উপক্রমণিকা

মহান দেশনায়ক সুভাষচন্দ্র বসুর নামাঙ্কিত নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনে আপনাকে স্বাগত। ২০১১-এ এই প্রতিষ্ঠান দেশের সর্বপ্রথম রাজ্য সরকারি মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় হিসাবে ন্যাক (NAAC) মূল্যায়নে 'এ' গ্রেড প্রাপ্ত হয়েছে এবং ২০২৪-এ সমগ্র দেশের মুক্ত শিক্ষাব্যবস্থা ক্ষেত্রে NIRF মূল্যায়নে দ্বিতীয় স্থান অধিকার করেছে। পাশাপাশি, ২০২৪-এই 12B-র অনুমোদন প্রাপ্তি ঘটেছে।

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশন প্রকাশিত জাতীয় শিক্ষানীতি (NEP, ২০২০)-র নির্দেশনামায় সিবিসিএস পাঠক্রম পদ্ধতির পরিমার্জন ঘটানো হয়েছে। জাতীয় শিক্ষানীতি অনুযায়ী Curriculum and Credit Framework for Undergraduate Programmes (CCFUP)-এ চার বছরের স্নাতক শিক্ষাক্রমকে ছ'টি পৃথক প্রকরণে বিন্যস্ত করার কথা বলা হয়েছে। এগুলি হল—'কোরকোর্স', 'ইলেকটিভ কোর্স', 'মাল্টি ডিসিপ্লিনারি কোর্স', 'স্কিল এনহান্সমেন্ট কোর্স', 'এবিলিটি এনহ্যান্সমেন্ট কোর্স' এবং ভ্যালু অ্যাডেড কোর্স। ক্রেডিট পদ্ধতির ভিত্তিতে বিন্যস্ত এই পাঠক্রম শিক্ষার্থীর কাছে নির্বাচনাত্মক পাঠক্রমে পাঠ গ্রহণের সুবিধা এনে দেবে। এরই সঙ্গে যুক্ত হয়েছে যান্মাসিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা এবং ক্রেডিট ট্রান্সফারের সুযোগ। জাতীয় শিক্ষানীতি পরিমাণগত মানোন্নয়নের পাশাপাশি গুণগতমানের বিকাশ ঘটানোর লক্ষ্যে National Higher Education Qualifications Frmework (NHEQF), National Credit Framework (NCrF) এবং National Skills Qualification Framework (NSQF)-এর সঙ্গে সাযুজ্য রেখে চার বছরের স্নাতক পাঠক্রম প্রস্তুতির দিশা দেখিয়েছে। শিক্ষার্থী-কেন্দ্রিক এই ব্যবস্থা মূলত গ্রেড-ভিত্তিক, যা অবিচ্ছিন্ন ও অভ্যন্তরীণ মূল্যায়ণের মাধ্যমে সার্বিক মূল্যায়ণের দিকে অগ্রসর হবে এবং শিক্ষার্থীকে বিষয় নির্বাচনের ক্ষেত্রে যথোপযুক্ত সুবিধা দেবে। শিক্ষাক্রমের প্রসারিত পরিসরে বিবিধ বিষয় চয়নের সক্ষমতা শিক্ষার্থীকে দেশের অন্যান্য উচ্চশিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আন্তঃব্যবস্থায় অর্জিত ক্রেডিট স্থানান্তরে সাহায্য করবে। শিক্ষার্থীর অভিযোজন ও পরিগ্রহণ ক্ষমতা অনুযায়ী পাঠক্রমের বিন্যাস এই জাতীয় শিক্ষানীতির লক্ষ্য। উচ্চশিক্ষার পরিসরে এই পদ্ধতি এক বৈকল্পিক পরিবর্তনের সূচনা করেছে। আগামী ২০২৫-২৬ শিক্ষাবর্ষ থেকে স্নাতক স্তরে এই নির্বাচনভিত্তিক পাঠক্রম কার্যকরী করা হবে, এই মর্মে নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয় সিদ্ধান্ত গ্রহণ করেছে। বর্তমান পাঠক্রমগুলি উচ্চশিক্ষাক্ষেত্রে নির্ণায়ক কৃত্যকের যথাবিহিত প্রস্তাবনা ও নির্দেশাবলী অনুসারে রচিত ও বিন্যস্ত হয়েছে। বিশেষ গুরুত্বারোপ করা হয়েছে সেইসব দিকগুলির প্রতি যা ইউ.জি.সি-র জাতীয় শিক্ষানীতি, ২০২০ কর্তৃক চিহ্নিত ও নির্দেশিত।

মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের ক্ষেত্রে সব শিক্ষা পাঠ-উপকরণ শিক্ষার্থী-সহায়ক পরিষেবার একটি গুরুত্বপূর্ণ অংশ। সি.বি.সি.এস পাঠক্রমের এই পাঠ-উপকরণ মূলত বাংলা ও ইরেজিতে লিখিত হয়েছে। শিক্ষার্থীদের সুবিধের কথা মাথায় রেখে আমরা ইংরেজি পাঠ-উপকরণের বাংলা অনুবাদের কাজেও এগিয়েছি। বিশ্ববিদ্যালয়ের আভ্যন্তরীণ শিক্ষকরাই মূলত পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতির ক্ষেত্রে অগ্রণী ভূমিকা নিয়েছেন, যদিও পূর্বের মতোই অন্যান্য বিদ্যায়তনিক প্রতিষ্ঠানের সঙ্গে সংযুক্ত অভিজ্ঞ বিশেষজ্ঞ শিক্ষকদের সাহায্য আমরা অকুণ্ঠচিত্তে গ্রহণ করেছি। তাঁদের এই সাহায্য পাঠ-উপকরণের মানোন্নয়নে সহায়ক হবে বলেই বিশ্বাস। নির্ভরযোগ্য ও মূল্যবান বিদ্যায়তনিক সাহায্যের জন্য আমি তাঁদের আন্তরিক অভিনন্দন জানাই। এই পাঠ-উপকরণ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের শিক্ষণ পদ্ধতি প্রকরণে নিঃসন্দেহে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা নেবে। উন্মুক্ত শিক্ষাঙ্গনের পঠন প্রক্রিয়ায় সংযুক্ত সকল শিক্ষকের সদর্থক ও গঠনমূলক মতামত আমাদের আরও সমৃদ্ধ করবে। মুক্ত শিক্ষাক্রমে উৎকর্ষের প্রশ্নে আমরা প্রতিশ্রুতিবদ্ধ।

পাঠ-উপকরণ প্রস্তুতি সঙ্গে সংশ্লিষ্ট সকল শিক্ষক, আধিকারিক ও কর্মীদের আমি আন্তরিক অভিনন্দন জানাই এবং ছাত্রদের সর্বাঙ্গীণ সাফল্য কামনা করি।

অধ্যাপক (ড.) ইন্দ্রজিৎ লাহিড়ি
উপাচার্য

Netaji Subhas Open University

Four Year Undergraduate Degree Programme

Under National Higher Education Qualification Framework (NHEQF) &

Curriculum and Credit Framework for Undergraduate Programmes

Bachelor Arts (Honours) (Economics) [FUHEC]

Course Title : Mathematical Methods for Economics-I

Course Code : 6CC-EC-04

প্রথম মুদ্রণ : মার্চ, 2025

Memo No. SC/DTP/412

Date : 24. 12. 2024

বিশ্ববিদ্যালয় মঞ্জুরি কমিশনের দূরশিক্ষা ব্যুরোর বিধি অনুযায়ী মুদ্রিত।

Printed in accordance with the regulations of the University Grants Commission–Distance Education Bureau

Netaji Subhas Open University

Four Year Undergraduate Degree Programme
Under National Higher Education Qualification Framework (NHEQF) &
Curriculum and Credit Framework for Undergraduate Programmes
Bachelor Arts (Honours) (Economics) [FUHEC]
Course Title : Mathematical Methods for Economics-I
Course Code : 6CC-EC-04

: বিষয় সমিতি :
: সদস্যবৃন্দ :

প্র. বাসবী ভট্টাচার্য
Retd. Prof., Jadavpur University
প্র. অনির্বাণ ঘোষ
(Chariperson)
Director (i/c). SPS, NSOU
প্র. বিশ্বজিৎ চ্যাটার্জী
Professor of Economics, NSOU
ড. বিবেকানন্দ রায়চৌধুরী
Associate Professor of Economics, NSOU
ড. সেখ সেলিম
Associate Professor of Economics, NSOU
ড. অসীম কুমার কর্মকার
Assistant Professor of Economics, NSOU
ড. অনিন্দিতা সেন
Associate Professor
Calcutta University
ড. সুসমিতা ব্যানার্জি
Associate Professor
Charu Chandra College
ড. শতরূপা বন্দ্যোপাধ্যায়
Associate Professor
Bethune College
ড. পূর্বা রায়চৌধুরী
Associate Professor of Economics,
Bhowanipore Education Society College

: রচনা :
প্রিয়ন্থী বাগচী
Assistant Professor of Economics, NSOU

: সম্পাদনা :
ড. মনজিত ঘোষ
Associate Professor of Economics, NSOU

: বিন্যাস সম্পাদনা :
প্রিয়ন্থী বাগচী
Assistant Professor of Economics, NSOU

প্রজ্ঞাপন

এই পাঠ-সংকলনের সমুদয় স্বত্ব নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের দ্বারা সংরক্ষিত। বিশ্ববিদ্যালয় কর্তৃপক্ষের লিখিত অনুমতি ছাড়া এর কোনোও অংশের পুনর্মুদ্রণ বা কোনোভাবে উদ্ধৃতি সম্পূর্ণ নিষিদ্ধ।

অনন্যা মিত্র
নিবন্ধক (অতিরিক্ত ভারপ্রাপ্ত)

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

(নির্বাচন ভিত্তিক মূল্যায়ন ব্যবস্থা)

HEC

Mathematical Methods for Economics - I

অর্থনীতির জন্য গাণিতিক পদ্ধতি-১

6 CC-EC-04

একক	1	❒	প্রাথমিক ধারণা	7-16
একক	2	❒	সেট তত্ত্ব	17-27
একক	3	❒	বাস্তব চলরাশির একমাত্রিক অপেক্ষক	28-39
একক	4	❒	এক চলরাশির অন্তরকলন বা অবকলন-I	40-49
একক	5	❒	এক চলরাশির অন্তরকলন বা অবকলন-II	50-61
একক	6	❒	এক চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষকের কাম্যকরণ	62-82
একক	7	❒	কিছু চলকের অপেক্ষক	83-100
একক	8	❒	বহুচলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের পরম অবস্থা-I	101-115
একক	9	❒	বহুচলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের পরম অবস্থা-II	116-147
একক	10	❒	সমাকলন ও তার অর্থনৈতিক প্রয়োগ	148-172

একক 1 ❐ প্রাথমিক ধারণা

গঠন

1.1 উদ্দেশ্য

1.2 প্রস্তাবনা

1.3 কী কারণে অর্থনীতিবিদগণ অঙ্ক ব্যবহার করেন?

1.4 চলক, ধ্রুবক ও পূর্ণকাঙ্ক

1.4.1 চলক বা চলরাশি

1.4.2 ধ্রুবক

1.4.3 পূর্ণকাঙ্ক

1.5 সমীকরণ ও অভেদ

1.6 বাস্তব সংখ্যা তত্ত্ব

1.7 যুক্তি এবং গাণিতিক প্রমাণ

1.8 সারাংশ

1.9 অনুশীলনী

1.10 গ্রন্থপঞ্জি

1.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন

- গণিতে চলক, ধ্রবক এবং পূর্ণকাঙ্ক বলতে কী বোঝায়
- সমীকরণ এবং অভেদের পার্থক্য

1.2 প্রস্তাবনা

আলোচিত এককটিতে গাণিতিক অর্থনীতির গুরুত্ব সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। অপেক্ষক সম্পর্কে সম্যক ধারণা পাওয়ার জন্য এবং তার প্রকৃতি অনুধাবনের জন্য পূর্ণকাঙ্ক, ধ্রুবক ও চলরাশির আলোচনা করা হয়েছে।

1.3 কী কারণে অর্থনীতিবিদগণ অঙ্ক ব্যবহার করেন?

অর্থনীতি এবং অঙ্কের মধ্যে ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক পরিলক্ষিত হয়। অঙ্ককে গণ্য করা হয় অর্থনীতির ভাষা বা 'language of economics' হিসাবে। অঙ্কের সাহায্যে বর্তমান বিশ্বের যে-কোনো ঘটনা বা অর্থনৈতিক গঠন ও কার্যকলাপের ব্যাখ্যা করে প্রকৃত সত্যে উপনীত হওয়া যায়। উদাহরণ হিসাবে ধরা যাক যে পেট্রোলের মূল্য 10 শতাংশ বৃদ্ধি পাওয়ায় তার চাহিদা 5 শতাংশ হ্রাস পেল। এই তথ্যটির পরিপ্রেক্ষিতে পেট্রোলের মূল্য ও চাহিদা সম্পর্কিত গাণিতিক পরিবেশনকে বলা হয় চাহিদা অপেক্ষক। আবার এই নিরীক্ষাটিকে এভাবেও বলা যায় যে "পেট্রোলের চাহিদার দাম স্থিতিস্থাপকতার মান হলো –0.5"।

অর্থাৎ অঙ্কভিত্তিক অর্থনীতি মূলত বিভিন্ন অর্থনৈতিক বিশ্লেষণের একটি পথ যার মাধ্যমে অর্থনীতিবিদ্গণ, অর্থনৈতিক সমস্যা তা ব্যষ্টিগত বা সমষ্টিগত যাই হোক না কেন, সেটিকে উপস্থাপন করেন এবং তার যুক্তি ও ফলাফল বিভিন্ন গাণিতিক উপপাদ্যের মাধ্যমে প্রদান করেন যার ফলে বিষয়টি সরল ও গ্রহণযোগ্য হয়। যে ধরনের অঙ্কগুলি অর্থনীতিতে ব্যবহার করা হয় তা হলো সরল জ্যামিতি, ম্যাট্রিক্স অ্যালজেবরা, অন্তরীকরণ ও সমাকলন ক্যালকুলাস (Differential and Integral Calculus), অন্তর সমীকরণ ও অন্তরীকরণ সমীকরণ (Difference and differential equation) ইত্যাদি।

অর্থনীতিতে অঙ্কের প্রয়োজনীয়তা হিসাবে কিছু কারণ নিম্নে বর্ণিত হলো।

1. গণনা (Enumeration)

প্রাথমিক পর্যায়ে অর্থনীতিতে যে-কোনো ভবিষ্যদ্বাণীকে (predictions) চিত্রের মাধ্যমে ব্যাখ্যা করা হয়। যেমন চাহিদা ও জোগানের বিশ্লেষণে আশা করা হয় যে, কোনো প্রতিযোগিতামূলক বাজারে যদি জোগানকে বদলাতে না দেওয়া হয়, তাহলে মূল্য বৃদ্ধি পাবে। এখন অর্থনীতিবিদ গাণিতিক মাধ্যমে সহজেই দেখাতে পারেন যে কতটা পরিমাণে মূল্য বৃদ্ধি পাবে যদি জোগানকে নির্দিষ্ট পরিমাণ কমানো যায়। একইরকম ভাবে কোনো একটি ফার্মও নির্ণয় করতে পারে যে দাম পরিবর্তনের ফলে কী পরিমাণে তার বিক্রয় পরিবর্তিত হবে।

2. সরলীকরণ (Simplification)

বিভিন্ন অর্থনৈতিক চলরাশির মধ্যে বিদ্যমান সম্পর্কগুলি অনেক ক্ষেত্রে জটিল হয় যা ভাষায় লিখতে গেলে জটিলতর হয়। কিন্তু সেই সম্পর্কটিকে যদি কোনো গাণিতিক গঠনের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় তখন তা সহজেই বোঝা যায়।

উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক : কোনো এক সময়ে কমলালেবুর চাহিদা হলো 1,200 Kg যখন তার দাম শূন্য। এই চাহিদা কিলোপ্রতি যখন কমলালেবুর মূল্য এক টাকা করে বাড়ে তখন 10 Kg করে কমতে থাকে। এই কমলালেবুর চাহিদা ও দাম সংক্রান্ত তথ্যটি যদি ভাষায় এভাবে না বলে গাণিতিক সমীকরণে প্রকাশ করা যায় তখন তা হবে: $q = 1200 - 10p$ যেখানে q হলো কিলোগ্রামে প্রকাশ করা কমলালেবুর চাহিদা ও p হলো কিলোপ্রতি কমলালেবুর মূল্য। এভাবেই যে-কোনো সম্পর্ককে সহজেই প্রকাশ করা যায়। এমনকি বিভিন্ন চলরাশির মধ্যে সম্পর্কগুলি নিয়ে যখন একজোটে কোনো অর্থনৈতিক ব্যবস্থা (economic system) তৈরি হয় তখন গাণিতিক মডেলের সহায়তায় চলরাশির সম্পর্কগুলির উপর নির্দিষ্ট বিধিনিষেধ আরোপ করে অর্থনৈতিক মডেল তৈরি করা হয়।

3. দুষ্প্রাপ্যতা এবং নির্বাচন (Scarcity and Choice)

অর্থনীতিতে বিভিন্ন সমস্যা আছে যা মূলত সীমিত সম্পদের যথাযথ ও দক্ষ বন্টনের উপর কেন্দ্রীভূত, একে বলা হয় কাম্যকরণ (optimization) সমস্যা। যেমন কোনো ফার্ম নির্ধারণ করতে চাইলো যে তার নির্দিষ্ট ব্যায়ের ভিত্তিতে কী পরিমাণ উৎপাদন করলে তার লাভ সর্বোচ্চ হবে। এ ধরনের বহু সিদ্ধান্ত গাণিতিক মাধ্যমে সমাধান করা সম্ভব।

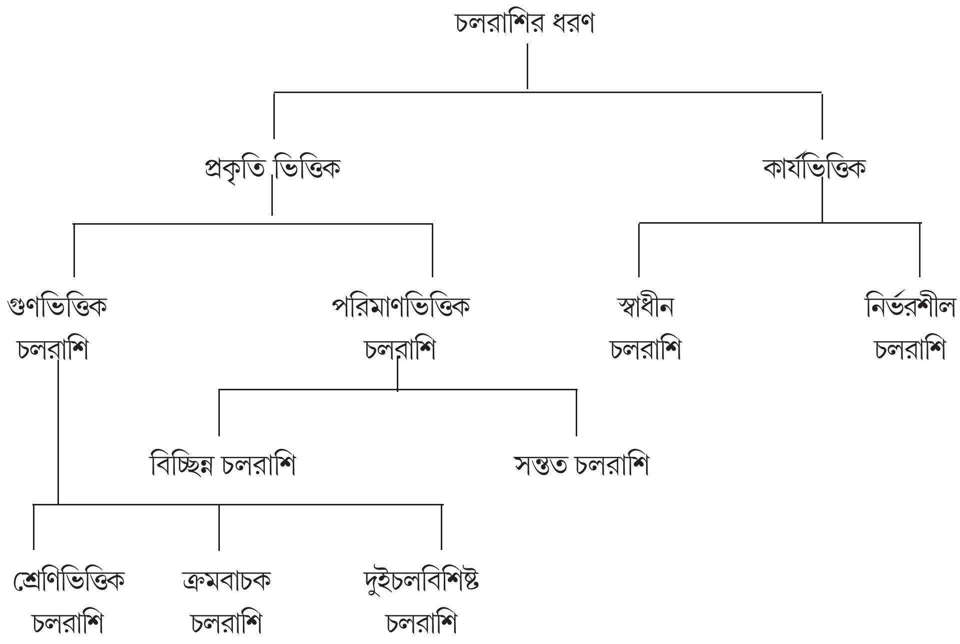
অর্থাৎ বিভিন্ন ঘটনা, সমস্যা, সিদ্ধান্ত ইত্যাদির ক্ষেত্রে সত্যে উপনীত হওয়ার জন্য অর্থনীতি ও গণিত একে অপরের সঙ্গে সম্পর্কিত হয়ে পড়ে।

1.4 চলক, ধ্রুবক ও পূর্ণকাঙ্ক

1.4.1 চলক বা চলরাশি

যে-কোনো বৈশিষ্ট্য, সংখ্যা বা পরিমাণ যা সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয় অথবা বিভিন্ন পরিস্থিতিতে বিভিন্ন মান গ্রহণ করে তাকেই চলরাশি বলা হয়। অর্থনীতিতে যেমন মূল্য উৎপাদন ইত্যাদি চলরাশি বলা যায়।

চলরাশিকে প্রকৃতিগত দিক থেকে মূলত দুই ভাগে ভাগ করা যায়— ১। গুণবাচক চলরাশি (Qualitative Variables), ২। পরিমাণবাচক চলরাশি (Quantitative Variables)। গুণবাচক চলরাশিকে আবার নামিক বা শ্রেণিবাচক (Nominal or Categorical), ক্রমবাচক (Ordinal) এবং দুইচল বিশিষ্ট (Binary) এই তিনভাগে এবং পরিমাণগত চলরাশিকে বিচ্ছিন্ন (Discrete) চলরাশি এবং সন্তত (Continuous) চলরাশি এই দুই ভাগে ভাগ করা যায়।



চিত্র 1.4.1 : চলরাশির শ্রেণিবিভাগ

চলরাশিকে কার্যভিত্তিক অনুসারে স্বাধীন ও নির্ভরশীল চলরাশি হিসাবে ভাগ করা যায়। চিত্র 1.4.1-তে সম্পূর্ণ শ্রেণিবিভাগ দেওয়া হল।

গুণবাচক চলরাশি— এই ধরনের চলরাশি সংখ্যাভিত্তিক নয় বরং তাদের কিছু শ্রেণিতে (Category) ভাগ করা যায়, যেমন চোখের রং (এই চলরাশির মধ্যে আবার নীল, কালো, খয়েরী ইত্যাদি হতে পারে) ও লিঙ্গ (যার মধ্যে পুরুষ, মহিলা হতে পারে)। এইজন্য গুণভিত্তিক চলরাশিকে আবার জাতিভিত্তিক চলরাশিও বলা যায়।

নমিন্যাল বা নামিক চলরাশি— যে গুণবাচক চলরাশিতে জাতির কোনো ক্রম থাকে না তাকে নমিন্যাল চলরাশি বলে। যেমন চুলের রং, যা কালো, খয়েরি, সোনালি যাই হোক তার কোনো ক্রম (Order) থাকে না।

ক্রমবাচক চলরাশি— এই ক্ষেত্রে জাতিগুলির মধ্যে ক্রম লক্ষ করা যায়। যেমন ধরা যাক শিক্ষাগত যোগ্যতা বা অভিজ্ঞতা যদি গুণভিত্তিক চলরাশিটি হয় তাকে প্রাথমিক, মাধ্যমিক, গ্র্যাজুয়েট এবং পোষ্ট গ্র্যাজুয়েট এই হিসাবে ভাগ করা হলো, এবং এখানে শিক্ষার স্তর অনুসারে অল্পশিক্ষিত এবং উচ্চশিক্ষিত হিসাবে 1, 2, 3, 4 এই মান (score) ও দেওয়া হলো যাতে স্তরগুলির মধ্যে পার্থক্যের পরিমাণ তুলনা করা যেতে পারে। অর্থাৎ শিক্ষা গ্রহণের মাত্রা অনুসারে শিক্ষাগত যোগ্যতাকে ক্রমানুসারী করা হলো।

