.0	4.00
5	2	5	– 3.0	9.00
6	8.5	10	– 1.5	2.25
7	1	2	– 1.0	1.00
8	8.5	7.5	1.0	1.00
9	5	5	0.0	0.00
10	5	7.5	– 2.5	6.25
মোট	—	—	—	40.00

দুটি চরিত্র মিলে মোট 4 টি সমানুক্রম আছে। তাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে u-চলকে 4 এবং 3 আর v-চলকে যথাক্রমে 3 এবং 2।

অর্থাৎ, $t_1 = 4, t_2 = 3, t'_1 = 3$ এবং $t'_2 = 2$

সুতরাং, $T_u = \frac{1}{12 \times 10}\left(4^3 - 4 + 3^3 - 3\right) = \frac{84}{120} = 0.7$

আর, $T_v = \frac{1}{120}\left(3^3 - 3 + 2^3 - 2\right) = \frac{30}{120} = 0.25$

সুতরাং, $$R = \frac{\frac{n^2-1}{12} - \frac{T_u + T_v}{2} - \frac{1}{2n}\sum d_i^2}{\sqrt{\frac{n^2-1}{12} - T_u}\sqrt{\frac{n^2-1}{12} - T_v}}$$

$$= \frac{8.25 - 0.475 - 2}{\sqrt{8.25 - 0.70}\sqrt{8.25 - 0.25}}$$

$$= \frac{5.775}{\sqrt{7.55 \times 8.00}}$$

$$= \frac{5.775}{7.77} = 0.74 \text{ (আসন্ন)}$$

8.7 অনুশীলনী

সংক্ষিপ্ত উত্তরের প্রশ্ন :

(১) যদি y-এর উপর x-এর নির্ভরন রেখা ও x-এর উপর y-এর নির্ভরন রেখা সমাপতিত হয়, তবে সহগাঙ্কের মান কত?

(২) যদি $3y - 2x = 9$ এবং $3x - 2y = 7$ দুটি নির্ভরন রেখা হয় তবে x ও y-এর মধ্যকগুলি নির্ণয় করুন।

(৩) যদি $5x + 3y = 6$, y-এর নির্ভরন রেখা হয়, তবে সহগতি কোন্ চিহ্নবিশিষ্ট হবে?

(৪) নির্ভয়নাঙ্কদ্বয়ের গুণফল দেওয়া থাকলে সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক নির্ণয় করা যাবে কি?

(৫) নিচের প্রতিটি ক্ষেত্রে ধনাত্মক সহপরিবর্তন ঋণাত্মক সহ পরিবর্তন অথবা কোনও সহপরিবর্তন নেই কিনা বলুন।

(ক) স্বামী ও স্ত্রীদের বয়স।

(খ) বৃদ্ধি ও জুতার মাপ।

(গ) বীমা কোম্পানির লাভ ও তাদের যতগুলি দাবি পূরণ করতে হয়।

(ঘ) শিক্ষাবর্ষ ও আয়।

(ঙ) বৃষ্টিপাতের পরিমাণ ও উৎপাদিত শস্য।

(৬) নিম্নের প্রদত্ত সহ পরিবর্তন গুণাঙ্ক থেকে x ও y চলকগুলির মধ্যে সম্পর্ক বল :
(ক) – 1 (খ) – 0.6 (গ) 0.8 এবং (ঘ) + 1

(৭) x ও y-এর মধ্যে সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক 0.75। $u=\frac{x-10}{5}$ এবং $y=\frac{y-15}{-6}$ হলে, u ও v-এর মধ্যে সহপরিবর্তন গুণাঙ্ক কত।

(৮) নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে কোন্ সহগতির সাহায্যে সম্পর্ক পরিমাপ করা হয়।
(ক) শিক্ষাগত যোগ্যতা এবং সততা।
(খ) পদমর্যাদা এবং আয়।
(গ) মুনাফা এবং উৎপাদন।

রচনাত্মক প্রশ্ন :

(১) বিক্ষেপণ চিত্র কী ও ইহার ব্যবহারগুলি বর্ণনা করুন। কীভাবে বিক্ষেপণ চিত্রের সাহায্যে সহগতির প্রকার নির্ণয় করা যায়?

(২) সহগাঙ্ক কাকে বলে? সহগাঙ্কের-ব্যবহারগুলি বর্ণনা করুন। এর গুরুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্যগুলি ব্যাখ্যা করুন।

(৩) মানক্রমিক সহগাঙ্ক কাকে বলে? এর ব্যবহারগুলি কী কী?

(৪) নির্ভরন রেখার বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যগুলি বর্ণনা করুন ও সহগাঙ্কের সঙ্গে-এর সম্পর্ক আলোচনা করুন।

(৫) (i) $r_{xy} = +1$, (ii) $r_{xy} = -1$ এবং (ii) $r_{xy} = 0$ হলে নির্ভরন রেখাদ্বয়ের সমীকরণ কিরূপ হবে?

(৬) কোনও সামগ্রীর দর ও যোগানের নিম্নলিখিত মানগুলি থেকে পিয়ারসনের সহগাঙ্কের মান নির্ণয় করুন ও আপনার মতামত দিন।

দর (টাকায়)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
যোগান (কেজিতে)	30	29	29	25	24	24	24	21	18	15

(৭) নিম্নলিখিত তথ্য থেকে কার্ল পিয়ারসনের সহগাঙ্কের মান নির্ণয় করুন :

(i) $\sum x=125, \sum y=80, n=10, \sum x^2=1585, \sum y^2=650, \sum xy=1007$

(ii) $\sum x=140, \sum y=150, n=10, \sum y(x-10)^2=180, \sum(y-15)^2=215, \sum(x-10)(y-15)=60$

(৮) 1990-1999 সালে কোনও প্রতিষ্ঠানের বিনিয়োগ ও লাভের পরিমাণ নিচে দেওয়া হল। এখান থেকে উপযুক্ত নির্ভরন সমীকরণটি চিহ্নিত করে সেটি নির্ধারণ করুন।

বছর :	'90	'91	'92	'93	'94	'95	'96	'97	'98	'99
লাভ (হাজার টাকায়) :	40	45	50	65	70	70	80	85	85	95
বিনিয়োগ : (হাজার টাকায়)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000

(৯) x ও y চলক দু'টির ক্ষেত্রে নির্ভরন রেখা দু'টির সমীকরণ হল $4x - 5y + 33 = 0$ এবং $20x - 9y = 107$। x-এর উপর y-এর ও y-এর উপর x-এর সমীকরণ দুটিকে চিহ্নিত কর। এবং r_{xy} -এর মান নির্ণয় কর। যখন $x = 10$, তখন y-এর অনুমিত মান কত হবে? ঐ মানকে y_0 বলা হলে তখন x-এর অনুমিত মান কত হবে?

(১০) একটি বিষয়ে প্রশিক্ষণ নেওয়ার আগে ও পরে 10 জন সদস্যকে নিম্নলিখিতভাবে মানক্রম দেওয়া হয়েছে :

সদস্য :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
আগের মানক্রম :	1	6	3	9	5	2	7	10	8	4
পরের মানক্রম :	6	8	3	7	2	1	5	9	4	10

উপরের তথ্য থেকে স্পিয়ারম্যানের মানক্রমিক সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন ও আপনার মতামত দিন।

Notes

Notes