দুইচলবিশিষ্ট চলরাশি— এই চলরাশি কেবল দুটি যেমন সাফল্য, ব্যর্থতা; পুরুষ বা মহিলা; সত্য বা মিথ্যা ইত্যাদি।

পরিমাণভিত্তিক চলরাশি— যে চলরাশিকে সংখ্যার মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় তাকে পরিমাণভিত্তিক চলরাশি বলা হয় (Quantitative Variable); যেমন, বয়স, ওজন, ক্ষেত্রফল, বইয়ের পৃষ্ঠাসংখ্যা, শব্দের অক্ষর সংখ্যা প্রভৃতি।

বিচ্ছিন্ন চলরাশি (Discrete variable) — যে চলরাশি কোনো নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে কিছু বিযুক্ত (isolated) মান গ্রহণ করে তাকে বিচ্ছিন্ন চলরাশি বলা হয় যেমন একটি পরিবারে কতজন শিশু আছে; যা 1, 2 এভাবে পূর্ণ সংখ্যা দিয়ে প্রকাশিত হয়; ভগ্নাংশে নয়।

সন্তত বা চলরাশি— যে চলরাশি কোনো একটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে (interval) যে-কোনো মান গ্রহণ করে তাকে সন্তত বা অবিচ্ছিন্ন চলরাশি বলা হয়। যেমন ছাত্রের উচ্চতা বা ওজন কোনো নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে যে-কোনো সংখ্যা হতে পারে যেমন ওজনের ক্ষেত্রে 60.557.....Kg, 70.235.....Kg ইত্যাদি।

স্বাধীন চলরাশি— যে চলরাশি অন্য চলরাশিকে প্রভাবিত করে, এবং যার চলন বা মানের তারতম্য অন্য কোনো চলরাশি দ্বারা প্রভাবিত হয় না তাকে বলা হয় স্বাধীন চলরাশি (Independent Variable)।

নির্ভরশীল চলরাশি (Dependent Variable) — যে চলরাশির মান অন্য চলরাশির মানের দ্বারা প্রভাবিত হয় তাকে নির্ভরশীল চলরাশি বলে, যেমন ভোগ ও আয়ের সম্পর্কের ক্ষেত্রে, আয়ের তারতম্যে ভোগের তারতম্য হয় বলে ভোগ হলো নির্ভরশীল চলরাশি ও আয় হলো এই তারতম্যের কারণ বলে স্বাধীন চলরাশি। আবার, শ্রমিকের কার্যক্ষমতা বা উৎপাদনশীলতার সঙ্গে কত ঘণ্টা সে কাজ করলো তার সম্পর্ক যদি লক্ষ করা যায় তাহলে উৎপাদনশীলতা হলো নির্ভরশীল চলরাশি। আবার কোনো দ্রব্যের দামের পরিবর্তনের ফলে যদি চাহিদার পরিমাণের পরিবর্তন হয়, তাহলে দাম হল স্বাধীন চলরাশি এবং চাহিদার পরিমাণ হল নির্ভরশীল চলরাশি।

1.4.2 ধ্রুবক

যে রাশির কেবল একটি নির্দিষ্ট মান থাকে তাকে ধ্রুবক বলা হয়। এই রাশির মান কখনই পরিবর্তিত হয় না। যেমন

একটি সমীকরণ নেওয়া যাক $4x - 7 = 5$ যেখানে 4 হলো সহগ, x হলো চলরাশি '—' হলো কার্যকারক (operator) এবং 7 ও 5 হলো ধ্রুবক। এক সপ্তাহে যে ক'টা দিন আছে অর্থাৎ সংখ্যা 7 একটি ধ্রুবক। আবার কিছু কিছু চিহ্ন আছে যারা নিজে থেকে ধ্রুবককে নির্দেশ করে যেমন "পাই" চিহ্ন বা 'π' একটি ধ্রুবক যার কাছাকাছি মান হলো 3.14 অর্থাৎ $\pi \approx 3.14$

1.4.3 পূর্ণকাঙ্ক

কোনো নির্দিষ্ট পরিপ্রেক্ষিতে কোনো চলরাশিকে ধ্রুবক হিসাবে বিবেচনা করলে সেই চলরাশিকে বলা হবে পূর্ণকাঙ্ক। যেমন, কোনো সরলরেখার সমীকরণ হল : $y = mx + c$ যেখানে m ও c হল ধ্রুবক। এই m ও c-এর এক একটি মান থেকে আমরা এক একটি সরলরেখা পাবো। m ও c-এর মান পরিবর্তিত হলে সরলরেখাটির অবস্থানের পরিবর্তন ঘটবে। m ও c কে বলা হবে পূর্ণকাঙ্ক (Parameter is a variable treated as constant in a given context)।

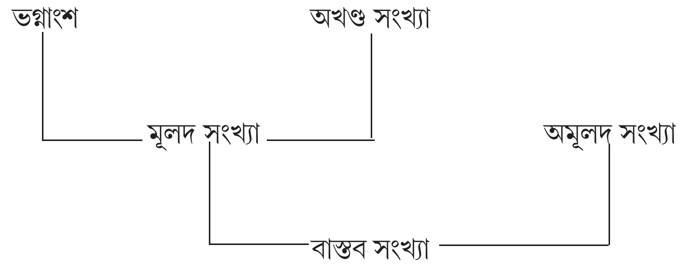
1.5 সমীকরণ ও অভেদ

সমীকরণ : দুটি রাশির মধ্যে যে বিবৃতি (statement) সমতা প্রদান করে '=' এই সমান চিহ্নের সাহায্যে তাকে সমীকরণ বলে। যেমন $10x = 100$ বলতে বোঝায় 10x এবং 100 এর মধ্যে সমতা। সুতরাং এটি একটি সমীকরণ।

অভেদ : ধরা যাক $(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$ এটিও একটি সমীকরণ। কিন্তু লক্ষ করার বিষয় এই যে পূর্বের উদাহরণে $x = 10$ এই মানটির জন্য সমীকরণের সমতা রক্ষিত হয়। অর্থাৎ $10 \times 10 = 100$ হবে। x এর বাকি অন্য মানের জন্য সমীকরণের 10x ও 100 এই দুই রাশির মধ্যে সমতা রাখা যাবে না। কিন্তু $(x+10)^2 = x^2+20x+100$ -এর ক্ষেত্রে $x = 1$ হলে $11^2=121$, আবার '='-র ডানদিকে $1^2+20\times1+100 = 121 \therefore 121 = 121$ হয়। আবার $x = 10$ হলে $(10+10)^2 = 400$, আবার ডানদিকে $10^2+20\times10+100 = 400$। এভাবে x-এর কোনো একটি মাত্র বিশেষ মান নয়, যে-কোনো মানের জন্য সমীকরণটির উভয় পক্ষ সমান হবে। অতএব এটি একটি অভেদ। অর্থাৎ অভেদ হলো একটি সমীকরণ যা চলকগুলির সম্ভাব্য যে-কোনো মানের জন্যই সত্য। একে '$\equiv$' এই চিহ্নের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয়, এই চিহ্নের অর্থ সমীকরণটির উভয় পক্ষের রাশিই সমতুল (equivalent to)।

1.6 বাস্তব সংখ্যা তত্ত্ব

অখণ্ড সংখ্যা, ভগ্নাংশ, মূলদ (rational) ও অমূলদ (irrational) সংখ্যা একত্রে বাস্তব সংখ্যা গঠন করে। অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যার গঠনকে নিম্নের বর্ণিত ছকের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়।



এখন পৃথকভাবে সংখ্যা তত্ত্ব আলোচনা করা হলো।

স্বাভাবিক সংখ্যা ও অখণ্ড সংখ্যা (Natural number and Integers) : সহজ ভাষায় বলতে গেলে যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাকে যেমন 1, 2, 3, 4... ইত্যাদিকে স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural number) বলা হয়। এই স্বাভাবিক সংখ্যাগুলিকে আবার ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাও বলা হয়। তেমনি –1, –2, –3, –4... ইত্যাদিকে বলা হয় ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। এই ধনাত্মক ও ঋণাত্মক এর মূলদ অখণ্ড সংখ্যা একত্রে অখণ্ড সংখ্যা গঠন করে:

.... –5, – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5.......

(–5 থেকে –1: ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা; 1 থেকে 5: ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)

এখানে মনে রাখতে হবে শূন্য কিন্তু কখনই ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা নয়। কিন্তু সাধারণভাবে একে অখণ্ড সংখ্যার মধ্যে গণ্য করা হয়, অর্থাৎ ধনাত্মক, ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং শূন্যকে একত্রিত করলে অখণ্ড সংখ্যা পাওয়া যায়।

ভগ্নাংশ ও মূলদ সংখ্যা (Fraction and Rational Numbers) : যখন দুটি পূর্ণ সংখ্যার (Whole number) অনুপাত নেওয়া হয় যেখানে হর (denominator) শূন্য হয় না তখন তাকে ভগ্নাংশ বলা হয়। অর্থাৎ m ও n যদি দুটি পূর্ণ সংখ্যা হয় তখন $m/n; n \neq o$ হলো ভগ্নাংশ। আবার যদি m, n দুটি অখণ্ড সংখ্যা হয় যেখানে $n \neq o$; তখন তাদের অনুপাত হল মূলদ সংখ্যা। যেমন ইত্যাদি হলো ভগ্নাংশ। আবার $15/7, -18/13, -6/15$ হলো মূলদ সংখ্যা। সকল ভগ্নাংশই হলো মূলদ সংখ্যা; কিন্তু সকল মূলদ সংখ্যা ভগ্নাংশ নয়। সেই সব মূলদ সংখ্যাই হলো ভগ্নাংশ যেখানে m ও n দুটি ধনাত্মক সংখ্যা।

আবার, কিছু কিছু ভগ্নাংশ আছে যেমন $\frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{27}{3}$ ইত্যাদি যারা পূর্ণ সংখ্যা ও ভগ্নাংশ একই সাথে হয়। সুতরাং এই ধরনের সংখ্যাগুলি মূলদ সংখ্যাও বটে। যে কোনো পূর্ণ সংখ্যাকে অনুপাতের (ratio) মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় যেমন: $2 = \frac{2}{1}, 4 = \frac{4}{1}$ বা $n = \frac{n}{1}$ সুতরাং তারা মূলদ সংখ্যা। যেহেতু সকল পূর্ণ সংখ্যাকে অনুপাতে প্রকাশ করা যায় সুতরাং তারা সবাই পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু সব মূলদ সংখ্যাই পূর্ণ সংখ্যা নয়। অর্থাৎ সব অখণ্ড সংখ্যা ও সব ভগ্নাংশ একত্রে মিলে মূলদ সংখ্যা গঠন করে।

অমূলদ সংখ্যা (Irrational Numbers) : যে সংখ্যাকে এই অনুপাতে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে m ও n হলো অখণ্ড সংখ্যা তাকে অমূলদ সংখ্যা (irrational number) বলা হয়। যেমন । এই সব মানের ক্ষেত্রে দশমিকের পর প্রায় মান নির্ণয় করা যায় না। এ ধরনের আরো সংখ্যা আছে যাদের দশমিকের পরের মানগুলির পুনরাবৃত্তি হতে থাকে (recurring) কিন্তু সমাপন হয় না (non-terminating) যেমন $\frac{1}{3} = 0 \cdot 3333 .... = 0 \cdot \bar{3}$। এই 3-র দশমিকের পর পুনরাবৃত্তি ঘটেছে। $\frac{1}{16} = 0 \cdot 1666 .... = 0 \cdot 1\bar{6}$ (6-এর পুনরাবর্তন)। এরা কিন্তু মূলদ সংখ্যা। অমূলদ হতে গেলে দশমিকের পরের

মানের পুনরাবর্তন হবে না, সমাপনও হবে না (non-repeating and non-terminating decimal in their values)

একটি উদাহরণ দেওয়া যাক :—

উদাহরণ 1.6.1 : $2\cdot\overline{78}$ কি মূলদ সংখ্যা?

$2\cdot\overline{78}=2\cdot 787878.....$

প্রদত্ত সংখ্যাটি মূলদ সংখ্যা কিনা জানার জন্য দুটি তথ্য খতিয়ে দেখা আবশ্যক—

(ক) প্রদত্ত সংখ্যাটিকে ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যাবে কিনা

(খ) দশমিকটি কি পৌনঃপুনিক? (non-recurring or recurring?)

ধরা যাক $2\cdot\overline{78}=\text{M}$

$100\text{ M}=2\cdot 78\overline{78}\times 100$

$\Rightarrow 100\text{ M}=278\cdot\overline{78}$

$2\cdot\overline{78}=\frac{276}{99}$ $\Rightarrow 100\text{ M}=276+2\cdot\overline{78}$

অথবা, 100M = 276 + M $\left(\because 2\cdot\overline{78}=\text{M}\right)$

অথবা, 100M – M = 276

অথবা, 99 M = 276

অথবা,

অথবা, $2\cdot 787878...=\frac{276}{99}$

অর্থাৎ 2·787878... হোলো একটি পৌনঃপুনিক দশমিকের প্রসার (recurring decimal expansion) এবং একে $\frac{276}{99}$ এই ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যায়।

সুতরাং প্রদত্ত সংখ্যাটি হোলো মূলদ সংখ্যা

1.7 যুক্তি এবং গাণিতিক প্রমাণ

অঙ্কে যে কোনো সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে যথার্থ সত্যে উপনীত হওয়া বা অনুসন্ধান করার জন্য তর্কবিদ্যার নীতি (Principles of Logic) গ্রহণ করা হয়। একটি উদাহরণ নেওয়া যাক যেখানে ভুল যুক্তির সাহায্যে একটি গাণিতিক সমস্যার সমাধান করা হচ্ছে, এবং তাতে উত্তর ভুল হচ্ছে।

উদাহরণ : 1.7.1 : নিম্নের সমীকরণটির সম্ভাব্য সমাধান নির্ণয় করো।

সমাধান : উভয় দিকে বর্গ নিলে পাই $(x+2)^2 = \left(\sqrt{4-2}\right)^2$

$\therefore$ $x^2 + 4x + 4 = 4 - x$ অথবা $x^2 + 5x = 0$

অথবা, $x + 5 = 0$ সুতরাং $x = -5$

এখন, এইভাবে সমাধান করলে উত্তর হোলো $x = -5$। এটি সঠিক কিনা পরীক্ষা করে দেখা যাক। $x = -5$ হলে $x + 2 = -3$ এবং $\sqrt{4-x} = \sqrt{9} = 3$ অর্থাৎ দেখা গেল উত্তরটি ভুল। উদাহরণ 1.7.1 এ দেখানো আছে ভুলটি কীভাবে এসেছে। এই উদাহরণটির মাধ্যমে বোঝা যায় যে যথাযথ চিন্তা বা নীতি না মেনে সমাধানের ক্ষেত্রে সঠিক উত্তর পাওয়া যায় না।

উক্তি বা প্রতিজ্ঞা (Proposition) : যে-কোনো বিবৃতি (statement), সঠিক বা ভুল যাই হোক না কেন তাকে প্রতিজ্ঞা বলা হয়। নিত্যকার জীবনযাত্রা থেকে যদি একটি উদাহরণ দেওয়া যায়: "সমস্ত ব্যক্তি যারা নিঃশ্বাস নিচ্ছে তারা বেঁচে আছে"—একটি সত্য প্রতিজ্ঞা; কিন্তু যদি এভাবে বলা যায়—"সকল ব্যক্তি যারা নিঃশ্বাস নিচ্ছে তারা স্বাস্থ্যবান"—তখন সেটি হবে ভুল উক্তি বা প্রতিজ্ঞা। এক্ষেত্রে মত প্রকাশকারক প্রতিটি শব্দ অর্থবহ না হলে সেটি সত্যাসত্য বিচার করা সম্ভব হয় না। যেমন যদি বক্তব্যটি এরূপ হয় "72 একটি বৃহৎ সংখ্যা"—এই বক্তব্যটির সত্যাসত্য বিচার করা যাবে না যতক্ষণ পর্যন্ত বৃহৎ সংখ্যার যথাযথ সংজ্ঞা না দেওয়া যাবে।

তাৎপর্য (Implications) : ধরা যাক P এবং Q দুটি এমন ধরনের প্রতিজ্ঞা যেখানে যখনই P সত্য তখনই Q সত্য। এটিকে প্রকাশ করা হয় সাধারণবাবে এভাবে : $P \Rightarrow Q$ অর্থাৎ P বোঝায় Q কে (P implies Q) বা যখনই P তখনই Q অথবা Q হোলো P এর ফলাফল। "$\Rightarrow$" এই চিহ্নটিকে তাৎপর্য চিহ্ন বলা হয়। এই তীরচিহ্ন যুক্তিভিত্তিক তাৎপর্যের (logical implication) দিক নির্দেশ করে। যেমন: a) $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$, b) $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ or $y = 0$; c) x হোলো বর্গক্ষেত্রে $\Rightarrow$ x হোলো আয়তক্ষেত্র ইত্যাদি।

কিছু কিছু ক্ষেত্রে $P \Rightarrow Q$ যখন ঠিক তখন উল্টোদিকটিও ঘটতে পারে অর্থাৎ $Q \Rightarrow P$ ও সত্য হওয়া সম্ভব। অর্থাৎ এই দুটি তাৎপর্যকে একত্র করে বলা যায়: $P \Leftrightarrow Q$। একে বলে যুক্তিসঙ্গত সমার্থতা (logical equiva-

lence); অর্থাৎ যখনই এবং কেবলমাত্র যখনই Q তখনই P (P if and only if Q or P iff Q), '$\Leftrightarrow$' এই চিহ্নকে সমার্থতা চিহ্ন বলা হয়। উপরোক্ত উদাহরণ (b) তে দেখা যায় যে যদি $x = 0$ অথবা $y = 0$ হয় তখন $xy = 0$ হবে. অর্থাৎ এক্ষেত্রে প্রতিজ্ঞাটির যুক্তিসঙ্গত সমার্থতা আছে অর্থাৎ $x = 0$ বা $y = 0 \Rightarrow xy = 0$, কিন্তু বাকি উদাহরণগুলিতে এই যুক্তি খাটে না যেমন আয়তক্ষেত্র মানেই বর্গক্ষেত্র নয়। আবার $x^2 > 4$ মানেই $x > 2$ নাও হতে পারে; যেমন x যদি –3 হয় তখনও $x^2 > 4$ হবে।

আবশ্যক ও যথেষ্ট শর্ত (Necessary and sufficient Condition) : প্রতিজ্ঞা P, প্রতিজ্ঞা Q কে নির্দেশ করে এই বক্তব্যটিকে আার এক ভাবে প্রকাশ করা যায়। যদি 'P' প্রতিজ্ঞা, Q প্রতিজ্ঞাকে বোঝায় তাহলে P হোলো Q এর যথেষ্ট শর্ত। আবার সেই অনুসারে যদি 'P' কে সত্যি হতে হয় বা ঘটতে হয় তখন Q কে যে ঘটতে হবে সেটা নিশ্চিত। এক্ষেত্রে 'Q' হোলো 'P' এর আবশ্যক শর্ত। অর্থাৎ

'P', 'Q'-এর যথেষ্ট শর্ত বলতে বোঝায় : $P \Rightarrow Q$

'Q', 'P'-এর আবশ্যক শর্ত বলতে বোঝায় : $P \Rightarrow Q$

যেমন 'x'-এর আয়তক্ষেত্র হওয়ার যথেষ্ট শর্ত হোলো x কে বর্গক্ষেত্র হতে হবে। আবার 'x' কে বর্গক্ষেত্র হওয়ার আবশ্যক শর্ত হোলো x-এর আয়তক্ষেত্র হওয়া।

যখন $P \Leftrightarrow Q$ হয়, তখন বলা যায় P ও Q এর আবশ্যক ও যথেষ্ট শর্ত।

গাণিতিক প্রমাণ (Mathematical Proof) : গণিতশাস্ত্রে সবথেকে গুরুত্বপূর্ণ ফলাফলকেই বলা হয় উপপাদ্য (theorem) প্রত্যেকটি গাণিতিক উপপাদ্যকে $P \Rightarrow Q$ এইভাবে প্রয়োগ করা হয় যেখানে P কোনো প্রতিজ্ঞা বা প্রতিজ্ঞাসমূহ (premises) এবং Q হোলো আর এক প্রতিজ্ঞা শ্রেণি যাকে বলে উপসংহার (conclusion)। যখন P দিয়ে শুরু করে ক্রমান্বয়ে Q তে পৌছানো হয় তখন সেটা হয় সরাসরি প্রমাণ। আবার কখনও কখনও শুরু করা হয় যে 'Q' সত্য নয় এবং সেখান থেকে দেখানো হয় যে 'P' ও সত্য নয়। তখন তাকে বলে পরোক্ষ প্রমাণ (indirect proof)।

ন্যায়িক ও প্রস্তাবনামূলক যুক্তি : (Deductive and Inductive Reasoning) : ন্যায়িক যুক্তি, তর্কের নিয়ম মাফিক চলে। পক্ষান্তরে প্রস্তাবনামূলক যুক্তি কিছু নিরীক্ষার মাধ্যমে কতগুলি সিদ্ধান্ত গ্রহণ করে। যেমন, যদি বলা যায় যে বিগত n সংখ্যক বৎসরে সাধারণ মূল্যস্তর বৃদ্ধি পেয়েছে, অতএব আগামী দুই বৎসরে মূল্যস্তর বাড়বে—এই যুক্তি হোলো প্রস্তাবনামূলক যুক্তি।

1.8 সারাংশ

এই অধ্যায়ে অর্থনীতির ক্ষেত্রে গণিতের গুরুত্ব ও ব্যবহার বিশদভাবে দেখানো হয়েছে। এই প্রসঙ্গে চলক, ধ্রুবক, পূর্ণকাঙ্কর ধারণা, চলরাশির ধরণ ও শ্রেণীবিভাগ ব্যাখ্যা করা হয়েছে। বাস্তব সংখ্যা সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। যুক্তি ও গাণিতিক প্রমাণ বিষয়ক ধারণা প্রদান করা হয়েছে।

1.9 অনুশীলনী

1. আবশ্যিক ও যথেষ্ট শর্তের মধ্যে কী পার্থক্য?

2. পরিসর বার করো : $f \; x \quad \frac{1}{\sqrt{x \quad \frac{1}{2}}}$

3. প্রসার নির্ণয় করো : $f(x) = x^2 + 2x + 3$, যদি $x^2 \quad 4$ হয়।

1.10 গ্রন্থপঞ্জি

1. Sydsaeter K, Hammond P, Strom A (2015) : Essential Mathematics for Economic Analysis, Fourth Edition, Perason.
2. Chiang, Alpha C. (1967) : Fundamental Methods of Methematical Economics, McGraw Hill Book Company.
3. Mehta, B.C., and G.M.K, Madnani (1997) : Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons.
4. Allen, R.G.D. (1938): Mathematical Analysis for Economists, MacMillan
5. Sarkhel, J. and A. Bhukta (2000) : An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Limited.
6. Yamane, T. (1968): Mathematics for Economists, Prentice Hall.

একক 2 ❐ সেট তত্ত্ব

গঠন

2.1 উদ্দেশ্য

2.2 প্রস্তাবনা

2.3 সেট তত্ত্ব সম্বন্ধে ধারণা

2.3.1 সেটের কার্যবিধি

2.3.2 সেট বীজগণিতের সূত্রাবলি

2.4 সম্পর্ক বা সম্বন্ধ ও অপেক্ষক

2.4.1 ক্রমিক জোড়

2.4.2 দুটি সেটের কার্টেজীয় গুণফল

2.4.3 সম্বন্ধ

2.4.4 অপেক্ষক

2.5 সারাংশ

2.6 অনুশীলনী

2.7 গ্রন্থপঞ্জি

2.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন

- সেট বলতে কী বোঝায় এবং সেট বীজগণিতের সূত্রাবলি
- সম্বন্ধ এবং অপেক্ষকের পার্থক্য

2.2 প্রস্তাবনা

এই পর্যায়ে অন্তরকলনবিদ্যাকে আয়ত্ত করার উদ্দেশ্যে বাস্তব সংখ্যার সেটের ধারণা দেওয়া হয়েছে। অপেক্ষক এবং সম্বন্ধের আলোচনাও এই এককে করা হয়েছে।

2.3 সেট তত্ত্ব সম্বন্ধে ধারণা

সুসংজ্ঞাত, পরস্পর স্বতন্ত্র এবং ক্রম-নিরপেক্ষ বস্তুসমূহের সংকলন বা সমষ্টিকে (Collection or aggregate) সেট বলে। দৈনন্দিন জীবনে বিভিন্ন বস্তুসমূহের সুনির্ধারিত সংগ্রহকে বলা হয় সেট। যেমন, বাগান হোলো একটি সেট যার মধ্যে সকল বৃক্ষ ও উদ্ভিদ আছে। সেটে অন্তর্ভূক্ত বস্তুসমূহকে বলা হয় সেটের উপাদান (element) বা সদস্য (member)। ইংরেজি বর্ণমালার বড় হাতের অক্ষর A, B, C, D... ইত্যাদি দ্বারা সাধারণতঃ সেট প্রকাশ করা হয় এবং সেটের সবগুলো উপাদান দ্বিতীয় বন্ধনী {} দ্বারা আবদ্ধ করতে হয়। উপাদানগুলির একটিকে আর একটি থেকে (,) দ্বারা পৃথক করা হয়। যেমন—

(ক) ১ম পাঁচটি অঋণাত্মক জোড় সংখ্যার সেট, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(খ) বাংলা মাসের নামগুলো M দিয়ে নির্দেশ করলে, M = {x |, x বাংলা বারো মাসের নাম}

সেট গঠনের বা প্রকাশের দুটি পদ্ধতি, যথা—তালিকা পদ্ধতি ও বাছাই পদ্ধতি। উপরে উল্লিখিত (ক) ও (খ) যথাক্রমে তালিকা ও বাছাই পদ্ধতি।

সার্বিক সেট (Universal Set) : যে-কোনো প্রসঙ্গে আলোচনাধীন সকল সেটই কোনো নির্দিষ্ট সেটের উপসেট হয়ে থাকে। এ ক্ষেত্রে নির্দিষ্ট আলোচনাধীন সকল সেটকে সার্বিক সেট বলা হয়। যেমন—

A = {x : x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $3x \leq 15$}

B = {x : x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $x^2 \leq 25$}

C = {x : x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $\sqrt{x} \leq 9$}

এখন U = [x : x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট} বিবেচনা করি, তাহলে A, B, C হোলো U এর উপসেট ও U হোলো সার্বিক সেট।

উপসেট (Subset) : যদি A সেটের উপাদানগুলি B সেটেরও উপাদান হয় তবে A সেটকে B সেটের উপসেট বলা হয়।

ধরা যাক, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ এবং $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ এখানে A সেটের প্রতিটি উপাদান B সেটে বিদ্যমান; $\therefore\ x \in A \Rightarrow x \in B$

$\therefore$ A সেটটি B সেটের উপসেট, $A \subset B$, আবার C সেটটির প্রতিটি উপাদান B সেটে বিদ্যমান। সুতরাং C সেটকে B সেটের উপসেট বলা হয়। $C \subseteq B$। কিন্তু A ও C সেটের মধ্যে পার্থক্য আছে। যেখানে B ও C সেটের উপাদানগুলো এবং তার সংখ্যা একই কিন্তু A সেট ও B সেটের উপাদানগুলির সংখ্যা সমান নয়। সুতরাং A সেটটি হোলো B সেটের "প্রকৃত উপসেট" এবং $A \subset B$ এভাবে এই তথ্যকে পরিবেশন করা হয়।

যে-কোনো সেট P এর জন্য :

i) $\phi \subseteq P$ অর্থাৎ ফাঁকা সেট ϕ যে-কোনো সেটেরই উপসেট

ii) $P \subseteq P$ অর্থাৎ যে-কোনো সেট সেই সেটেরই উপসেট

iii) n(P) বলতে P সেটের উপাদান সংখ্যা বোঝায়।

iv) যদি P সেট Q সেটের উপাদান অর্থাৎ $P \subseteq Q$ হয় এর অর্থ $n(P) \leq n(\phi)$

v) যদি P সেট Q সেটের প্রকৃত উপসেট অর্থাৎ $P \subset Q$ হয় তার অর্থ $n(P) < n(Q)$

পূরক সেট (Complementary Set) : সার্বিক সেট U-এর উপসেট A হলে, A সেটের সদস্য ব্যতীত U সেটের অন্যান্য সদস্যদের নিয়ে গঠিত সেটকে A সেটের পূরক সেট বলা হয়। একে A' বা A^c হিসেবে প্রকাশ করা যায়। গাণিতিক ভাবে, $A^c = U/A = \{x : x \in U; x \in A\}^c$

যেমন $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এবং $B = \{2, 4, 6\}$

$\therefore B^c = U/B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \setminus \{2, 4, 6\}$

$= \{1, 3, 5\}$

যে-কোনো সেট A এর জন্য i) $U^c = \phi$, ii) $\phi^c = U$, iii) $AUA^c = U$, iv) $A \quad A^c = \phi$, v) $(A^c)^c = A$

উদাহরণ : প্রদত্ত $A = \{x : 5x > 19\}$ এবং $B = \{x : 3x < 19\}$ এবং U = {x : x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, $0 \leq x \leq 10$}, সেট A ও B-এর উপাদানগুলি তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করো এবং A^c ও B^c নির্ণয় করো।

সমাধান : সার্বিক সেট, U = {x : x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা; $0 \leq x \leq 10$}

$\cap$

অর্থাৎ, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{x : 5x > 19\} \therefore A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$B = \{x : 3x < 19\} \therefore B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore A^c = \{1, 2, 3\}; B^c = \{7, 8, 9, 10\}$

সূচক সেট (Power Set) : যে-কোনো সেট A এর সকল উপসেটকে A সেটের সূচক সেট বলা হয়। A সেটের সূচক সেটকে P(A) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন যদি $A = \{a, b, c\}$ হয় তাহলে A-এর সূচক বা ঘাত

সেট : $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}\}$

A সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে P(A)-র উপাদান সংখ্যা হবে 2^n। প্রদত্ত উদাহরণটির ক্ষেত্রে উপাদান সংখ্যা হবে $2^3 = 8$

সসীম সেট (Finite Set) : যে সেটের উপাদানসংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় অথবা উপাদান সংখ্যা নির্দিষ্ট বা সীমিত থাকে তাকে সসীম সেট বলা হয়। যেমন $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, B = {x : x মৌলিক সংখ্যা এবং $0 < x < 10$} ইত্যাদি সসীম সেট, যেখানে A সেটে 6টি উপাদান ও B সেটে 4টি উপাদান আছে।

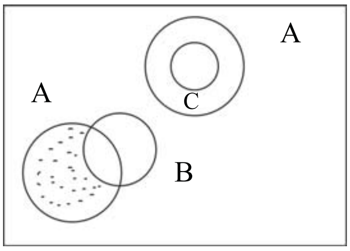
অসীম সেট (Infinite Set) : যে সেটে উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় না বা উপাদান সংখ্যা সীমিত নয় তাকে অসীম সেট বলা হয়। যেমন : A = {x : x জোড় স্বাভাবিক সংখ্যা}, পূর্ণ সংখ্যার সেট y = {... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3...} ইত্যাদি হলো অসীম সেট।

ফাঁকা সেট বা শূন্য সেট (Null Set) : যে সেটের কোনো উপাদান বাস্তবে পাওয়া যায় না তাকে ফাঁকা সেট বা শূন্য সেট বলে। একে ϕ অথবা {} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন $\phi = \{\} = \{x \in N : 1 < x < 2\}$ এবং $\phi = \{\} = \{x \in N :$ x মৌলিক সংখ্যা ও $23 < x < 29\}$ ইত্যাদি।

একপদী সেট (Singleton Set) : এক উপাদানবিশিষ্ট সেটকে বলা হয় একপদী সেট। যেমন: {0}, {4} ইত্যাদি।

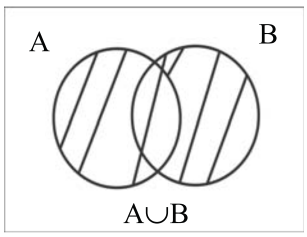
ভেনচিত্র : সেটের সংযোগ, ছেদ উপসেট, অন্তর, পূরক ইত্যাদি প্রক্রিয়া বিভিন্ন জ্যামিতিক চিত্র যেমন আয়তাকার ক্ষেত্র, বৃত্তাকার ক্ষেত্র ও ত্রিভুজাকার ক্ষেত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করার মাধ্যমকে ভেনচিত্র বলা হয়।

জন ভেন (১৮৩৪-১৮৮৩) সর্বপ্রথম সেটের কার্যবিধি চিত্রের সাহায্যে প্রবর্তন করেন, তাই তার নামানুসারে চিত্রগুলি ভেনচিত্র নামে পরিচিত। যেমন $C \leq A$ -র ভেনচিত্র হলো উপরেরটি। আবার A \ B-এর ভেনচিত্র হোলো তলারটি।



2.3.1 সেটের কার্যবিধি

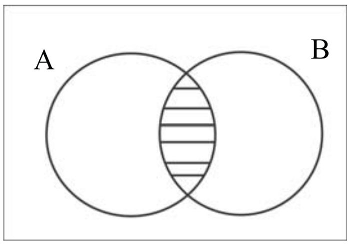
সেটের কার্যবিধি বা প্রক্রিয়াসমূহ হোলো সেটের সংযোজন, সেটের ছেদ, অন্তর সেট, পূরক সেট ইত্যাদি। এই কার্যবিধি কিছু নিয়মানুসারে হয়। যেমন, একক সূত্র (Idempotent Law), সহযোজন নিয়ম (Associative Law), বিনিময় নিয়ম (Commutative Law), বণ্টন নিয়ম (Distributive Law) ইত্যাদি।



সেটের সংযোজন বা যোগ (Union of sets) : দুই বা ততোধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সংযোজন সেট বলে। A ও B এর সংযোগ সেটকে ‘A   B’ এই প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় A সংযোগ B বা “A union B”। সেট গঠন পদ্ধতিতে A   B = {z : $x \in A$ বা $x \in B$}, A   B এর ভেনচিত্র উদাহরণ: ধরি, A = {1, 2, 3, 4, 5}, B= {2, 3, 5, 6, 7} $\therefore$ = A   B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

দুটি সেটের ছেদ (Intersection of Two Sets) : A ও B দুটি সেট হলে তাদের সাধারণ পদগুলির সেটকে A ও B এর ছেদ বলে এবং একে A B চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ A B = {x : x∈A এবং x∈B} সুতরাং A B সেই সব পদের সেট যারা A ও B উভয় সেটেই আছে। এর ভেনচিত্রটি হোলো:



A B

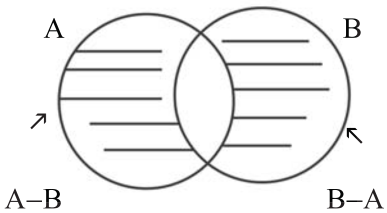
উদাহরণ 2.3.2 : ধরি, A = {1, 2, 3, 4}, B= {3, 4, 5, 6} ∴ A B= {3, 4}

এখন যদি দুটি সেট A ও B এমন হয় যে তাদের কোনো সাধারণ পদ নেই, তাহলে A ও B কে বিচ্ছিন্ন সেট (Disjoint Set) বলা হয়। যথা A={1, 5, 7} এবং B = {2, 4} দুটি বিচ্ছিন্ন সেট, এক্ষেত্রে, A B = ϕ

∩

অন্তর সেট : A ও B দুটি সেট হলে, যে সমস্ত পদ A তে আছে কিন্তু B তে নেই,, তাদের সেটকে A ও B-র অন্তর বলে, একে A-B বা A~B চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অর্থাৎ A – B ={x : x∈A এবং x∈B}। এর ভেনচিত্র হোলো



উদাহরণ 2.3.3 : ধরি A= {1, 2, 3, 4, 5} এবং B = {3, 5, 6, 7}

∴ A – B = {1, 2, 4} ও B – A = {6, 7}

দুটি সেটের প্রতিসম অন্তর (Symmetric Difference of Two Sets) : A ও B দুটি সেট হলে, যে সমস্ত পদ কেবলমাত্র A অথবা কেবলমাত্র B তে আছে, তাদের সেটকে A ও B এর প্রতিসম অন্তর বলে ও একে AΔB (A ডেল্টা B) চিহ্নের দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ AΔB = (A – B) (B – A)

উদাহরণ: ধরি A = {1, 2, 3, 4, 8} এবং B = {2, 4, 6, 7} তাহলে A Δ B= {1, 3, 6, 7, 8}

2.3.2 সেট বীজগণিতের সূত্রাবলি

1. পুনরুৎপাদনক্ষম সূত্র (Idempotent Law) :

i) A A=A ii) A A = A

2. বিনিময় সূত্র (Commutative Law) :

i) A B=B A (ii) A B= B A

3. সংযোগ সূত্র (Associative Law) :

i) A (B C) = (A B) C ii) A (B C) = (A B) C

4. বন্টন সূত্র (Distributive Law) :

i) A (B C) = (A B) (A C) ii) A (B C) = (A B) (A C)

5. De Morgan -এর সূত্র :

i) $(A\ \ B)^c = A^c\ \ B^c$ ii) $(A\ \ B)^c = A^c\ \ B^c$

6. De Morgan -এর অন্তরফলের সূত্র (De Morgan's Law of Difference) :

i) A – (B C) = (A–B) (A–C) ii) A–(B C) = (A–B) (A–C)

7. পূরক সূত্র (Law of Complements) :

i) $(A^c)^c = A$, (ii) $^c = \phi$, (iii) $\phi^c =$ (iv) $A\ \ A^c =$ (v) $A\ \ A^c = \phi$

8. অভেদ সূত্র (Identity Law):

i) A ϕ = A, (ii) A U = U, (iii) A U = U (iv) A U = A

2.4 সম্পর্ক বা সম্বন্ধ ও অপেক্ষক

সম্বন্ধ ও অপেক্ষক সম্পর্কে ধারণা করার আগে ক্রমিক জোড় (Ordered Pair) ও কার্টেজীয় গুণফল সম্পর্কে ধারণা করা আবশ্যক।

2.4.1 ক্রমিক জোড় :

দুটি পদ a ও b (a, b) আকারে লিখলে, তাকে ক্রমিক জোড় বলে, যথা (2, 0), (–1, 3) ইত্যাদি, $a \neq b$ হলে $(a, b) \neq (b, a)$ কিন্তু {a, b} = {b, a}। আবার দুটি ক্রমিক জোড় (a, b) এবং (c, d) সমান হবে কেবলমাত্র যদি a = c এবং b = d হয়। অর্থাৎ $(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = c, b = d$

2.4.2 দুটি সেটের কার্টেজীয় গুণফল :

A ও B দুটি সেট হলে এবং $a\in A$ ও $b\in B$ হলে (a, b) আকারের সমস্ত ক্রমিত জোড়ের সেটকে A ও B এর কার্টেজীয় গুণফল বলে। একে $A\times B$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়, অর্থাৎ : $A\times B= \{(a, b) : a\in A, b\in B\}$

উদাহরণ: $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{2, 3\}$ হলে

$A\times B = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

এবং $B\times A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

অর্থাৎ $A\times B \neq B\times A$

মনে রাখা দরকার:

a) যদি $A\neq B$ হয় কিংবা কোনো একটি সেট শূন্য না হয়, তবে $A\times B \neq B\times A$

b) যদি A সেটটির mটি পদ এবং B সেটের nটি পদ থাকে, তবে AB সেটটির mn টি পদ থাকবে।

c) $A\times B$ সেটটি শূন্য সেট হবে কেবলমাত্র যদি A অথবা B সেট শূন্য সেট হয়।

2.4.3 সম্বন্ধ :

দুটি সেট A ও B এর কোনোটিই শূন্য সেট না হলে, $A\times B$ এর যে কোনো উপসেট কে A থেকে B এর একটি সম্বন্ধ বলা হয়। সম্বন্ধটিকে R দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

অর্থাৎ, $R = \{(x, y); x\in A, y\in B$ ও $xRy\}$

উদাহরণ: মনে করি, $A = \{1, 2\}$ ও $B = \{2, 3, 4\}$

$\therefore A\times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$

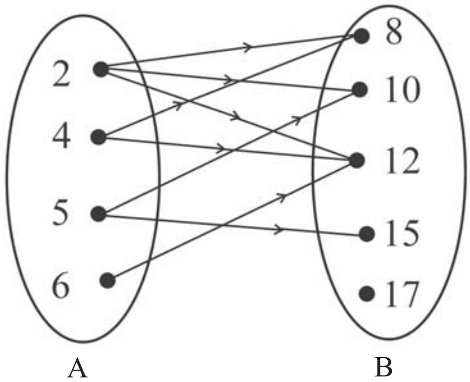
যেহেতু, $A\times B$ সেটটির পদসংখ্যা 6 সেহেতু $A\times B$ এর 2^6 অর্থাৎ 64টি উপসেট থাকবে। সুতরাং A সেট থেকে B সেটে মোট 64টি বিভিন্ন প্রকার সম্বন্ধ হতে পারে।

মনে করি $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3)\}$ এরূপ একটি সম্বন্ধ। এখন $(1, 2) \in R$ বলে আমরা লিখি 1R2; কিন্তু $(2, 4) \in R$ বলে লেখা হয় 2/4 অথবা 24

তির চিহ্নের সাহায্যে একটি সম্বন্ধকে প্রকাশ (Representation of a Relation by Arrow Diagram): তির চিত্রের সাহায্যে A সেট থেকে B সেটে একটি সম্বন্ধ R-কে প্রকাশ করতে হলে প্রথমে দুটি বদ্ধ অঞ্চলের মধ্যে বিন্দুর সাহায্যে A ও B পদগুলিকে দেখানো হয়। তারপর, A-এর যে সব পদ, B-এর যে সব পদের সঙ্গে সম্বন্ধযুক্ত, তাদের তির-চিহ্নের সাহায্যে যুক্ত করা হয়।

উদাহরণ : $A = \{2, 4, 5, 6\}$, $B= \{8, 10, 12, 15, 17\}$ এবং A থেকে B একটি সম্বন্ধ হলো R যেখানে $(x, y)\in R\Rightarrow x$ হলো y এর একটি উৎপাদক। সম্বন্ধটিকে তির চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ কর।

সমাধান : R = {(2, 8), (2, 10), (2, 12), (4, 8), (4, 12), (5, 10), (5, 15), (5, 12)} এভাবে ক্রমিত জোড় (Ordered pair) হিসাবে দেখানো হোলো

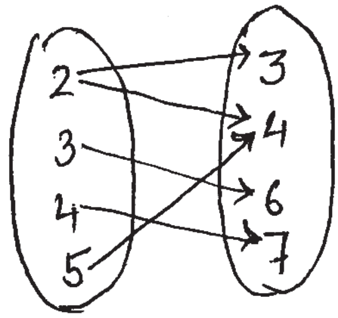


একটি সম্বন্ধের ক্ষেত্র বা অঞ্চল এবং পাল্লা বা প্রসার (Domain and Range of a Relation) :

মনে করি A ও B শূন্য নয় এমন দুটি সেট এবং R, A থেকে B তে একটি সম্বন্ধ। তাহলে R-এর অন্তর্গত ক্রমিত জোড়গুলির প্রথম পদগুলি নিয়ে গঠিত সেটকে R-এর অঞ্চল (Domain) এবং দ্বিতীয় পদগুলি নিয়ে গঠিত সেটকে R-এর প্রসার (Range) বলে। অর্থাৎ R সম্বন্ধের ক্ষেত্র বা অঞ্চল = Dom (R) = $\{x : (x, y) \in R\}$ এবং R এর প্রসার = Range(R) = $\{y : (x, y) \in R\}$ লক্ষণীয় যে R সম্বন্ধের ক্ষেত্র হলো A-এর একটি উপসেট এবং R সম্বন্ধের প্রসার হলো B এর একটি উপসেট। সেট B কে R সম্বন্ধের উপঅঞ্চল (Co-domain) বলা হয়।

2.4.4 অপেক্ষক :

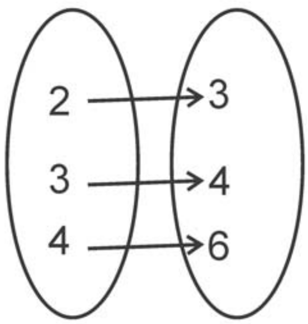
ধরা যাক A ও B দুটি অশূন্য সেট। যদি A ও B এর মধ্যে এরূপ নিয়ম হয় যে, যাতে A-এর প্রত্যেকটি সদস্য x, B এর কোনো না কোনো একক সদস্য y-এর সঙ্গে যোগাযোগ সৃষ্টি করে, তবে এই নিয়মকে অপেক্ষক বলে। উল্লেখ্য, A সেটের একটি সদস্যের জন্য B সেটে কেবলমাত্র একটি সদস্য থাকবে এবং একাধিক সদস্য থাকতে পারবে, তবে A সেটের একাধিক সদস্যের জন্য B সেটে একটি সদস্য থাকতে পারে। A সেটের x সদস্য B সেটের যে সদস্যের সঙ্গে সম্পর্কিত তাকে সাধারণত f(x) দ্বারা সূচিত করা হয় এবং প্রতীকের সাহায্যে $f : A \rightarrow B$ এভাবে লেখা যায়। একটি ভেনচিত্র নিম্নে দেখানো হল: এই চিত্রে দেখা যাচ্ছে $2 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 6$, $4 \rightarrow 7$ এবং $5 \rightarrow 4$, A সেটের সদস্য 2, B সেটের দুইটি সদস্য 3 ও 4 এর সাথে যুক্ত হয়েছে বা ম্যাপিং হয়েছে। সংজ্ঞানুসারে এই সম্পর্কটি অপেক্ষক নয়। কারণ সংজ্ঞানুসারে A সেটের একটি সদস্যের জন্য B সেটে কেবলমাত্র একটি সদস্য থাকবে। সুতরাং বলা হয় যে "প্রত্যেক অপেক্ষকই একটি সম্বন্ধ, তবে প্রত্যেক সম্বন্ধ অপেক্ষক নয়।"



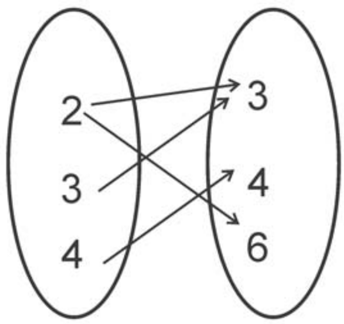
কোনো বস্তুর চাহিদা সেই বস্তুর দামের উপর নির্ভরশীল—এই বক্তব্যটিকে অপেক্ষকের আকারে প্রকাশ করলে লিখতে হবে $D = f(P)$ যেখানে D হোলো চাহিদার পরিমাণ এবং P হোলো যে দ্রব্যটি ক্রয় করার ইচ্ছা তার মূল্য। সেভাবেই কোনো বস্তুর উপযোগিতা (U) যখন সেই বস্তুর ভোগের পরিমাণের (q) উপর নির্ভর করে তখন অপেক্ষকের মাধ্যমে তার প্রকাশ হয় : $U = f(q)$

উদাহরণ: নিচের কোন্ সম্বন্ধটি অপেক্ষক নয়? যুক্তি দাও।

A



A



সমাধান : 'a' হোলো অপেক্ষক ও 'b' অপেক্ষক নয় শুধুই সম্বন্ধ। কারণ 'b' কে $2\to3$ ও $2\to6$,

অপেক্ষক ক্ষেত্র ও প্রসার : যেহেতু প্রত্যেক অপেক্ষক একটি সম্বন্ধ, সুতরাং অপেক্ষকের ক্ষেত্র বা প্রসার বলতে সম্বন্ধ হিসেবে এর ক্ষেত্র এবং প্রসারই বোঝায়। A সেট থেকে B সেটে f যদি একটি অপেক্ষক হয় তবে ক্ষেত্র $f = A$ এবং B সেটের যে সকল উপাদান $a \in A$ এর ছবিরূপে পাওয়া যায় ঐ উপাদানগুলি f এর প্রসার। সুতরাং প্রসার $f \subset B$ যদি f একটি অপেক্ষক হয় এবং ক্ষেত্র $f=A$ ও প্রসার $f \subset B$ হয়, তবে f কে A থেকে B এ বর্ধিত অপেক্ষক বলা হয় এবং $f : A\to B$ লিখে প্রকাশ করা হয়। যদি f অপেক্ষক হয় এবং $(x, y) \in F$ হয়, তবে y কে f এর অধীনে ছবি (image) বলা হয় এবং $y = f(x)$ লেখা হয়। অন্যভাবে বলা যায় $y = f(x)$ এই অপেক্ষকের ক্ষেত্র হোলো x এর এমন একটি সেট যেখানে সমস্ত x এর জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় করা সম্ভব, যাদের সংগ্রহকে এর প্রসার বলা হয়।

উদাহরণ : $f : x \to 3x^2+2$ এর ক্ষেত্র $D=\{1, 2, 3\}$ হলে এর প্রসার নির্ণয় করো।

সমাধান : f এর অধীানে 1-এর ইমেজ বা ছবি হোলো

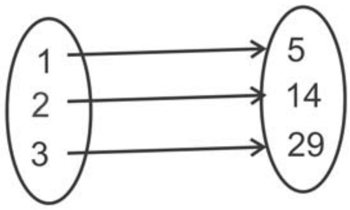
$1\to3\times1^2+2 \Rightarrow f(1) = 5$

f এর অধীনে 2 এর ইমেজ: $2 \to 3\times2^2+2 \Rightarrow f(2)=14$

সেভাবে $f(3) = 29$

$\therefore$ এই অপেক্ষকটির প্রসার $R=\{5, 14, 17\}$

$f : D \to R$



উদাহরণ : -এর ক্ষেত্র ও প্রসার নির্ণয় করো।

সমাধান : $\sqrt{2x+4}$; x -এর সকল মানে জন্য এভাবেই সংজিত যেখানে 2x+4 হলো অঋণাত্মক বা নন্-নেগেটিভ (non-negative) এখন $2x + 4 \geq \Rightarrow x \geq -2$. $\therefore$ g এর ক্ষেত্র হোলো $[-2, \infty)$ এখন প্রসার নির্ণয় করতে হলে দেখতে হবে x যখন $[-2, \infty)$ এই সীমার মধ্যে থাকে তখন $\sqrt{2x+4}$ এর সম্ভাব্য মানগুলি কী কী? $x = -2$ হলে $\sqrt{2x+4} = 0$ এবার $y_0 \geq 0$, যেখানে y_0 যে কোনো একটি সংখ্যার জন্য অপর সংখ্যা x_0 পাওয়া যায় যেখানে $\sqrt{2x_0 + 4} = y_0$ ।

$\therefore\ 2x_0 + 4 = y^2_0 \Rightarrow 2x = y^2_0 - 4 \Rightarrow x_0 = ½\,(y^2_0 - 4)$

$\because\ y^2_0 \geq 0\ \therefore\ x_0 = ½\,(y^2_0 - 4) \geq ½\,(-4) = -2$

সুতরাং যে-কোনো সংখ্যা $y_0 \geq 0$, এর জন্য $x_0 \geq -2$ সংখ্যা পাওয়া যায় যাতে $g(x_0) = y_0$। অতএব g এর প্রসার বা সীমা হোলো $[0, \infty)$

2.5 সারাংশ

এই অধ্যায়ে অর্থনীতির বিভিন্ন ক্ষেত্রে আবশ্যক ও যথেষ্ট অবস্থার মাধ্যমে চূড়ান্ত মান নির্ণয় করা একটি গুরুত্বপূর্ণ সমস্যা। সে বিষয়ে বিশদভাবে আলোচনা করা হয়েছে। সেট তত্ত্ব ও তার ধর্ম, সম্বন্ধ ও অপেক্ষক ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

2.6 অনুশীলনী

1. যদি $S_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $S_2 = \{2, 3\}$ হয় তবে $S_1 \quad S_2$ ও $S_1 \quad S_2$ কি হবে?
2. $S = \{1, 2, 3, 4\}$ এই সেটের কতগুলি উপসেট আছে?
3. একটি সম্বন্ধ দেওয়া হোলো:

   $R = \{(7, 3), (3, 3), (4, 7), (3, 7)\}$। এটিকে কি অপেক্ষক বলা যায়?
4. আবশ্যিক ও যথেষ্ট শর্তের মধ্যে কী পার্থক্য?

2.7 গ্রন্থপঞ্জি

1. Sydsaeter K, Hammond P, Strom A (2015) : Essential Mathematics for Economic Analysis, Fourth Edition, Perason.
2. Chiang, Alpha C. (1967) : Fundamental Methods of Methematical Economics, McGraw Hill Book Company.
3. Mehta, B.C., and G.M.K, Madnani (1997) : Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons.
4. Allen, R.G.D. (1938): Mathematical Analysis for Economists, MacMillan
5. Sarkhel, J. and A. Bhukta (2000) : An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Limited.
6. Yamane, T. (1968): Mathematics for Economists, Prentice Hall.

একক 3 ❒ বাস্তব চলরাশির একমাত্রিক অপেক্ষক

গঠন

3.1 উদ্দেশ্য

3.2 প্রস্তাবনা

3.3 লেখচিত্র

3.4 অপেক্ষকের প্রাথমিক ধরন

3.5 ধারাবাহিকতা সংখ্যা এবং শ্রেণি

3.5.1 ধারাবাহিক সংখ্যাগুচ্ছ

3.5.2 শ্রেণি বা ক্রম

3.6 সন্তত বা অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক

3.6.1 অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের মৌলিক ধর্মসমূহ

3.7 সারাংশ

3.8 অনুশীলনী

3.9 গ্রন্থপঞ্জি

3.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন

- লেখচিত্রের ব্যবহার
- অপেক্ষকের বিভিন্ন ধরন
- ধারাবাহিক সংখ্যা এবং শ্রেণি বলতে কী বোঝায়

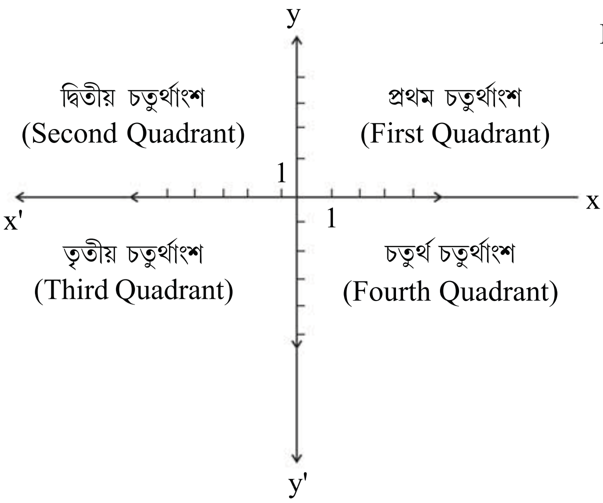
3.2 প্রস্তাবনা

গণিতে অপেক্ষক হোলো একটি মৌলিক ধারণা এবং গাণিতিক অর্থনীতিতেও এর গুরুত্ব অপরিসীম। যেমন গাণিতিক অর্থনীতিতে উপযোগিতা অপেক্ষক, ভোগ অপেক্ষক, ব্যয় অপেক্ষক, উৎপাদন অপেক্ষক, মুনাফা অপেক্ষক

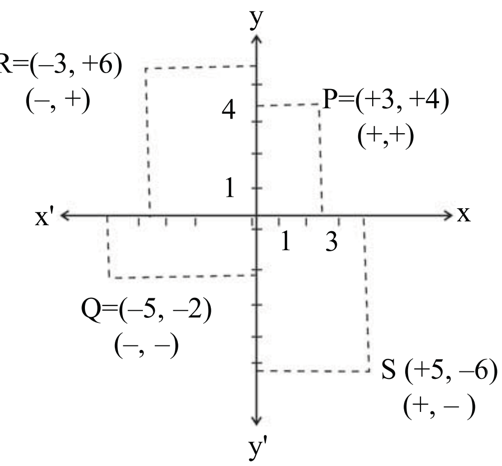
ইত্যাদি বিভিন্ন অপেক্ষকের ধারণা, প্রকৃতি, স্থায়িত্ব, চরম বা অবম মান সম্পর্কে আলোচনা করা হয়। এই এককে কেবলমাত্র একটি চলরাশি সংক্রান্ত বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষকের একটি সাধারণ আলোচনা করা হলো।

3.3 লেখচিত্র

কার্টেজীয় স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে দুটি পরস্পর লম্ব রেখা প্রতিস্থাপিত করা হয়, যাদের স্থানাঙ্ক অক্ষ বলা হয়। এই দুই অক্ষকে x অক্ষ বা অনুভূমিক অক্ষ ও y অক্ষ বা উল্লম্ব অক্ষ বলা হয়। এই দুই-এর ছেদবিন্দুকে মূলবিন্দু (0) বলা হয়। এই দুই রেখাকে বাস্তব সংখ্যা পরিমাপ করা হয়, এবং চিত্র 3·1 এর সাহায্যে এটা দেখানো যায়। x অক্ষের প্রতিটি বিন্দুর একক দূরত্ব y অক্ষের প্রতিটি বিন্দুর একক দূরত্বের সঙ্গে নাও মিলতে পারে।



চিত্র : 3·1



চিত্র : 3·2

চিত্র 3·1-এর আয়তাকার স্থানাঙ্ক পদ্ধতিকে বলা হয় xy সমতল (xy plane)। স্থানাঙ্ক অক্ষ দুটি তলকে চারটি পাদে (quadrant) বিভক্ত করেছে। এই তলে অবস্থিত যে কোনো বিন্দু P কে (a, b) এই বাস্তব সংখ্যাদ্বয়ের জোড় (unique pair) হিসাবে প্রকাশ করা যায় (a, b) এই সংখ্যাদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত বিন্দুকে x = a এই উল্লম্ব সরলরেখা ও y = b এই অনুভূমিক সরলরেখার ছেদবিন্দুর উপর অবস্থান হিসেবে দেখানো হয়।

চিত্র 3·2 তে দেখা যায় যে যদি (3, 4) এই ক্রমিক জোড় প্রদত্ত থাকে তবে তার দ্বারা নির্দেশিত বিন্দু P এর অবস্থান হবে x = 3 ও y = 4 এই সরলরেখা দুটির ছেদবিন্দুর উপর। অর্তাৎ P এর অবস্থান হবে y অক্ষর ও একক দক্ষিণে ও 4 একক x অক্ষের উপরে (3, 4) কে P এর স্থানাঙ্ক করা হয়। অনুরূপভাবে Q এর অবস্থান y অক্ষের 5 একক বাঁ-দিকে এবং x অক্ষের 2 একক নীচে। অতএব Q এর স্থানাঙ্ক হোলো (–5, –2) কোনো একটি চলরাশির প্রত্যেক অপেক্ষককেই এভাবে আয়তাকৃতি স্থানাঙ্ক পদ্ধতিতে লেখচিত্রের আকারে প্রকাশ করা সম্ভব।

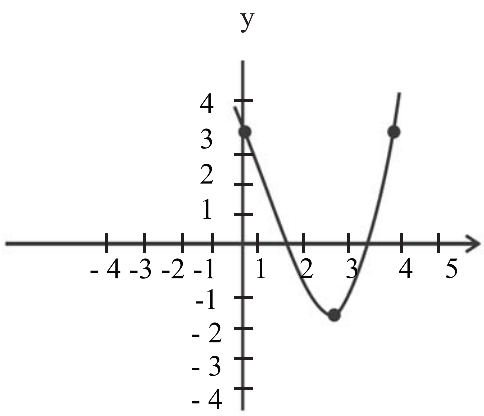
সুতরাং f অপেক্ষকের লেখচিত্র হোলো সহজ ভাষায় {x, f(x)} এর সকল বিন্দুগুলির সেট যেখানে x; f এর ডোমেইনের (domain) মধ্যে অবস্থান করে।

উদাহরণ 3.3.1 : $f(x) = x^2 - 4x + 3$, এই অপেক্ষকের x-এর মানগুলি নিম্নে প্রদত্ত হোলো।

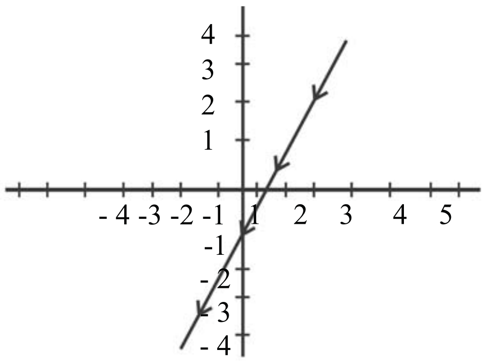
Table-1 : f(x)-এর মান :

x	0	1	2	3	4
f(x)	3	0	–1	0	3

(x, y) তলে স্থানাঙ্কগুলি বসিয়ে লেখচিত্র অঙ্কন করো।



চিত্র 3.3 : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ এর লেখচিত্র



চিত্র 3.4 : $g(x) = 2x - 1$-এর লেখচিত্র

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ এর লেখচিত্র 1 এ দেখানো হলো। এই লেখচিত্রটিকে বলা হয় অধিবৃত্ত (Parabola))

উদাহরণ 3.3.2 : $g(x) = 2x - 1$-এর লেখচিত্র অঙ্কন করো নির্দিষ্ট কিছু স্থানাঙ্কর ভিত্তিতে।

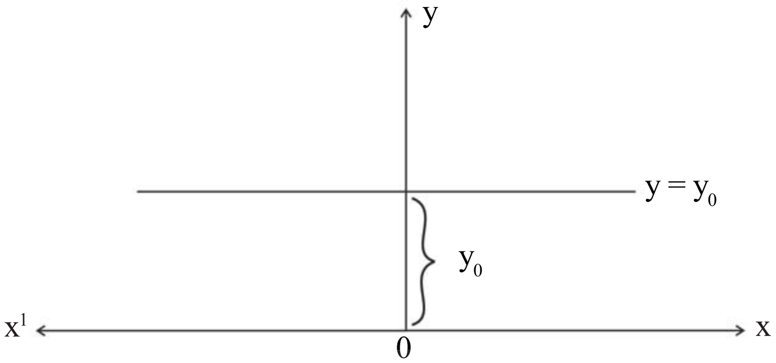
সমাধান : x এর মান –1, 0, 1, 2 নিলে g(x) এর মানগুলি হবে $g(-1) = 2(-1) -1 = 3$; $g(0) = 2{\times}0 = 1 = -1$, $g(1) = 2{\times}1 - 1 = 1$, $g(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$. এভাবে x এর বিভিন্ন মান বসালে বিভিন্ন g(x) ক্রমানুসারে হবে, যদি (–1, –3); (0, –1), (1, 1) ও (2, 3) স্থানাঙ্কগুলি (x, y) তলে বসানো হয় তাহলে প্রাপ্ত লেখচিত্রটি হবে সরলরেখা। এটি চিত্র 3.4 তে দেখানো হলো।

3.4 অপেক্ষকের প্রাথমিক ধরন :

3a(a) y=f(x) হল একটি সাধারণ বিবৃতি। এটি শুধু বলছে যে, x এবং y সম্পর্কযুক্ত। কিন্তু সেই সম্পর্কের প্রকৃতিটি স্পষ্টভাবে বলা হয়নি। সেই সম্পর্কের প্রকৃতি অনুযায়ী বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষক পাওয়া যায়। আমরা প্রধান কয়েকটি ধরন নীচে উল্লেখ করছি।

1. ধ্রুবক অপেক্ষক (Constant Function) : যে অপেক্ষকের শুধু একটিই মান আছে সেই অপেক্ষককে বলা হবে ধ্রুবক অপেক্ষক। উদাহরণস্বরূপ, y = f(x) = 10 হল একটি ধ্রুবক অপেক্ষক 1 এর অর্থ হয়, x-এর মান যাই হোক না কেন, y সর্বদাই 10-এর সমান। সাধারণভাবে, $y = y_0$ বা $y=a_0$ হল একটি ধ্রুবক অপেক্ষক। স্থানাঙ্ক

জ্যামিতির সমতলে অপেক্ষকটি একটি অনুভূমিক সরলরেখার মতো দেখতে হবে। এর উল্লম্ব ছেদাঙ্ক হবে a_0 বা y_0 (চিত্র 3.5)



চিত্র 3.5

সাধারণভাবে বলতে গেলে, এক চলরাশির বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষকের সাধারণ রূপটি হল : $y = a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ যেখানে n হল একটি পূর্ণসংখ্যা। এই n-এর মান অনুযায়ী আমরা বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষকের বিভিন্ন রকমভেদ পেয়ে থাকি।

যদি $n = 0$ হয়, তাহলে $y = a_0$ (ধ্রুবক অপেক্ষক)

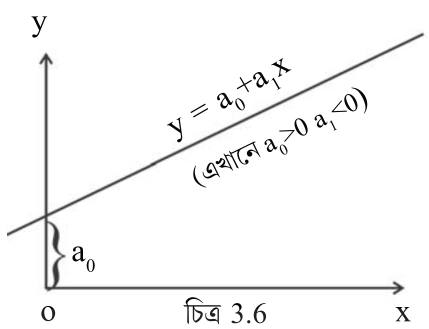
যদি $n = 1$ হয়, তাহলে $y = a_0 + a_1x$ (রৈখিক অপেক্ষক, linear function)

যদি $n = 2$ হয়, তাহলে $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ (দ্বিঘাত অপেক্ষক, Quadratic function)

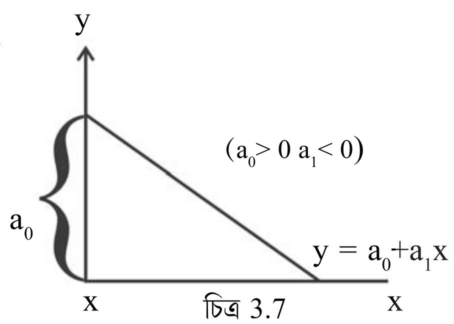
যদি $n = 3$ হয়, তাহলে $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ (ত্রিঘাত অপেক্ষক, Cubic function) ইত্যাদি।

2. রৈখিক বা সরলরৈখিক অপেক্ষক (Linear Function):

রৈখিক অপেক্ষকের সাধারণ সমীকরণটি হল: $y = a_0+a_1x$। এই সমীকরণে a_0 হল উল্লম্ব ছেদাংশ এবং a_1 হল রেখাটির প্রবণতা বা ঢাল। $a_0>0$ এবং $a_1>0$ ধরে আমরা 3.6 নং চিত্রে সরলরেখাটি এঁকেছি। আবার, $a_1< 0$ হলে রেখাটি নিম্নমুখী হবে। 3.7 নং চিত্রে $a_0>0$ এবং $a_1<0$ ধরে আমরা একটা সরলরেখা এঁকেছি।



চিত্র 3.6



চিত্র 3.7

3. দ্বিঘাত অপেক্ষক (Quadratic Function) : যে অপেক্ষকে স্বাধীন চলরাশির ঘাতে উচ্চতম মান ২, তাকে দ্বিঘাত অপেক্ষক বলা হয়।

উদাহরণ : 1) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

2) $y = ax^2 + bx + c$

3) $y = 3x^2 + 4x + 5$ ইত্যাদি

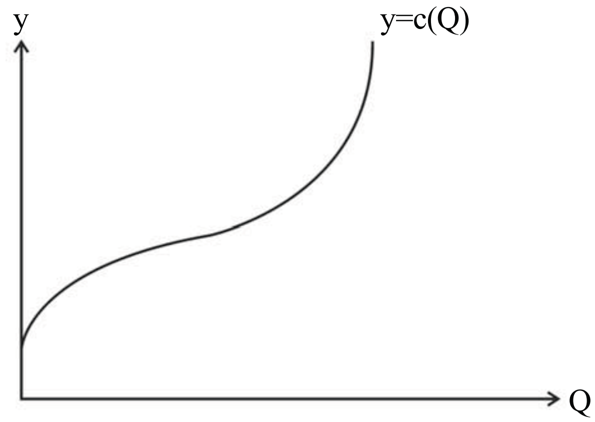
অর্থনীতিতে প্রান্তিক ব্যয় রেখা, গড় ব্যয় রেখা, প্রান্তিক ও গড় উৎপাদন রেখা ইত্যাদি সাধারণভাবে দ্বিঘাত ধরনের হয়।

4. বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষক (Polynomial Function) :

যদি x ও y চলরাশির পারস্পরিক সম্পর্ককে বর্ণনা করা যায় এভাবে যে $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ...+a_n$ যেখানে $a_0(\neq 0)$; $a_1, a_2..., a_n$ সকলেই বাস্তব সংখ্যা অর্থাৎ ধ্রুবক এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, তাহলে y কে বলা হবে x এর একটি n-ঘাত বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষক। এখানে অপেক্ষকটির পরিসর হলো R।

উদাহরণস্বরূপ, $y = x-1$ ও $y = x^2 + x + 1$ যখন $x \in R$ যথাক্রমে x-এর একঘাত ও দ্বিঘাত বহুপদবিশিষ্ট অপেক্ষক।

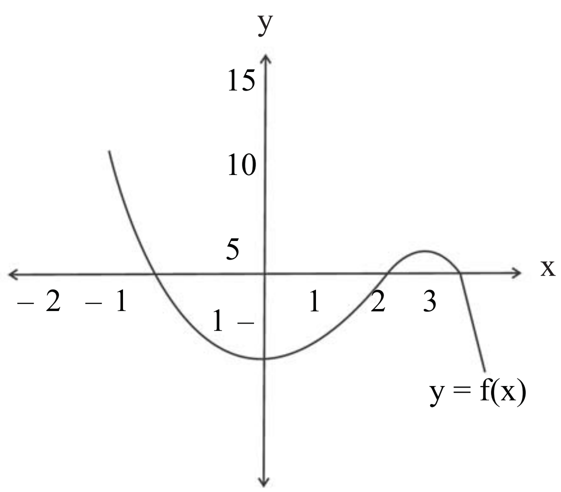
অনুরূপে, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ যেখানে a, b, c, d হোলো ধ্রুবক ও $a \neq 0$ কে বলা হয় ত্রিঘাত অপেক্ষক। এই ধরনের অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র a, b, c, d-র পরিবর্তনের ফলে পরিবর্তিত হয়। অর্থনীতিতে মোট ব্যয় রেখা $c(Q) = aQ^3+bQ^2+cQ+ d(a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$ ও $3ac > b^2)$ এই ত্রিঘাত অপেক্ষকের দৃষ্টান্ত। এর চিত্র হোলো, (চিত্র 3.8) আবার, $f(x) = -x^3 + 4x^2-x - 6$ এই অপেক্ষকটির ক্ষেত্রে চিত্র হবে 3.9 নং-এর ন্যায়।



চিত্র 3.8

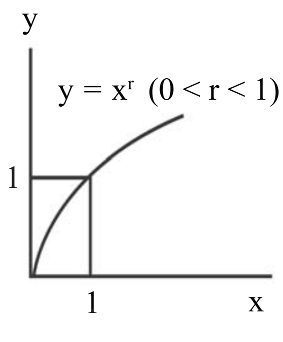
5. ঘাতবিশিষ্ট অপেক্ষক (Power Functions) :

যদি কোনো অপেক্ষককে $f(x) = Ax^r$ ($x > 0$,r এবং A যে-কোনো ধ্রুবক) হিসাবে প্রকাশ করা যায় তখন তাকে শক্তি অপেক্ষক বলা হয়। জাতীয় আয় বৃদ্ধির পরিমাপের জন্য যে ফর্মুলা ব্যবহার করা হয় সেখানে ভগ্নাংশিক সূচক সমন্বিত শক্তি অপেক্ষক ব্যবহার করা হয়। যেমন $y =2.73K^{0.25} L^{0.75} (1.02)^t$ যেখানে y হোলো নীট জাতীয় আয়, K হোলো মূলধন ও L হোলো শ্রম।

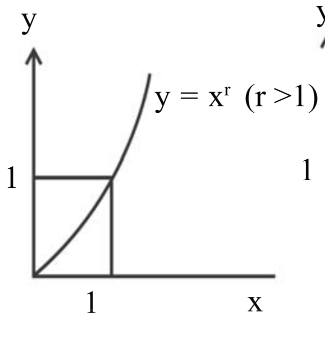


চিত্র 3.9

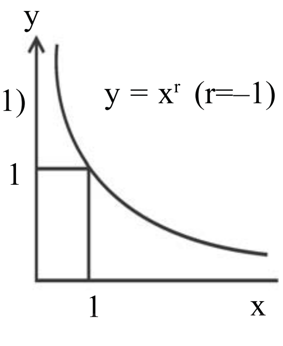
নীচের চিত্রগুলিতে $f(x) = x^r$ এর লেখচিত্রগুলি দেখানো হলো, r এর বিভিন্ন সীমার উপর ভিত্তি করে। চিত্র 3.13 থেকে বোঝা যায় r এর ধনাত্মক সূচক পরিবর্তিত হওয়ার সঙ্গে সঙ্গে লেখচিত্রটির ধরন কীভাবে পাল্টে যায়।



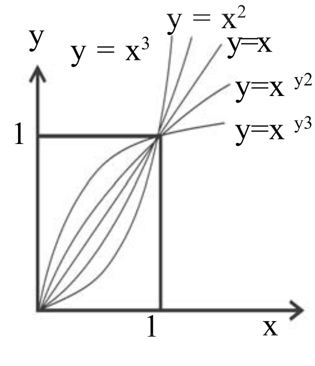
চিত্র 3.10



চিত্র 3.11



চিত্র 3.12



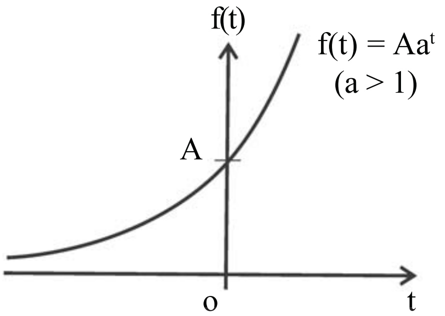
চিত্র 3.13

6. সূচক অপেক্ষক (Exponential function) : ধরি $f : R \to R$ একটি অপেক্ষক যেখানে $f(x) = a^2$; $x \in R$ ও x একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা, তাহলে f অপেক্ষককে বলা হয় সূচক অপেক্ষক। যখন a = 1, এখন সব $x \in R$ এর জন্য $f(x) = 1$ তখন সব $x \in R$ এর জন্য $f(x) = 1$ অর্থাৎ f একটি ধ্রুবক অপেক্ষক। যখন a>1 সূচক অপেক্ষকটি তখন R গুচ্ছের উপর একটি যথার্থ আরোহী বা ঊর্ধ্বল অপেক্ষক (strictly monotonically increasing function) ও তার প্রসার হয় $(0, \infty)$ যা একটি অসীমাবদ্ধ মুক্ত অন্তরাল (unbounded open interval)। যখন $0 < a < 1$ তখন সূচকীয় অপেক্ষকটি R গুচ্ছের (set) উপর একটি যথার্থ অবরোহী বা নিম্নগ অপেক্ষক (strictly monotonically decreasing function) ও তার প্রসার হল $(0, \infty)$, যখন a = e অর্থাৎ 2 ও 3 এর মধ্যবর্তী একটি বিশেষ অমূলদ সংখ্যা তখন $f(x) = e^x$, $x \in R$ সূচক অপেক্ষকের একটি বিশেষ রূপ। যেহেতু 2 > 1, সুতরাং e^x সূচক অপেক্ষকটি $(0, \infty)$ গুচ্ছের উপর যথাযথভাবে আরোহী অপেক্ষক ও তার প্রসার

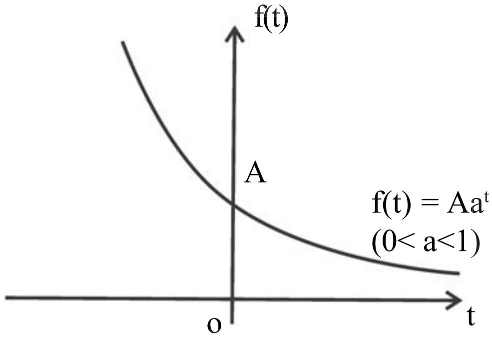
গুচ্ছ। অর্থনীতিতে, অর্থনৈতিক বৃদ্ধি, জনসংখ্যা বৃদ্ধি, ক্রমহ্রাসমান অশিক্ষা ইত্যাদি পরিমাপের ক্ষেত্রে এই ধরনের অপেক্ষক ব্যবহার করা হয়।

এবার যদি $f(x) = a^x$ ও $g(x) = x^a$ এই দুই ধরনের অপেক্ষক খেয়াল করা যায় তাহলে প্রথমটির ক্ষেত্রে সূচক x পরিবর্তিত হয় ও a ধ্রুবক থাকে এবং এটি সূচকীয় অপেক্ষক নয়। আবার দ্বিতীয়টির ক্ষেত্রে সূচকটি ধ্রুবক থাকে ও x পরিবর্তনশীল হয় তখন সেটি শক্তি অপেক্ষক নয়।

এরূপ অপেক্ষকের চিত্র নিম্নে প্রদর্শিত হলো:



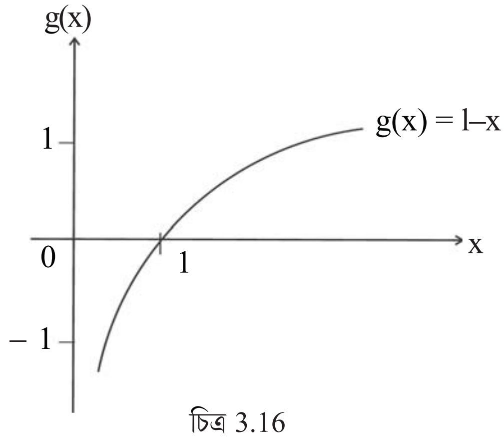
চিত্র 3.14 : $f(t) = Aa^t (a>1)$ -র লেখচিত্র



চিত্র 3.15 : $f(t) = Aa^t (0<a<1)$ -র লেখচিত্র

7. লগারিদ্‌মীয় অপেক্ষক (logarithmic function) :

$f(0, \infty) \rightarrow R$ আপেক্ষকটি $f(x) = \log_a x, x>0$ (a একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা)-এই সম্পর্ক দ্বারা বর্ণিত হলে তাকে লগারিদ্মীয় আপেক্ষক বলা হয়। ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা a কে লগারিদমীয় নিধান (base) বলা হয়। $a>1$ হলে $(0, \infty)$ অন্তরালে $\log_a x$ একটি যথাযথভাবে আরোহী অপেক্ষক এবং $0<a<1$ হলে $(0, \infty)$ অন্তরালে $\log_a x$ একটি যথাযথভাবে অবরোহী অপেক্ষক হয়। যখন $a = e$, তখন $\log_e x$ অপেক্ষকটি স্বাভাবিক লগারিদ্মীয় অপেক্ষক (natural logarithmic function) বলা হয় যার পরিসর (domain) $(0, \infty)$ ও প্রসার R যখন $a=0$; তখন $\log_{10} x$ অপেক্ষকটিকে সাধারণ লগারিদ্মীয় অপেক্ষক (common logarithmic function) বলা হয়। সুতরাং বিশেষভাবে উল্লেখ না থাকলে log x বলতে আমরা $\log_a x$ কেই বোঝাবো।



চিত্র 3.16

নিম্নে স্বাভাবিক লগারিদ্মীয় অপেক্ষকের চিত্র বর্ণিত হোলো। মুদ্রাস্ফিতির হার, জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার ইত্যাদি পরিমাণের জন্য স্বাভাবিক লগারিদমীয় অপেক্ষক g(x) = l~x ব্যবহৃত হয়।

3.5 ধারাবাহিকতা এবং শ্রেণি

3.5.1 ধারাবাহিক সংখ্যাগুচ্ছ :

বীজগণিতে পর পর অবস্থিত সংখ্যাসমূহের প্রথম সংখ্যার পরবর্তী প্রতিটি সংখ্যা কোনো নির্দিষ্ট নিয়মানুসারে গঠিত হলে ওই সংখ্যাসমূহকে একটি অনুক্রম বা ধারাবাহিক সংখ্যাগুচ্ছ (sequence of numbers) বলা হয়। একটি ধারাবাহিক বা অনুক্রম সসীম (finite) বা অসীম (infinite) দুই প্রকারের হতে পারে।

উদাহরণ : 3, 8, 13, 18, 23—এটি 5টি পদের সসীম অনুক্রম যার যে কোনো পদের সঙ্গে 5 যোগ করলে পরবর্তী পদটি পাওয়া যায়।

উদাহরণ : 2, 6, 18, 54, 162....-এটি একটি অসীম অনুক্রম, যার যে-কোনো পদকে 3 নিয়ে গুণ করলে পরবর্তী পদটি পাওয়া যায়।

একটি অনুক্রমের পদগুলিকে $u_1, u_2, u_3..., u_n,...$ দ্বারা সূচিত করা হয়। u_n অর্থাৎ n-তম পদটিকে অনুক্রমের সাধারণ পদ (general term) বলে। একটি অনুক্রমকে $\{u_n\}$ বা $< u_n >$ চিহ্ন দ্বারা লেখা হয়। u_n অর্থাৎ সাধারণ পদ জানা থাকলে n এর স্থলে 1, 2, 3... বসিয়ে অনুক্রমটির প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় পদগুলি নির্ণয় করা হয়।

$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ...;$

উদাহরণ : $\{Z^{n-1}\}=1, 2, 4, 8...;\{(-1)^n(n^2-1)\}=0, 3, -8, 15,....$

3.5.2 শ্রেণি বা ক্রম : কোনো অনুক্রমের পদগুলিকে যোগ অথবা বিয়োগ চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে তাকে ক্রম বলা হয়। যদি $\{u_n\}$ একটি অনুক্রম হয়, তবে $u_1+u_2+u_3+...$ অর্থাৎ $\sum u_n$ কে একটি ক্রম বলা হবে। একটি ক্রম সসীম ও অসীম দুই প্রকারেরই হতে পারে। $u_1,u_2,u_3...$ কে যথাক্রমে ক্রমটির প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, পদ বলে।

উদাহরণ : সসীম শ্রেণি : 1) 1+2+3+....+10; 2) $1+y_2+y_3+y_4+y_5$

অসীম শ্রেণি : 1) $1^3+2^3+3^3+...$ 2) $1+y_3+y_a+...$

কোনো অসীম শ্রেণির প্রথম n পদের যোগফলকে n-তম আংশিক যোগফল বলে এবং ইহাকে S_n দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। সুতরাং $\sum u_n$ অসীম শ্রেণির ক্ষেত্রে n-তম আংশিক যোগফল হল: $S_n = u_1 + u_2 \times ... + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$

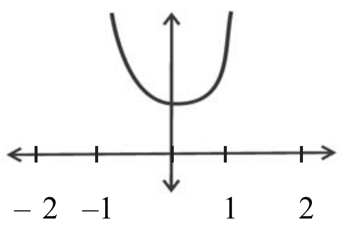
3.6 সন্তত বা অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক

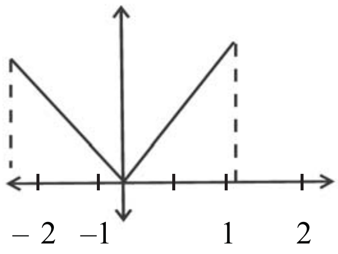
(a, b) ব্যবধিতে f(x) ফাংশনের লেখচিত্রে ব্যবধির মধ্যবর্তী কোনো বিন্দুতে যদি ফাঁকা না থাকে তবে ঐ ব্যাবধিতে f(x) অপেক্ষকটিকে অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক বলা হয়। অর্থাৎ অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের লেখচিত্র অঙ্কনের ক্ষেত্রে পেন্সিল না

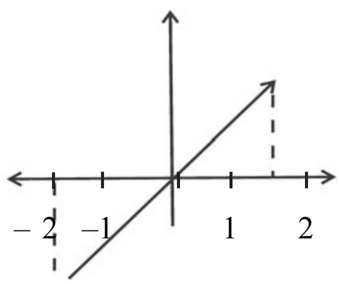
তুলে এক টানে লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়। যে-কোনো বিন্দু x=a তে f(x) ফাংশনকে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x=a^-} f(x) = f(a)$ হয়।

সুতরাং x=a তে f(x) অপেক্ষককে অবিচ্ছিন্ন বলা হবে যদি f(a) সংজ্ঞায়িত হয় এবং হয়

অর্থাৎ $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ আমরা হয়।







চিত্র 3.17 : $f(x) = x^2+3$ চিত্র 3.18 : $f(x) = |x|$ চিত্র 3.19 $f(x) = x$

চিত্র 3.17 এ $f(x) = x^2+3$ অপেক্ষকটি, চিত্র 3.18 তে $f(x) = |x|$ এবং 3.19 নং চিত্রে $f(x) = x$ অপেক্ষকটি (–2, 2) ব্যবধিতে অবিচ্ছিন্ন।

অর্থাৎ অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষককে নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়—

একটি মুক্ত অন্তরালে x=a বিন্দুতে f(x) অপেক্ষকটি অবিচ্ছিন্ন হবে যদি $\delta>0$ এরকম কিছু বিন্দু থাকে যেখানে $|f(x)-f(a)|<\in$, যখনই $|x-a| < \delta$, যে কোনো $\in>0$-র জন্য, হবে।

উদাহরণ: 3.6.1: প্রমাণ করো যে $y =|x|$ অপেক্ষকটি সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন।

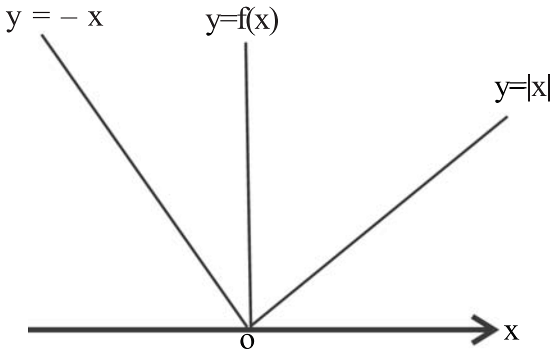
$y =|x|$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র চিত্র 3.20-তে বর্ণিত আছে। আমরা জানি $|x| = x$ যখন $x>0$ $|x|$ এর $-x$ যখন $x < 0$

লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে $(-\infty, \infty)$ ব্যবধিতে |x| সর্বত্রই অবিচ্ছিন্ন। সুতরাং x=0 বিন্দুতে এর অবিচ্ছিন্নতা বিচার করলেই চলবে।

এখন x=0 বিন্দুতে $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$f(0) = 0$



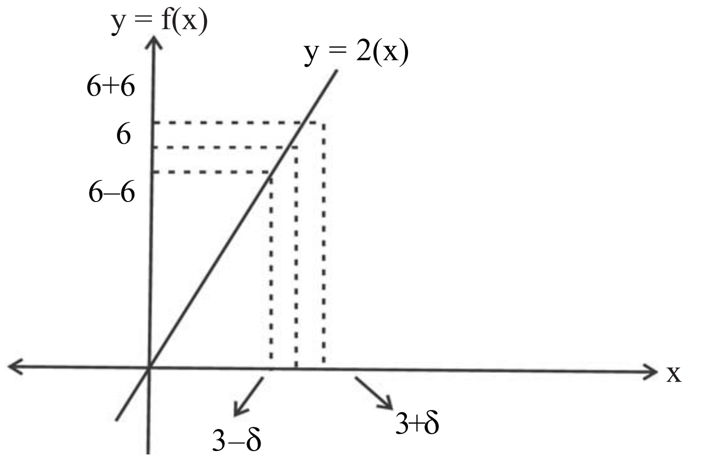
চিত্র 3.20

সুতরাং $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

অর্থাৎ x=0 বিন্দুটিতে অপেক্ষকটি অবিচ্ছিন্ন।

অর্থাৎ y=|x| অপেক্ষকটি সর্বত্রই অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ : 3.6.2 : দেখাও যে f(x) = 2x অপেক্ষকটি একটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক।



চিত্র 3.21

ধরা যাক x=3 একটি বিন্দু যার অপেক্ষক মান f(3) = 6 এখন প্রদত্ত অপেক্ষকটি এই বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হলে যদি, কোনো সংখ্যা $\in>0$ যত ছোটোই হোক না কেন তার জন্য $\delta>0$ কিছু মান, হতে পারে খুবই ছোটো, সেটা পাওয়া যাবে, যার ফলে $(3-\delta, 3+\delta)$ মধ্যের x সেটের সকল মানের জন্য সমস্ত অপেক্ষকমান $(6-\in, 6+\in)$ দ্বারা বর্ণিত সেটে অবস্থান করবে। অর্থাৎ x=3 এর নিকটবর্তী বিন্দুগুলির অপেক্ষকমান মানগুলি f(3) এর কাছাকাছি অবস্থান করবে। যদি $\in = 0.01$ ও $\delta = 0.002$ ধরা হয়, তাহলে $x\in(3-0.002, 3+0.002)$ উপর সংঞ্জিত f(x) এর মানগুলি f(3) এর $\in$ দূরত্বের মধ্যে অবস্থান করবে। অর্থাৎ $f(x)\in(f(3-0.002, 3+.002))$ বোঝায় $f(x)\in(6-0.004,$

6+0.004) এই সবকটি মানের অবস্থান f(3) = 6 এর থেকে ∈ = 0.001 দূরত্বের মধ্যে δ এর মান যদি ধরা হয় δ≤0.005 তাহলে এটি সত্য হবে। অর্থাৎ সাধারণভাবে এটা বলা য়ায় যে x=a এই ধরনের যে-কোনো মানের ক্ষেত্রে f(x); f(a) -র ∈ দূরত্বে মধ্যে অবস্থান করবে যতক্ষণ δ<∈/2 হবে। x∈(a–∈/2, a+∈/2)-এর জন্য f(x)∈(2a ∈, 2a+∈) হবে। f(x) = 2x এই অপেক্ষকটি x∈R এর প্রত্যেকটি বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ 3.6.3 : একটি অপেক্ষক f : R→R বর্ণিত হয় এভাবে যে

$$f(x)=\frac{x^{15}-a^{15}}{x^{12}-a^{12}} \text{ যখন } x\neq a$$
$$=\frac{a^3}{4} \text{ যখন } x=a$$

এক্ষেত্রে R এর ওপর f এর অবিচ্ছিন্নতা পরীক্ষা করুন।

সমাধান : ধরি x∈R এবং x≠a। তাহলে একটি বীজগাণিতিক অপেক্ষক সেটি a ব্যতীত R-এর সব x এর জন্য অবিচ্ছিন্ন।

এখন, $$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^{15}-a^{15}}{x^{12}-a^{12}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{x^{15}-a^{15}}{x-a}}{\frac{x^{12}-a^{12}}{x-a}}\left[\because x-a\neq 0\right]$$

$$=\frac{15a^{15-1}}{12a^{12-1}}\left[\because \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}, \text{ যখন n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা}\right]$$

$$=\frac{5}{4}a^3 \text{ কিন্তু } f(a)=\frac{1}{4}a^3 \ \therefore \lim_{x\to a} f(x)\neq t(a)$$

সুতরাং n = a বিন্দুতে f অবিচ্ছিন্ন নয়। অতএব, R এর উপর f অবিচ্ছিন্ন নয়।

3.6.1 অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের মৌলিক ধর্মসমূহ :

(i) একটি ধ্রুবক অপেক্ষক সর্বদাই অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক।

(ii) একই পরিসরে সংজ্ঞাত দুইটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের যোগফল বা বিয়োগফল অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক হয়।

(iii) একই পরিসরে সংজ্ঞাত দুইটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের গুণফল একটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক।

(iv) একই পরিসরে সংজ্ঞাত দুইটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের ভাগফল একটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক হবে যদি অবশিষ্ট অপেক্ষকটি পরিসরের কোনো অংশে শূন্য না হয়।

(v) একটি অপেক্ষক কোনো বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ প্রান্তে (close-end) অবিচ্ছিন্ন হলে সেটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক হবে কিন্তু একটি অপেক্ষক কোনো মুক্ত প্রান্তে (open end) অবিচ্ছিন্ন হলে সেটি সীমাবদ্ধ হতেও পারে বা নাও হতে পারে।

3.7 সারাংশ

এই এককে বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষকের লেখচিত্র বর্ণনা ও অঙ্কন পদ্ধতি আলোচিত হয়েছে। ক্রম ও অনুক্রম এবং অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের ধরন ও বৈশিষ্ট্যও আলোচিত হয়েছে।

3.8 অনুশীলনী

1. সূচক অপেক্ষক এবং লগারিদ্‌মীয় অপেক্ষকের মধ্যে পার্থক্য করুন।
2. নিম্নের অপেক্ষকগুলি কী ধরনের অপেক্ষক?

   a) $y = 2x^3 - 30x^2 + 126x + 59$ b) $y = x^2 + 6x + 15$
3. $f(x) = x^2 - 3x - 4$-এর লেখচিত্র অঙ্কন করুন।
4. ধারাবাহিকতা ও শ্রেণির মধ্যে পার্থক্য করুন।
5. $f(x) = |x+1|$ কি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক? পরীক্ষা করে দেখান।

3.9 গ্রন্থপঞ্জি

1. K. Sydsaeter and P. Hammond: (2002) : Mathematics for Economic Analysis, Pearson Educational Asia : Delhi.
2. Allen, R.G.D. (1938) : Mathematical Analysis for Economists, MacMillan.
3. Chiang, Alpha C. (1967): Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw Hill Book Company.
4. Mehta, B.C. and G.M.K. Madnani (1997) : Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons.

একক 4 ❐ এক চলরাশির বিশিষ্ট অপেক্ষকের অন্তরকলন বা অবকলন

গঠন

4.1 উদ্দেশ্য

4.2 প্রস্তাবনা

4.3 কোনো রেখার নতি

4.4 স্পর্শকের নতি ও তার অবকল বা অন্তরজ

4.5 পরিবর্তনের হার ও তার অর্থনৈতিক তাৎপর্য

4.6 সারাংশ

4.7 অনুশীলনী

4.8 গ্রন্থপঞ্জি

4.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন

- কোনো অপেক্ষকের নতি
- কোনো অপেক্ষকের অন্তরকলনের নিয়মাবলি

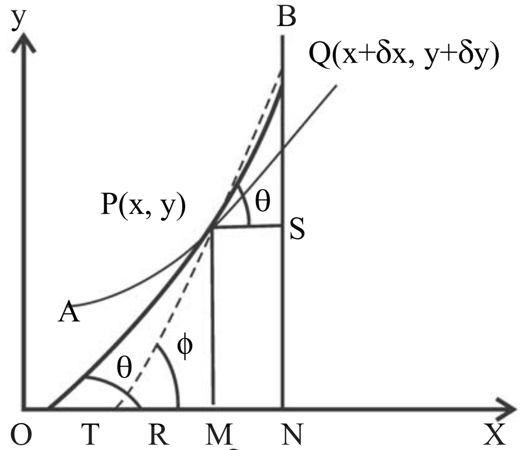
4.2 প্রস্তাবনা

অর্থনীতির একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হোলো কোনো রাশি কত দ্রুত সময়ের সঙ্গে পরিবর্তিত হয়। এই পরিবর্তনের হার বা বৃদ্ধি জানার জন্য অপেক্ষকটির যে ধর্ম বা পদ্ধতি সংক্রান্ত আলোচনা তাকেই বলা হয় অন্তরকলন।

4.3 কোনো রেখার নতি

অর্থনীতির পাঠের একটি গুরুত্বপূর্ণ ক্ষেত্রে হোলো কিছু বিষয় যেমন সময়ের সঙ্গে সঙ্গে উৎপাদনের পরিমাণের পরিবর্তনের হারকে মেপে দেখা বা জাতীয় আয় বৃদ্ধির গতি প্রকৃতি লক্ষ করা ইত্যাদি। এখন $y = f(x)$ এর মাধ্যমে যখন y ও x এর মধ্যে সম্পর্ক লক্ষ্য করা হয় তখন এই অপেক্ষকের লেখচিত্রর ঢাল এই পরিবর্তনের মাত্রা ও দিক সম্পর্কে ধারণা দেয়। $y = ax+b$ দিয়ে প্রকাশিত সরলরেখাটির ক্ষেত্রে 'a'-র মাধ্যমে ঢাল বা নতি এবং 'b'-র মাধ্যমে ছেদক বোঝানো হয়। যদি 'a'-র মান ধনাত্মক এবং বড়ো হয় তাহলে রেখাটি বাঁ-দিক থেকে ডান দিকে ঋজু

(steep) ভাবে বাড়ে বা উর্ধ্বমুখী হয় এবং ‘a’ যদি বড়ো ও ঋণাত্মক হয় তাহলে রেখাটি নিম্নাভিমুখী হয়। এবার এই ঋজুতা বলতে বোঝায় যে কোনো রেখার যে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে যে স্পর্শক আঁকা যায় তার ঢাল বা নতিকে, লেখচিত্রের যে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢালকেই ‘f’-এর ওই বিন্দুতে অন্তরজ বলা হয়। একে $f'(a)$ হিসাবে প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $f'(a)$ হোলো $y = f(x)$ অপেক্ষকের $(a, f(a))$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি।



চিত্র 4.1

$$\therefore \tan\theta = \lim_{Q\to P} \tan\theta = \lim_{\delta x\to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

ধরা যাক, AB বক্ররেখাটি $y=f(x)$ অবিচ্ছিন্ন বা সন্তত অপেক্ষকের একটি অংশ এবং $P(x, y)$ ও $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ এই রেখার উপর কাছাকাছি দুইটি বিন্দু। ধরা যাক QP সরলরেখাকে বর্ধিত করলে তা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সঙ্গে θ কোণ উৎপন্ন করে। অর্থাৎ $\angle XRP = \theta$। P ও Q সঙ্গে x অক্ষের উপর PM ও QN লম্ব অঙ্কন করা হোলো। আবার P থেকে QN এর উপর PS লম্ব আঁকা হোলো। তাহলে $PS = MN = ON - OM = x + \delta x - x = \delta x$ এবং $\delta Q = QN - SN = y + \delta y - y = \delta y$ $\angle SPQ = \theta = \angle XRP$;

$$\therefore \tan\theta = \frac{QS}{PS} = \frac{\delta y}{\delta x}$$

যদি AB বক্ররেখার উপর দিয়ে ক্রম $Q \to P$ হয়, অর্থাৎ P ও Q খুব কাছাকাছি হয় তবে PQ জ্যা PT স্পর্শকের সঙ্গে সমাপতিত হবে। সেক্ষেত্রে $\delta x \to 0$, এবং $\theta \to \phi$ হবে যেখানে $\phi = \angle XTP$

সুতরাং AB বক্ররেখার P(x, y) বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল হোলো $\frac{dy}{dx}$

4.4 স্পর্শকের নতি ও তার অবকল বা অন্তরজ

ধরা যাক xy ক্ষেত্রে (plane) একটি বক্ররেখার উপর P একটি বিন্দু। ওই রেখার উপর অপর একটি বিন্দু Q নিয়ে একটি সরলরেখার মাধ্যমে PQ যুক্ত করা হল

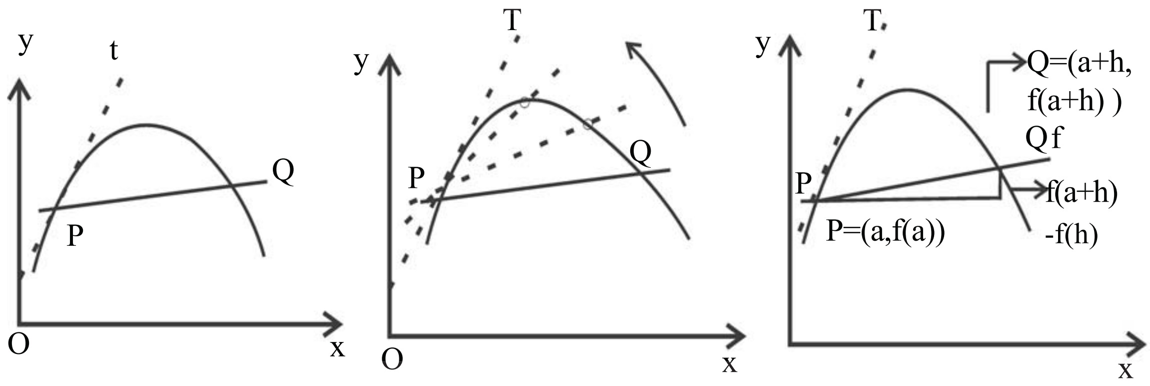


Fig. : 4.2 Fig. 4.3 Fig. 4.4

এই PQ সরলরেখাকে বলে কর্তক (secart) এই কর্তককে যদি, P কে স্থির রেখে তার Q বিন্দুকে P এর দিকে ঘুরিয়ে আনা হতে থাকে তাহলে PT হিসেবে যে সীমায়িত (limiting) কর্তক পাওয়া যায় তাকে বলা হয় (P-এর সাপেক্ষে) এই কর্তক থেকে P বিন্দুতে স্পর্শকের প্রক্রিয়া উপরোক্ত 4.2–4.4 তে দেখানো আছে।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক [a, f(a)]। এখন f এর লেখচিত্রর উপর অবস্থিত P এর নিকটবর্তী Q এর x অক্ষের স্থানাঙ্ক ধরা যাক a+h যেখানে h হোলো একটি ক্ষুদ্র সংখ্যা ও $h \neq 0$ অর্থাৎ Q এর x অক্ষের স্থানাঙ্ক a নয় কিন্তু a এর নিকটবর্তী কারণ $Q \neq P$ যেহেতু Q f এর লেখচিত্রে আছে সুতরাং তার y অক্ষের স্থানাঙ্ক f(a+h) অতএব P ও

Q র স্থানাঙ্ক যথাক্রমে P=(a,f(a)) ও Q=(a+h, f(a+h)). PQ কর্তকটির ঢাল হলো

গণিতে এই ভগ্নাংশটিকে f-এর নিউটন ভাগফল বা অন্তরকলন ভাগফল বলা হয়। (Newton quotient or differential quotient)। যদি h=0 হয় তবে m অসংজ্ঞাত হবে কারণ $m=\frac{0}{0}$ হবে। কিন্তু যখন Q ক্রমশঃ P এর নিকটবর্তী হতে থাকে (Q tends to P), f লেখচিত্র বরাবর তখন Q এর x স্থানাঙ্ক a+h, a-র দিকে অগ্রসর হতে থাকে ও h, 0-র দিকে বা 0-র কাছাকাছি হতে থাকে (h tends to zero)। একই সঙ্গে PQ কর্তক, P বিন্দুতে স্পর্শকে পরিণত হয়। অর্থাৎ h যখন শূন্য হতে থাকে সেই অবস্থায় (1) এ m এর সংখ্যাই হোলো P স্পর্শকের ঢাল। সুতরাং বলা যায়

$f'(a)$ হোলো f লেখচিত্রর a বিন্দুতে অবকল, (Derivative)

$f(x)$ লেখচিত্রে স্পর্শকের সমীকরণ হোলো $(a, f(a))$ বিন্দুর সাপেক্ষে $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

উদাহরণ : 4.4.1 : সূত্র 2 অনুসারে $f(x) = x^2$ এই অপেক্ষকের সাপেক্ষে $f'(a)$ নির্ণয় করো। $f'\left(\frac{1}{2}\right), f'(0)$ ও $f'(-1)$ এর মানগুলি নির্ণয় করো।

সমাধান : $f(x) = x^2$ এর ক্ষেত্রে $f(a+h) = (a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$

\ $f(a+h) - f(a) = (a^2 + 2ah + h^2) - a^2 = 2ah + h^2$

সুতরাং সকল $f \neq 0$-র জন্য

$$\therefore f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$$

$$\frac{d\,f(x)}{dx} \quad \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2ah+h^2}{h^2} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$$

যখন $a = \tfrac{1}{2}$ তখন $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2} = 1$

যখন $a = 0$ তখন $f'(0) = 2 \times 0 = 0$

যখন $a = -1$ তখন $f'(-1) = 2 \times (-1) = -2$

গণিতের ব্যবহারিক ক্ষেত্রে অবকলের ক্ষেত্রে (derivative) যে অন্তরকলন চিহ্ন (differential notation) ব্যবহার করা হয় তা লিবনিজ (Lebnitz) প্রণীত। যদি অপেক্ষকটি $y = f(x)$ হল তাহলে তার $f'(x)$ হবে $\frac{dy}{dx}$

বা

অর্থাৎ $y = x^2$ এর ক্ষেত্রে $\frac{dy}{dx} = 2x$

যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে তখন $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} - \frac{(x=\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} - \frac{(x+h)-f(x)}{h}$$, কে প্রথম নীতি থেকে অন্তরকলজ বলা হয়।

I অন্তরালের যদি x = x + h∈I হয় তখন (যদি সীমার অস্তিত্ব থাকে)

লক্ষণীয় যে যেহেতু x = c + h, সুতরাং x⟶c যখন h⟶0,। স্পষ্টতই x = c বিন্দুতে f′(x) এর মান f′(c) এবং আমরা লিখি $f'(c) = f'(x)\big|_{x=c}$

f অপেক্ষককে I অন্তরালের c বিন্দুতে অবকলনযোগ্য (differentiable of veriable) বলা হবে যদি f′(c) এর অসীম অস্তিত্ব থাকে এবং x বিন্দুতে f অপেক্ষকের অন্তরকলজ নির্ণয়ের প্রক্রিয়াকে x-এর সাপেক্ষে f অপেক্ষকের অবকলন প্রক্রিয়া বলা হয়।

টীকা : i) x∈I হলে ওই বিন্দুতে অপেক্ষক f : I⟶R এর অন্তরকলজের সসীম অস্তিত্ব থাকতে পারে বা নাও থাকতে পারে। সেহেতু অবকলিত অপেক্ষক (derived function) f′ এর পরিসর সর্বদাই I এর উপধস্থ (subset) হবে।

ii) I অন্তরালের কোনো বিন্দু x এ f′(x) এর মান +∞ বা –∞ হতে পারে। সেক্ষেত্রে, x বিন্দুতে f অপেক্ষকের অন্তরকলজ অসীম ধরা হবে।

iii) দ্বারা একটি সীমাকরণ প্রক্রিয়ার চিহ্ন বোঝানো

অতএব, এটি ভাগফল dy÷dx হিসাবে গণ্য করা যাবে না, একে পড়া হবে ডিy ডিx অথবা ‘y এর ডি ডি x’। বাম অন্তরকলজ (left hand derivative) এবং ডান অন্তর কলজ (Right hand derivative) :

ধরা যাক, f : [a, b]⟶R অপেক্ষকটি [a, b] এই বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ অন্তরালে সংজ্ঞাত। ধরা যাক, c∈[a, b] যদি $\lim\limits_{h\to 0}-\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ এর সসীম অস্তিত্ব থাকে তবে বলা যায়, c বিন্দুতে f অপেক্ষকের বাম অন্তরকলজ বর্তমান এবং এই সীমাস্থ মানকে Lf′(c) দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। সুতরাং $Lf'(c) = \lim\limits_{h\to 0}-\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$।

x=c বিন্দুতে f অপেক্ষকের ডান অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকবে যদি $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ এর সসীম অস্তিত্ব থাকে এবং সেটি Rf′(c) দ্বারা চিহ্নিত করা যায়।

সুতরাং $Rf'(c) = \lim\limits_{h\to 0}+\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

অতএব x = c বিন্দুতে f অপেক্ষক অবকলনযোগ্য হলে যদি Lf′(c) ও Rf′(c) উভয়েরই সসীম অস্তিত্ব থাকে এবং তাদের মান সমান হয়। তাহলে যদি c বিন্দুতে f অপেক্ষক অবকলনযোগ্য হয় তবে Lf′(c) = Rf′(c) = f′(c), [a, b] অন্তরালের প্রান্ত বিন্দুতে অন্তরকলজ (Derivative at the end point of the interval [a, b])

c = a হলে c বিন্দুতে f অবকলনযোগ্য হবে যদি Rf(c) এর সসীম অস্তিত্ব থাকে এবং তাহলে আমরা লিখি $f'(c) = Lf'(c)$।

[a, b] অন্তরালের কোনও বিন্দু c তে অপেক্ষক $[a, b]\rightarrow R$ অবকলনযোগ্য হবে যদি $f'(c)$ এর সসীম অস্তিত্ব থাকে এবং সেক্ষেত্রে

$f'(x)|_{x=c} = f'(c)$ যখন $a < b < c$

$= Rf'(c)$ যখন $c = a$

$= Lf'(c)$ যখন $c = b$

অবকল (Differential) :

f(x) যদি f(x) এর অন্তরকলজ হয় এবং x এর বৃদ্ধি Δx হয়, তবে f(x) এর অবচল df(x) সংজ্ঞতি হয় $df(x) = f(x)\ \Delta x$...(1) এই সম্পর্কের মাধ্যমে। যদি f(x) = x তখন $f'(x) = 1$ এবং সেক্ষেত্রে (1) নং সমীকরণ থেকে পাই $dx=\Delta x$। অতএব, যখন x একটি স্বাধীন চলরাশি তখন x এর অবকল অর্থাৎ dx এর মান Δx এর সঙ্গে এক বা অভিন্ন হয়। সুতরাং যদি y= f(x) হয় তবে (1) নং সমীকরণ থেকে পাই, $dy = f'(x)\ dx$। অর্থাৎ একটি অপেক্ষকের অবকলের মান ওই অপেক্ষকের অন্তরকলজ ও স্বাধীন চলরাশির অবকলের গুণফলের সমান।

উদাহরণ 4.4.2 : অন্তরকলজের প্রথম নীতি অনুসারে লেখাও যে ধ্রুবকের অন্তরকলজ শূন্য।

$$\lim_{h\ 0}\frac{ax^2\quad 2axh\quad ah^2\quad bx\quad bh\quad c\quad ax^2\quad bx\quad c}{h}$$

সমাধান : ধরি f(x) = c, যেখানে $x\in R$, একটি ধ্রুবক। তাহলে, c

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}\quad [\because f(x)=c, x\in R]$$

$$= 0 \quad \therefore\ f(x+h)=c,\ x+h\in R$$

উদাহরণ 4.4.3 : অন্তরকলজের প্রথম নীতির সাহায্যে দেখাও যে (ax^2+bx+c) অপেক্ষকটির অন্তরকলজ কি হবে, এখানে a, b ও c শূন্য ব্যতীত ধ্রুবক।

সমাধান : ধরি $f(x) = ax^2+bx+c;\ x\in R$ তাহলে অন্তরকলজের প্রথম নীতির সাহায্যে পাই যে,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\{a(x+h)^2+b(x+h)+c\}-(ax^2+bx+c)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(2ax+ah+b)}{h} = \lim_{h\to 0}(2ax+ah+b)\,[\because h\to 0; \therefore h\neq 0]$$

$$= \lim_{h\to 0}2ax + \lim_{h\to 0}ah + \lim_{h\to 0}b = 2ax + a\times 0 + b = 2ax + b$$

সুতরাং $f'(x) = \frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right) = 2ax+b$

উদাহরণ 4.4.4 : $f(x) = |x|$; $x\in R$ হলে অন্তরকলজের প্রথম নীতির সাহায্যে দেখাও যে $x=0$ বিন্দুতে f অপেক্ষক অবকলনযোগ্য নয়।

সমাধান : যেহেতু, $f(x) = |x|$; $x\in R$ সুতরাং

$$f(x) = -x \quad x<0$$
$$= 0 \quad x=0$$
$$= x \quad x>0$$

এখন $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-0}{h}$

$= -1$

$\therefore f'(0) = -1$

আবার

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}\left[\because h\to 0^+,\ \therefore h\neq 0\right]$$

$$= \lim_{h\to 0^+}(1) = 1 \ \therefore R\,f'(0) = 1$$

যেহেতু, $Lf'(0) \neq R\ f'(0)$, সুতরাং, $x = 0$ বিন্দুতে f অবকলনযোগ্য নয়।

4.5 পরিবর্তনের হার ও তার অর্থনৈতিক তাৎপর্য

অর্থনীতিতে এই রাশিটিকে বলা হয় a থেকে a+h এই অন্তরালে f এর গড় পরিবর্তন হার। লক্ষণীয় যে এই ভগ্ন্যাংশটিই f-এর নিউটনীয় ভাগফল। $h \rightarrow 0$ এই সীমা নিলেই a বিন্দুতে f এর অবকল পাওয়া যায়। অর্থাৎ 'a' বিন্দুতে f এর অবিরাম পরিবর্তন হার হোলো $f'(a)$।

অর্থনৈতিক ক্ষেত্রে আনুপাতিক হার নির্ণয় করাও গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। যে-কোনো পরিবর্তনের আনুপাতিক হার নির্ণয়ের ক্ষেত্রে $f'(a)/f(a)$ সূত্রটি ব্যবহার করা হয়।

ধরা যাক্ কোনো একটি ফার্ম কোনো নির্দিষ্ট সময়ে কিছু দ্রব্য প্রস্তুত করে।

$C(x)$ = x একক দ্রব্য প্রস্তুতির ব্যয়

$R(x)$ = x একক দ্রব্যের বিক্রয়লব্ধ আয়

$\pi(x) = R(x) - C(x)$ = x একক দ্রব্য থেকে প্রাপ্ত লাভের পরিমাণ।

এ ক্ষেত্রে $C'(x)$ হোলো x এর প্রান্তিক ব্যয়, $R'(x)$ হোলো প্রান্তিক আয় ও $\pi'(x)$ হোলো প্রান্তিক লাভ। অর্থনীতিবিদগণ প্রায়শই অবকল বোঝাতে প্রান্তিক ধারণাকে ব্যবহার করেন। যেমন:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h)-C(x)}{h} = \text{প্রান্তিক ব্যয়}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{x}\right) = \frac{x\frac{dc}{dx} - c}{x^2} = \frac{1}{x}\left[\frac{dc}{dx} - \frac{c}{x}\right] = \frac{1}{x}(MC - AC)$$

প্রান্তিক ব্যয় ও গড় ব্যয়ের মধ্যে সম্পর্ক প্রতিষ্ঠা করা যায়। একটি ফার্মের মোট ব্যয় নির্ভর করে সে কতটা উৎপাদন করে তার উপর। সুতরাং $c = c(x)$ হোলো মোট ব্যয় অপেক্ষক।

গড় ব্যয় (Average cost) $= \frac{c(x)}{x}$ এবং প্রান্তিক ব্যয় (Marginal cost)

যদি AC রেখা (AC=Average Cost) নিম্নাভিমুখী হয় তাহলে $\frac{d}{dq}\left(\frac{c}{x}\right) < 0$ অথবা $\frac{1}{x}(MC = AC) < 0$ বা $MC < AC$ অর্থাৎ MC রেখা AC রেখার নীচে অবস্থান করে যখন AC হ্রাস পেতে তাকে। এভাবেই যখন AC রেখা উর্দ্ধাভিমুখী হয় তখন MC রেখা AC রেখার উর্দ্ধে অবস্থান করে। যখন রেখার নতি শূণ্য, AC রেখা MC রেখাকে ছেদ করে। আর একটি ক্ষেত্র দেখা যাক। অর্থনীতিতে চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা পরিমাপনের ক্ষেত্রে অবকলনের ব্যবহার লক্ষ করা যায়।

চাহিদা একটি বহুচলরাশিভিত্তিক অপেক্ষক (Multi-Variate Function)। যদি এদের মধ্যে থেকে শুধু দ্রব্যের দামকে গণ্য করা যায় তাহলে চাহিদা অপেক্ষক প্রকাশ করা যায় $q=f(p)$ যেখানে p হোলো দ্রব্যের দাম ও q হোলো চাহিদার পরিমাণ। চাহিদার স্থিতিস্থাপকতা বলতে বোঝায়। দ্রব্যের দামের শতকরা পরিবর্তনের সঙ্গে, দ্রব্যের চাহিদার পরিমাণের পরিবর্তন হার।

অর্থাৎ যেখানে Δp ও Δq হোলো দামের পরিবর্তন ও চাদির পরিমাণের পরিবর্তন। এখন Δp যদি খুবই ক্ষুদ্র হয় অর্থাৎ

$e_p = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp}$ একে বলা হয় চাহিদার বিন্দুগত দাম স্থিতিস্থাপকতা, যেহেতু চাহিদা অপেক্ষক ঋণাত্মক ঢালসম্পন্ন হয় সুতরাং $\frac{dq}{dp} < 0$ এবং সাধারণভাবে চাহিদার দামগত স্থিতিস্থাপকতা ঋণাত্মক হয়।

4.6 সারাংশ

এই এককে দেখানো হলো ঢাল কাকে বলে এবং তার গুরুত্বই বা কি। কোনো অপেক্ষকের একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল পরিমাপন এবং একে কিভাবে $\frac{dy}{dx}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় তার গাণিতিক ও জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দেওয়া হয়েছে। অন্তর কলজ এবং তার নীতির অনুসরণে বিভিন্ন অপেক্ষকের অন্তরজ নির্ণয় পদ্ধতিও আলোচিত হয়েছে।

4.7 অনুশীলনী

1. অন্তরকলজের সাহায্যে দেখাও যে ধ্রুবকের অন্তরকলজ শূন্য।
2. অন্তরকলজের প্রথম নীতির সাহায্যে $(3x^3 + 4)$-এর অন্তরকলজ নির্ণয় করুন।

4.8 গ্রন্থপঞ্জী

1. Allen, R.G.D. (1938) : Mathematical Analysis for Economists, MacMillan
2. Hoy, M.J., Lwirnois, C. McKenna, R. Rees, and T. Stenjos (2011) : Mathematics for Economics, Third Edition, The MIT Press.
3. Mehta, B.C. and G.M.K. Madnani (1997) : Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons
4. Bhukta, Anindya and Seikh Salim (2013): Mathematics for Undergraduate Economics, Progressive Publishers.

5. Zameeruddin, Qazi and V.K. Khanna (1983) : Mathematics in Commerce and Economics, Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

6. Sarkhel, J. and A. Bhukta (2000) : An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Ltd.

7. Chiang, Alpha C. (1967) : Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw-Hill Book Company.

8. Henry, S.G.B. (1969) : Elementary Mathematical Economics, Routledge and Kegan Paul.

9. Takayama, A. (1974): Mathematical Economics, Dryden Preess.

10. Yamane, T. (1968) : Mathematics for Economists, Prentice Hall.

একক 5 ❐ এক চলরাশির অন্তরকলন বা অবকলন—II

গঠন

5.1 উদ্দেশ্য

5.2 প্রস্তাবনা

5.3 অন্তরকলজের সরল নিয়মাবলি

5.4 যোগ, গুণ ও ভাগফলের অবকলন

5.5 দ্বিতীয় ও উচ্চতর মাত্রার অন্তরকলজ ও তার প্রয়োগ

5.6 সারাংশ

5.7 অনুশীলনী

5.8 গ্রন্থপঞ্জি

5.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন

- দুই বা ততোধিক অপেক্ষকের যোগ, গুণ ও ভাগফলের ক্ষেত্রে অবকলন
- দ্বিতীয় ও উচ্চতর মাত্রার অবকলন নির্ণয় ও তাদের প্রয়োগ

5.2 প্রস্তাবনা

অর্থনীতির ক্ষেত্রে যেমন উৎপাদন বৃদ্ধির সঙ্গে মুনাফা বৃদ্ধির হার, আয়ের হ্রাস বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে জীবনযাত্রার মানের পরিবর্তন ইত্যাদি জানার প্রয়োজন হয়। $y = f(x)$ অপেক্ষকের এই x চলরাশির পরিবর্তনর সঙ্গে y এর পরিবর্তন লক্ষ করা যাবে তাই নিয়েই আলোচনা করা যায় অন্তরকলনের মাধ্যমে।

5.3 অন্তরকলজের সরল নিয়মাবলি

যদি (a, b) মুক্ত অন্তরালের কোনো বিন্দু x-এ $u : (a, b) \rightarrow R$ ও $v : (a, b) \rightarrow R$ অপেক্ষক দুইটির সসীম অন্তরকলজের অস্তিত্ব থাকে তবে

(i) যেখানে c একটি ধ্রুবক

(ii) $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

(iii) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{du}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$, যদি (a, b) অন্তরালের সব বিন্দু x এর জন্য $v \neq 0$ হয়।

উদাহরণ 5.3.1 : ধরা যাক $u=x^3$, $v = \log_e x$ ও $w = e^x$ তাহলে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে অন্তরকলজ নির্ণয় করো।

i) $\frac{d}{dx}(5w)$ ii) $\frac{d}{dx}(u \pm v)$ iii) $\frac{d}{dx}(u, w)$

iv) $\frac{d}{dx}(uv)$ v) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)$

$\frac{d}{dx}(uw) = \frac{d}{dx}(x^3 e^x)$

i) $\frac{d}{dx}(5w) = \frac{d}{dx}(5e^x) = 5\frac{d}{dx}(e^x) = 5e^x$ [(v) নং নিয়মানুসারে]

ii) $\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{d}{dx}\left(x^3 \pm \log_e{}^x\right)$

$= \frac{d}{dx}(x^3) \pm \frac{d}{dx}(\log_e{}^x)$ [(ii) নং নিয়মানুসারে]

$= 3x^2 \pm \frac{1}{x}$

iii)

$= x^3 \frac{d}{dx}(e^x) + e^x \frac{d}{dx}(x^3)$ [(iii) নং নিয়মানুসারে]

$= x^3 e^x + e^x 3x^2 = e^x(x^3 + 3x^2)$

iv)

$$= x^3 \frac{d}{dx}\left(\log_e^{\ x}\right) + \log_e^{\ x} \frac{d}{dx}\left(x^3\right)$$ [নিয়ম (iii) অনুসারে]

$$= x^3 \frac{1}{x} + \log_e^{\ x} \cdot 3x^2$$

$$= x^2 + 3x^2 \log_e^{\ x}$$

v) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{e^x}\right) = \frac{e^x \frac{d}{dx}\left(x^3\right) - x^3 \frac{d}{dx}\left(e^x\right)}{\left(e^x\right)^2}$$

$$= \frac{e^x 3x^2 - x^3 e^x}{\left(e^x\right)^2} = e^x\left(3x^2\right)$$

$$= \frac{3x^2 - x^3}{e^x}$$

উদাহরণ : 5.3.2 : $y = \log_a x$ হলে, যেখানে a যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত হবে?

সমাধান : $y = \log_e x = (\log_e x)(\log_a e)$ [$\log_n m = \log_p m \log_n p$ m, n, p>0]

[$\because$ $\log_a e$ একটি ধ্রুবক]

f একটি ধ্রুবক অপেক্ষক f(x) = A হয়, তাহলে $f'(x) = 0$ অর্থাৎ $f(x) = A \to f'(x) = 0$

নিয়ম vi :

যদি y=f(x) এ কোনো ধ্রুবক যোগ করা যাকে তাহলে অন্তরকলনে সেটি অবলুপ্ত হয়। অর্থাৎ

$y = A + f(x) \to y' = f'(x)$

নিয়ম vii :

y = f(x) কে যদি কোনো গুণক থাকে (Multiplicative constant) অবকলনে সেটি রক্ষিত হয়।

অর্থাৎ $y = A\ f(x) \rightarrow y' = Af'(x)$

নিয়ম viii :

ঘাত নিয়ম (Power Rule) : $f(x) = x^a \rightarrow f'(x) = ax^{a-1}$

[যেখানে a একটি পছন্দমতো (arbitrary) ধ্রুবক]

5.4 যোগ, গুণ ও ভাগফলের অবকলন

ধরা যাক f ও g, A ক্ষেত্রর উপর বাস্তব সংখ্যা দ্বারা সংজ্ঞাত দুটি অপেক্ষক, তাহলে $F(x) = f(x) + g(x)$ এই সূত্র দ্বারা সংজ্ঞাত F অপেক্ষক কে f ও g-র যোগফল বলা হয় অর্থাৎ $f = f + g$। আবার $G(x) = f(x) - g(x)$ এই সূত্র দ্বারা সংজ্ঞাত G অপেক্ষককে বলা হয় f ও G-র পার্থক্য ও তা লেখা হয় $G = f - g$ অনুসারে।

যদি x বিন্দুতে f ও g অবকলনযোগ্য হয় তাহলে F=f+g ও G=f–g ও x বিন্দুতে অবকলনযোগ্য হবে।

সুতরাং, $f(x)=f(x)+g(x) \rightarrow F'(x) = f'(x) + g'(x)$...(i)

$G(x) = f(x)-g(x) \rightarrow G'(x)=f'(x) - g'(x)$...(ii)

লিবনিজের চিহ্নানুসারে :

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \frac{d}{d(x)}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

প্রমাণ: (i) এ F এর নিউটনীয় ভাগফল :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\left[f(x+h)+g(x+h)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{h}$$

যখন $h\rightarrow 0$ তখন শেষ দুই ভগ্নাংশ যথাক্রমে $f'(x)$ ও $g'(x)$ এর দিকে অগ্রসর হতে থাকে। সুতরাং

উদাহরণ হিসাবে বলা যায় যদি $\pi(x)$ হয় লাভ অপেক্ষক, $R(x)$ ও $C(x)$ যথাক্রমে আয় ও ব্যয় অপেক্ষক হয়

তাহলে $\pi(x) = R(x)–C(x)$ বিশেষত $\pi'(x) = R'(x)–C'(x)$ এবং $\pi'(x)$ বা প্রান্তিক লাভ শূন্য হয় যখন $R'(x) = C'(x)$ হয় বা প্রান্তিক আয়, প্রান্তিক ব্যয়ের সমান হয়।

কোনো যোগফলের অবকলন তাদের অবকলনের যোগফল হয়। অর্থাৎ

$$\frac{d}{dx}\left[f_1(x)+\ldots+f_n(x)\right]=\frac{d}{dx}f_1(x)+\ldots+\frac{d}{dx}f_n(x)$$

উদাহরণ 5.4.1: n ঘাত সম্পন্ন কোন বহুপদের (n–th degree polynomial) অবকল নির্ণয় করো

সমাধান : $\frac{d}{dx}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0\right)$

$= na_n x^{x-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1$

যদি ক্ষেত্র A-র উপর সংজ্ঞাত f ও g দুটি অপেক্ষক হয়, তাহলে $F(x) = f(x)\cdot g(x)$ কে f ও g-র গুণক অপেক্ষক (Product) বলা হয়। ও $F=f\cdot g$ হবে। যদি $f(x)=x$ ও $g(x)=x^2$ হয়, তাহলে $(f\cdot g)x = x^3$ এখানে $f'(x)=1$ ও $g'(x)=2x$ ও $(f.g)'x=3x^2$ অর্থাৎ $(f\cdot g)x$ এর অবকল $f'(x)\cdot g'(x)=2x$ এর সঙ্গে সমান হবে না।

যদি f ও g উভয়েই x বিন্দুতে অবকলনযোগ্য হয় তাহলে F= f.g ও x বিন্দুতে অবকলনযোগ্য হবে।

$$F(x) = f(x)\cdot g(x) \to F'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

লিবনিজের চিহ্নানুসারে :

ধরা যাক f ও g বিন্দুতে অবকলনযোগ্য যার নিউটনীয় ভাগফল:

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ এবং ...(1) যখন $h\to 0$ হয় তখন $f'(x)$ ও $g'(x)$ এ সীমায়িত হয়।

এখন F এর নিউটনীয় ভাগফল হোলো

$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$ ...(2) । এখন (2) এর ডানদিকে f(x) g(x+h) সংখ্যাটি বিয়োগ এবং পরে যোগ করে দেওয়া যায়। সুতরাং

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \quad \ldots(3)$$

$$=\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]g(x+h)+f(x)\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \ldots(3)$$

যদি $h \to 0$ হয় তখন তৃতীয় বন্ধনীদ্বয়ের নিউটনীয় ভাগফল $f'(x)$ ও $g'(x)$ এ সীমায়িত হয়। অর্থাৎ $h \neq 0$ জন্য

$$g(x+h)=\left[\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]h+g(x)$$ হবে।

$\therefore g'(x) \cdot 0 + g(x) = g(x)$ হবে, যত $h \to 0$ হবে। অর্থাৎ এভাবে (3) এর নিউটনীয় ভাগফল F, যত $h \to 0$ তত $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ এ সীমায়িত হবে।

উদাহরণ: 5.4.2: যদি $h(x) = (x^3-x) \cdot (5x^4+x^2)$ হয় তাহলে $h'(x)$ কত হবে?

সমাধান : $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ যেখানে $f(x) = x^3-x$ এবং $g(x) = 5x^4+x^2$ এখানে $f'(x) = 3x^2-1$ এবং $g'(x) = 20x^3+2x$, অতএব

$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$= (3x^2-1) \cdot (5x^4+x^2) + (x^3-x) \cdot (20x^3+2x)$

অর্থাৎ $h'(x) = 35x^6 - 20x^4 - 3x^2$

ভাগফল: ধরা যাক f ও g হোলো x বিন্দুতে অবকলনযোগ্য দুটি অপেক্ষক, এবং $f(x)=f(x)|g(x)$

ধরা যাক $g(x) \neq 0$ যাতে F, x বিন্দুতে সংজ্ঞাত হয়। F কে f ও g-র ভাগফল বলা হয় এবং একে লেখা হয় $F=fg\,|\,F'(x)$ এর সূত্র নির্ণয় করার জন্য ধরা যাক F(x), অবকলনযোগ্য এবং $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ এবং $f(x) = F(x) \cdot g(x)$। সুতরাং গুণের নিয়মানুসারে $f'(x) = F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x)$

$$\therefore F'(x)=\frac{f'(x)-F(x)\cdot g'(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)-\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]\cdot g'(x)}{g(x)}$$

লব ও হরকে g(x) দিয়ে গুণ করে পাই :

$$F(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

অর্থাৎ যদি f ও g, x বিন্দুতে অবকলনযোগ্য হয় এবং $g(x) \neq 0$ হয় তাহলে $F=\frac{f}{g}$, x বিন্দুতে লনযোগ্য

এবং $$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \to F'(x)=\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

উদাহরণ : 5.4.3 : $F(x)=\frac{3x-5}{x-2}$ হলে F(x) ও F(b) এর মান কত হবে?

সমাধান : f(x) = 3x–5, g(x) = x–2, ∴ $f'(x)$ = 3, $g'(x)$ =1

সুতরাং $x\neq2$ এর জন্য

x = 6 বসলে $F'(6)=\frac{1}{(6-2)^2}=-\frac{1}{16}$

5.5 দ্বিতীয় ও উচ্চতর মাত্রার অন্তরকলজ ও তার প্রয়োগ

ধরা যাক, $D\subset R$ এবং একটি অপেক্ষক f: $D\rightarrow R$, গুথ D এর একটি উপগুচ্ছ D এর ওপর অবকলনযোগ্য অর্থাৎ $f'(x)$ এর অস্তিত্ব থাকবে যখন $x\in D$। এই অপেক্ষক f' কে $x\in D$ এর জন্য y=f(x) এর প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ (first order derivative) বলা হয়।

একইভাবে কোনও বিন্দু $x\in D$, এর জন্য অপেক্ষক f' অবকলনযোগ্য হয় তবে $\frac{d}{d^x}[f'(x)]$ হবে f' এর () হবে f' এর প্রথম ক্রমের অন্তরকলজ এবং এটিকে x বিন্দুতে y=f(x) এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ (second order derivative) বলা হয়। $x\in D$, এর জন্য y=f(x) এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজ $f''(x)$ বা $\frac{d^2y}{dx^2}$ বা $\frac{d}{d^x}[f'(x)]$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। x বিন্দুতে y=f(x) এর দ্বিতীয় ক্রমের অন্তরকলজের অস্তিত্ব হবে যদি

$\lim_{h\to0^+}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$ এবং এই উভয় সীমাস্থ মানের সসীম অস্তিত্ব থাকে ও তারা সমান হয়।

অতএব

যদি সীমাস্থ মানের অস্তিত্ব থাকে।

উদাহরণ 4.5.5 : y = x(x+1) (x+2) হলে কত হবে?

সমাধান : যেহেতু y = x(x+1) (x+2)

$$\frac{dy}{dx}=(x+1)(x+2)\frac{d}{dx}(x)+x(x+2)\frac{d}{dx}(x+1)+x(x+1)\frac{d}{dx}(x+2)$$

= (x+1)(x+2) + x(x+2) +x(x+1)

তাহলে, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$

$$=\frac{d}{dx}\{(x+1)(x+2)\}+\frac{d}{dx}\{x(x+2)\}+\frac{d}{dx}\{x(x+1)\}$$

$$=(x+2)\frac{d}{dx}(x+1)+(x+1)\frac{d}{dx}(x+2)+(x+2)\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}(x+2)+(x+1)\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}(x+1)$$

= (x+2) + (x+1) + (x + 2) + x+(x+1) + x

= 6x+6 = 6(x+1)

উদাহরণ 5.5.2 : (x+4)y = x হলে (x+1) এ $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : প্রদত্ত (x+4) y = x

$$\therefore y=\frac{x}{x+4}\ \ \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(x+4)\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(x+4)}{(x+4)^2}$$

$$=\frac{x+4-x}{(x+4)^2}=\frac{4}{(x+4)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{4}{(x+4)^2}\right]=4\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(x+4)^2}\right]$$

$$=4\times(-2)\cdot\frac{1}{(x+4)^3}=-\frac{8}{(x+4)^3}$$

যখন $x=1,\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{8}{(1+4)^3}=-\frac{8}{5^3}=-\frac{8}{125}$

উদাহরণ 5.5.3 : যদি $y=AK^{\alpha}$, K-র একটি অপেক্ষক হয় (K>0), যেখানে A ও α হলো ধ্রুবক, সেখানে y'' কত হবে?

$y = AK^{\alpha} \rightarrow y'=A\alpha K^{\alpha-1}$

$y'' = A\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}$

উচ্চতর অবকলন (Higher Order Differentiation)

$y'' = f''(x)$ এর অবকলনকে বলা হয় তৃতীয় ক্রমের অবকলন এবং লেখা হয় $y''' = f'''(x)$ এই অনুসারে। এভাবে চতুর্থ ক্রমের অবকলনকে লেখা হবে $y^{(4)} = f^{(4)}x$, এবং n ক্রমের অবকলনকে লেখা হবে $y^{(n)} = f^{(n)}x$।

উদাহরণ 5.5.4 : $f(x) = 3x^{-1}+6x^3-x^2$ $(x \neq 0)$ এর চতুর্থ ক্রম পর্যন্ত সবকটি অবকলন নির্ণয় করো।

সমাধান : $f'(x) = -3x^{-2}+18x^2-2x$

$f''(x) = 6x^{-3} + 36x - 2$

$f'''(x) = -18x^{-4} + 36$

$f^{(4)}(x) = 72x^{-5}$

উদাহরণ 5.5.5 : $f(x) = 3x^{11/3}$ কে চতুর্থ ক্রম পর্যন্ত অবকলন করো।

সমাধান : $f'(x) = 11x^{8/3}$

$$f''(x) = \frac{88}{3}x^{5/3}$$

$$f'''(x) = \frac{440}{9}x^{2/3}$$

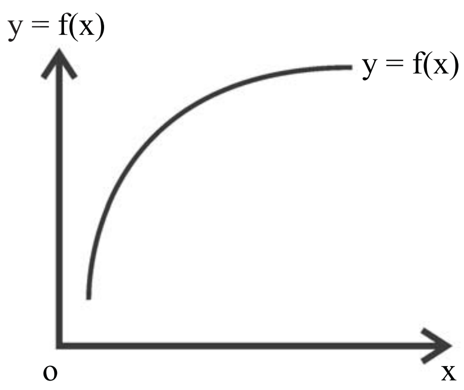
$$f^{(4)}(x) = \frac{880}{27}x^{-\frac{1}{3}}$$

কিন্তু লক্ষণীয় যে $f'(0) = f''(0)= f'''(0)$, কিন্তু $f^{(4)}(0)$-র অস্তিত্ব নেই। সুতরাং f সর্বত্র তৃতীয় ক্রম পর্যন্ত অবকলনযোগ্য কিন্তু '0' তে এর চতর্থ ক্রমের অবকলনের অস্তিত্ব নেই।

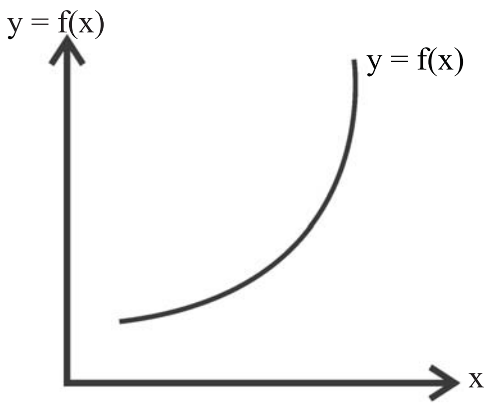
প্রয়োগ : প্রথম ক্রমের অবকলন অপেক্ষকের ঢাল এবং তার মান নির্দেশ করে সেই ঢালের চলন। যেমন যদি $f'(0) > 0$ হয় তবে অপেক্ষকটি ক্রমাগত বাড়তে থাকবে (monotonically increasing) এবং $f'(x) < 0$ যদি সকল x এর জন্য হয় তবে অপেক্ষকটি ক্রমাগত কমতে থাকবে (monotonically decreasing)।

এখন গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্ন হোলো, x এর পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে f(x) এর পরিবর্তনের প্রকৃতি নির্ধারণ করা। অর্থাৎ যদি f(x) উর্দ্ধমুখী হয় তাহলে তা কি বাড়ছে ক্রমবর্ধমান হারে (increasing at an increasing rate) না কি বাড়ছে ক্রমহ্রাসমান হারে (increasing at a decreasing rate) এই ক্ষেত্রে দ্বিতীয় ক্রমের অবকলনের গুরুত্ব অনেক।

কোনো রেখার বক্রতা (curvature) মাপা হয় তার ঢাল বা $f'(x)$ এর পরিবর্তনের হারের মাধ্যমে। যদি এই ঢালের পরিবর্তনের হার ধনাত্মক হয় বা $f''(x) > 0$ তখন বলা হয় বক্ররেখাটি উত্তল (convex)। এই উত্তল রেখার ক্ষেত্রে f(x) কমে বা বাড়ে ক্রমবর্ধমান হারে। আবার যদি $f''(x) < 0$ হয় তখন বক্ররেখাটি কমে বা বাড়ে ক্রমহ্রাসমান হারে। এই ধরনের বক্ররেখাকে বলে অবতল রেখা। যদি বক্ররেখাটি কমে বা বাড়ে ধ্রুবক হারে তখন $f''(x) = 0$ হয় ও বক্ররেখাটি সরলরেখা হয়। নিম্নলিখিত চিত্রে উত্তল ও অবতল রেখা দেখানো হলো।



চিত্র 5.5.1



চিত্র 5.5.2

একটি ছকে y = f(x) অপেক্ষকটি $f'(x)$ ও $f''(x)$ এর মানের উপর নির্ভর করে প্রকৃতি নির্ধারণ পরিবেশিত হলো।

যদি (If)	x=a থেকে বক্ররেখাটি বাড়ে (As x increases through a, the curve at x=a	বক্ররেখার স্পর্শক (the tangent to the curve)
$f'(a) > 0$ $f''(a) > 0$	উর্ধ্বমুখী এবং বাড়ে উত্তল	রেখাটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে ঘোরে (turns anti-clockwise)
$f'(a) > 0$ $f''(a) = 0$	উর্ধ্বমুখী বর্ধমান সরল রেখা	রেখাটি ঘোরে না

$f'(a) > 0$ $f''(a) < 0$	উর্ধ্বমুখী বর্ধমান অবতল	ঘড়ির কাঁটার অভিমুখে ঘোরে
$f'(a) < 0$ $f''(a) > 0$	নিম্নাভিমুখী উত্তল	ঘড়ির কাঁটার বিপরীত মুখী
$f'(a) < 0$ $f''(a) = 0$	নিম্নাভিমুখী সরলরেখা	রেখাটি ঘোরে না।
$f'(a) > 0$ $f''(a) < 0$	নিম্নাভিমুখী অবতল	ঘড়ির কাঁটার অভিমুখে ঘোরে

উদাহরণ 5.5.6 : $y = 5x^2+6$ অপেক্ষকটির বক্রতা নির্ণয় করো।

সমাধান : $f'(x) = 10x,\ f''(x) = 10 > 0$

সুতরাং বক্ররেখাটি উত্তল হবে।

উদাহরণ 5.5.7 : কোনো একটি চাহিদা অপেক্ষক হোলো $p = aq^6(a, b > 0)$ এর প্রান্তিক আয়ের গঠন কেমন হবে?

সমাধান : $R = pq = aq^{b+1}$ অতএব $MR = \frac{dR}{dq} = a(b+1)x^6 > 0$ যখন $q > 0$

যেহেতু $MR > 0$ সুতরাং MR রেখা উর্ধ্বমুখী।

এখন $\frac{d^2R}{dq^2} = ab\,(b+1)\,q^{b-1} > 0\ (\because a, b, q > 0)$

সুতরাং MR রেখা উত্তল।

5.6 সারাংশ

এই এককে অবকলনকে কাজে লাগিয়ে কিভাবে অর্থনীতির চলরাশির মধ্যে সম্পর্ক নির্ধারণ করা যায় তাও পরিবেশিত হয়েছে। পরিশেষে, উচ্চতর অবকলনের মাধ্যমে কোনো অপেক্ষকের নতির পরিবর্তন বা তার বক্রতার প্রকৃতি ও পরিবর্তন বা তার বক্রতার প্রকৃতি ও পরিবর্তন সম্পর্কে ধারণা দেবে তা ব্যাখ্যা করা হয়েছে চিত্রের মাধ্যমে।

5.7 অনুশীলনী

1. যদি $f(x) = 2+5x$ যখন $-\frac{2}{5} < x \leq 0$

$= 2 - 5x$ যখন $0 < x < \frac{2}{5}$ হয়

তাহলে অন্তরকলজের প্রথম নীতির মাধ্যমে বিচার করো যে $x = 0$ বিন্দুতে $f'(x)$ এর অস্তিত্ব থাকবে কিনা।

2. $y = (4x^2-3)(2x^5)$ এর অন্তরকলজ গুণের নিয়মে নির্ণয় করুন।

3. কোনো ফার্মের মোট বিক্রয়লব্ধ অপেক্ষক হোলো : $R=100Q - Q^2$ এক্ষেত্রে তার প্রান্তিক আয় নির্ণয় করো ও উৎপাদন বাড়ার সঙ্গে সঙ্গে প্রান্তিক আয়ের পরিবর্তন দেখান।

5.8 গ্রন্থপঞ্জি

1. Allen, R.G.D. (1938) : Mathematical Analysis for Economists, MacMillan
2. Hoy, M.J., Lwirnois, C. McKenna, R. Rees, and T. Stenjos (2011) : Mathematics for Economics, Third Edition, The MIT Press.
3. Mehta, B.C. and G.M.K. Madnani (1997) : Mathematics for Economists, Sultan Chand and Sons
4. Bhukta, Anindya and Seikh Salim (2013): Mathematics for Undergraduate Economics, Progressive Publishers.
5. Zameeruddin, Qazi and V.K. Khanna (1983) : Mathematics in Commerce and Economics, Vikas Publishing House Pvt. Ltd.
6. Sarkhel, J. and A. Bhukta (2000) : An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Ltd.
7. Chiang, Alpha C. (1967) : Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw-Hill Book Company.
8. Henry, S.G.B. (1969) : Elementary Mathematical Economics, Routledge and Kegan Paul.
9. Takayama, A. (1974): Mathematical Economics, Dryden Preess.
10. Yamane, T. (1968) : Mathematics for Economists, Prentice Hall.

একক 6 ❐ এক চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষকের কাম্যকরণ

গঠন

6.1 উদ্দেশ্য

6.2 প্রস্তাবনা

6.3 কিছু মৌলিক সংজ্ঞা

6.4 চূড়ান্ত বা প্রান্তবিন্দু নির্ধারণের প্রথম পর্যায়ের অবকলন

6.5 সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ধারণ

6.6 স্থানীয় সর্বোচ্চ এবং স্থানীয় সর্বনিম্ন মানসমূহ

6.7 উত্তল ও অবতল অপেক্ষক এবং বাঁক বদলের বিন্দু

6.7.1 উত্তল এবং অবতল অপেক্ষকের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

6.8 সর্বাধিক ও সর্বনিম্নকরণের জন্য প্রয়োজনীয় শর্তাবলি

6.9 সারাংশ

6.10 অনুশীলনী

6.11 গ্রন্থপঞ্জি

6.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন

- কোনো অপেক্ষকের চূড়ান্ত বিন্দু নির্ধারণে অবকলনের ভূমিকা
- কোনো অপেক্ষকের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ধারণের পদ্ধতি
- স্থানীয় সর্বোচ্চ ও স্থানীয় সর্বনিম্নর ধারণা
- উত্তল ও অবতল অপেক্ষক এবং বাঁক বদলের বিন্দু।

6.2 প্রস্তাবনা

গণিত এবং অর্থনীতির ক্ষেত্রে চলরাশি কোন বিন্দুতে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান গ্রহণ করবে তা নির্ধারণ করা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। গণিতের বিভিন্ন পদ্ধতির অনুসরণে, অর্থনৈতিক চলরাশিগুলির তার অপেক্ষকের ধরণ ও প্রকৃতির সাপেক্ষে চরমাবস্থা নির্ধারণ করার থেকে বিভিন্ন অর্থনৈতিক ও গাণিতিক মডেলেরও সৃষ্টি করা হয়েছে। যেমন বিভিন্ন উৎপাদনের

সাহায্যে বা তাদের কোন সমস্বরে কোনো নির্দিষ্ট উৎপাদন প্রস্তুত করলে, মুনাফা সর্বোচ্চ হবে বা দুটি দ্রব্য কি সমস্বরে ক্রয় করলে কোনো ভোক্তার মান তৃপ্তি সর্বোচ্চ হবে। অর্থাৎ চলরাশিগুলির এই চরম মানে পৌঁছনোর শর্ত নিয়ে এই এককে আলোচনা করা হয়েছে।

এই অধ্যায়ে চরম মান বলতে কি বোঝায় তার সম্পর্কে গাণিতিক এবং চিত্রসহ বর্ণনা করা হয়েছে এই চরম বিন্দুতে অর্থাৎ কোনো রাশির সংকট মানে, তার অপেক্ষকটির চরমাবস্থা (Extreme Point) সর্বোচ্চ না সর্বনিম্ন তা কী করে বোঝা যাবে তার জন্য আবশ্যিক এবং যথেষ্ট শর্ত ব্যাখ্যা করা হয়েছে। এই চরম বিন্দুটি স্থানীয় না সার্বিক (Local and Global Extreme Point) গরিষ্ঠ মান এবং সেটা কীভাবে নির্ধারণ করা যাবে তা দেখানো হয়েছে।

6.3 কিছু মৌলিক সংজ্ঞা

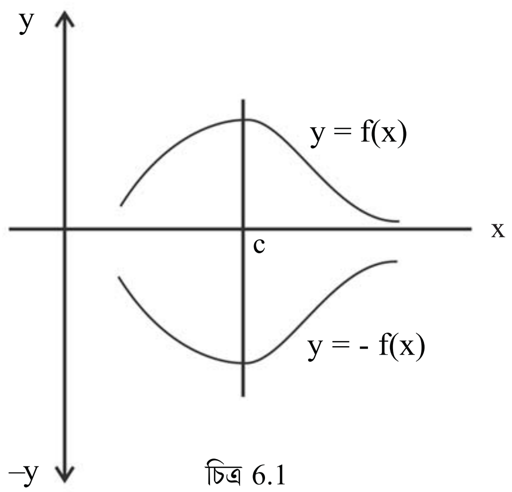
যদি f(x) এর পরিসর D হয় তাহলে

$C\in D$ সর্বোচ্চ বিন্দু হবে f এর জন্য $\Leftrightarrow f(x) \leq f(c)$, সকল $x\in D$ এর জন্য ...(1)

$d\in D$ সর্বনিম্ন বিন্দু হবে f এর জন্য $\Leftrightarrow f(x) \geq f(d)$, সকল $x\in D$ এর জন্য ...(2)

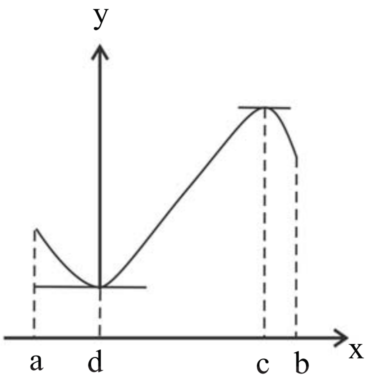
(1) এ f(c) হলো সর্বোচ্চ মান ও (2) এ f(d) হলো সর্বনিম্ন মান। যদি c বিন্দুতে f এর মান, D এর অপর বিন্দুগুলি অপেক্ষা বড় হয় (strictly larger), তাহলে c কে বলা হবে কঠোর সর্বোচ্চ বিন্দু (strict maximum point)। অনুরূপভাবে d হবে কঠোর সর্বনিম্ন বিন্দু (strict minimum point) যদি $f(x)>f(d)$ হয়. সকল $x\in D$, $x\neq d$ এর জন্য। এগুলিকে একক করে বলা হয় চরম বিন্দু বা পরম বিন্দু বা চরম মান (optional points and values or extreme points and values)।

যদি D পরিসরে f কোনো অপেক্ষক হয় তাহলে D পরিসরে –f কে সংজ্ঞাত করা যাবে এভাবে যে $(-f)(x) = -f(x)$। লক্ষণীয় যে $f(x) \leq f(c)$ হবে সকল $x\in D$ এর জন্য, যদি এবং কেবলমাত্র $-f(x) \geq f(c)$ হয় সকল $x\in D$ এর জন্য। অর্তাৎ c, D পরিসরে f অপেক্ষককে সর্বোচ্চ করে যদি এবং কেবলমাত্র c, D পরিসরে –f কে সর্বনিম্ন করে। চিত্র 6.1 এ এই তথ্যের পরিবেশনা করা হলো—

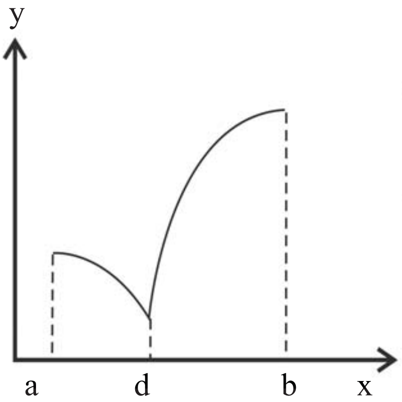


চিত্র 6.1

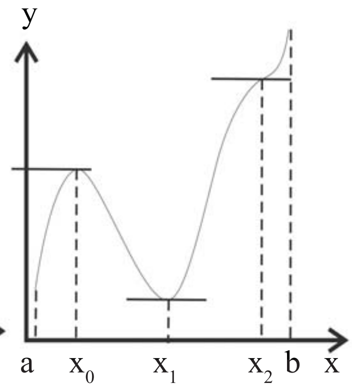
f অপেক্ষকের নিশ্চল বিন্দু (stationary point) x_0 হবে যদি $f'(x_0) = 0$ হয়। জ্যামিতিক ভাবে, কোনো অপেক্ষকের লেখচিত্রর স্পর্শক x অক্ষের যখন সমান্তরাল হয় তখন সেই বিন্দুই হয় নিশ্চল বিন্দু।



চিত্র : 6.2



চিত্র : 6.3



চিত্র : 6.4

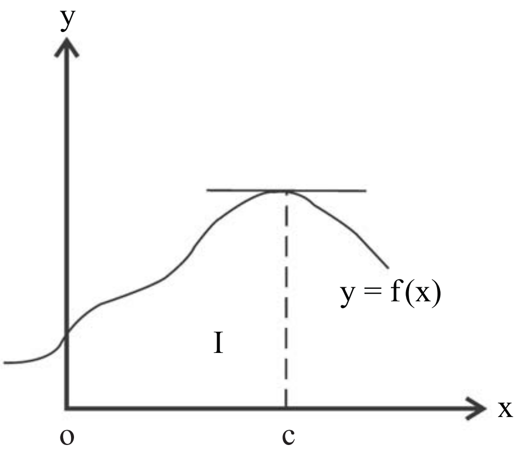
চিত্র 6.2-এ লেখচিত্রটির দুটি নিশ্চল বিন্দু, c ও d যেখানে c বিন্দুটি সর্বোচ্চ ও d বিন্দুটি সর্বনিম্ন বিন্দু নির্দেশ করে।

চিত্র 6.3-এর লেখচিত্রটির কোনো নিশ্চল বিন্দু নেই। কিন্তু লেখচিত্রটির প্রান্তভাগ b তে সর্বোচ্চ বিন্দু ও d তে সর্বনিম্ন বিন্দু হবে। d বিন্দুতে অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য নয় আবার b বিন্দুতে অবকলন 0 নয়।

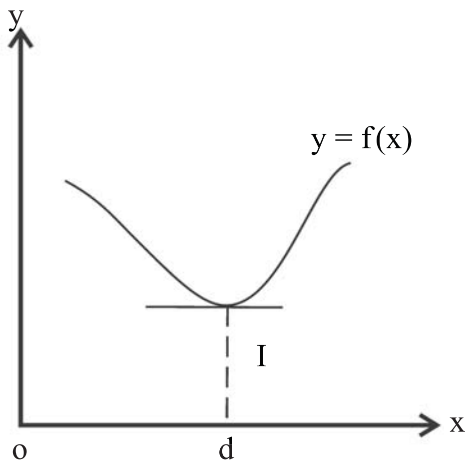
চিত্র 6.4-এ অপেক্ষকটির x_0, x_1, x_2 তিনিটি নিশ্চল বিন্দু দেখা যায়। অপেক্ষকটি গোড়ার দিকের প্রান্তভাগ ‘a’ তে সর্বনিম্ন বিন্দু, কিন্তু অপেক্ষকটির সর্বোচ্চ বিন্দু পাওয়া যায় না কারণ যত x b এর দিকে সীমায়িত হবে তত অপেক্ষকের মান ‘∞’-র দিকে যাবে। কিন্তু যেহেতু x_0 বিন্দুতে অপেক্ষকটি তার নিকটবর্তী, প্রতিরোধ বিন্দুগুলি অপেক্ষা সর্বোচ্চ বিন্দু হতে দেখা যাচ্ছে তাই একে বলা হয় লক্ষণীয় সর্বোচ্চ বিন্দু। সেইভাবে x_1 এ অপেক্ষকটি স্থানীয় সর্বনিম্ন মান হবে। কিন্তু x_2 আবার এমন একটি নিশ্চল বিন্দু যা স্থানীয় সর্বোচ্চ বা স্থানীয় সর্বনিম্ন কোনোটাই নয়। এই x_2 কে বলা হয় বাঁক বদলের বিন্দু (inflection point)।

6.4 চূড়ান্ত বা প্রান্তবিন্দু নির্ধারণের প্রথম পর্যায়ের অবকলন

প্রথম পর্যায়ের অবকলনের চিহ্নের উপর ভিত্তি করে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা যায়। ধরা যাক I অন্তরালে f(x) অবকলনযোগ্য এবং f(x) এর কেবলমাত্র একটি নিশ্চল বিন্দু আছে x=c তে। যদি সকল $x \in I$ এর জন্য $f'(x) \geq 0$ হয়, যাতে $x \leq c$ হয়, এবং $f'(x) \leq 0$ হয় সকল $x \in I$ এর জন্য এমনভাবে যাতে $x \geq c$ হয় তাহলে f(x), c এর বাঁ পাশে বাড়তে থাকবে ও c এর ডানপাশে কমতে থাকবে।



চিত্র : 6.5

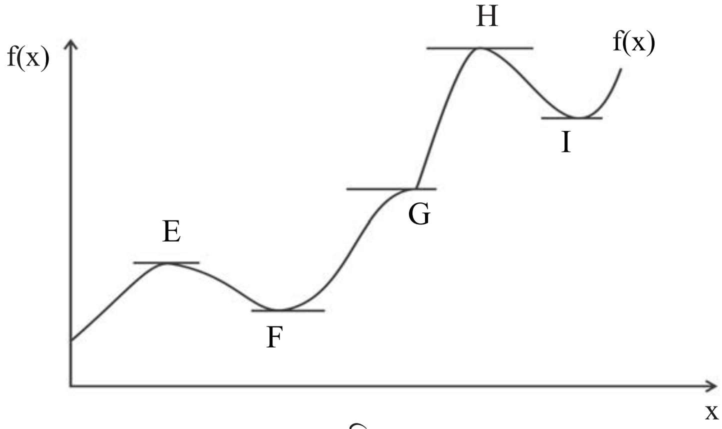


চিত্র : 6.6

অর্থাৎ $f(x) \leq f(c)$ হবে সকল $x \leq c$ এর জন্য ও $f(c) \geq f(x)$ হবে সকল $x \geq c$ এর জন্য। অর্থাৎ $x=c$ হলে I অন্তরালে f এর সর্বোচ্চ বিন্দু। এটি চিত্র 6.5 এ দেখানো হলো। একইভাবে d বিন্দুতে f এর সর্বনিম্ন মান প্রদর্শিত হলো চিত্র 6.6 এ।

6.5 সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ধারণ

পূর্বোক্ত আলোচনায় এটা স্পষ্ট হয়েছে যে, এমন বিন্দুতে f(x) অপেক্ষকের স্থানীয় সর্বোচ্চ (স্থানীয় সর্বনিম্ন) মান নির্ধারিত হয় যেখানে ওই বিন্দুর একদম নিকটস্থ সকল মানের তুলনায় f(x) এর মান বেশি (কম) হয়। অপেক্ষকের স্থানীয় চরম মান (local extreme values) বলতে বোঝায় এই স্থানীয় সর্বোচ্চ ও স্থানীয় সর্বনিম্ন মানসমূহকে এক সাথে বলা। এই বিশ্লেষণের ক্ষেত্রে অনুমান করা হয় যে, এই অপেক্ষক ও তার অন্তরকলজ সকল বিন্দুতে সসীম (finite) এবং সন্তত (continuous) থাকে। ফলে এর সঙ্গে সম্পর্কিত রেখাটিও মসৃণ (smooth) আকার নেয়, অর্থাৎ এই রেখায় কোনো তীক্ষ্ণধার বিন্দু থাকে না এবং রেখায় কোনো বিচ্ছিন্নতা থাকে না।



চিত্র : 6.7

এখানে একটি বিষয় স্মরণে রাখা আবশ্যক যে, কোনো অপেক্ষকের স্থানীয় সর্বোচ্চ মানটিই যে অপেক্ষকের সর্বাপেক্ষা বৃহৎ (greatest) মান হবে তার কোনো নিশ্চয়তা নেই। অর্থাৎ স্থানীয়ভাবে নিকটস্থ অন্যান্য মান এর তুলনায় অপেক্ষকের একটি মান সর্বোচ্চ হতে পারে কিন্তু দূরবর্তী কোনো বিন্দুতে এই মান আরও বেশি হতে পারে (চিত্র 6.7)। চিত্র 6.7 এ দেখা যাচ্ছে যে, E বিন্দুটি অপেক্ষকের একটি স্থানীয় গরিষ্ঠ মান নির্দেশ করলেও H বিন্দুটি অপেক্ষকের অপর একটি স্থানীয় গরিষ্ঠ মান নির্দেশ করে।

অনুরূপভাবে, কোনো অপেক্ষকের স্থানীয় লঘিষ্ঠ মান যে অপেক্ষকটির সর্বনিম্ন মান নির্দেশ করবেই তার অর্থ নেই। এটি কেবল ওই বিন্দুর নিকটবর্তী অন্যান্য বিন্দুতে অপেক্ষকের মানের তুলনায় স্বল্প মানকেই নির্দেশ করে। যেমন চিত্র 6.7 এ F ও J উভয় বিন্দুতেই অপেক্ষকটির স্থানীয় লঘিষ্ঠ মান নির্দেশ করা হয়েছে। এখানে G বিন্দুটি অপেক্ষকটির বাঁদিক বদলের বিন্দু।

সুতরাং একটি অপেক্ষক $F : D \rightarrow R$ এর মান সার্বিক গরিষ্ঠ বা Global maximum (সার্বিক লঘিষ্ঠ, Global Minimum) হয় একটি বিন্দুতে $c \in D$, যদি D এর মধ্যে সকল x এর জন্য $f(x) \leq f(c)$ $[f(x) \geq f(c)]$ হয়।

6.6 স্থানীয় সর্বোচ্চ এবং স্থানীয় সর্বনিম্ন মানসমূহ

পূর্ববর্তী আলোচনার ভিত্তিতে স্থানীয় সর্বোচ্চ এবং স্থানীয় সর্বনিম্ন মানসমূহের নির্দেশ করতে পারি।

(a) একটি মানযুক্ত অপেক্ষকের সকল সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানই নিশ্চল মান। যদি $f'(x)$ এর অস্তিত্ব থাকে তবে এই মান পাওয়া যায় যখন $f'(x) = 0$ হয়।

(b) (i) যখন x এর মান ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকে এবং x=a হলে $f'(a) = 0$ হয় এবং $f'(x)$ এর মান ধনাত্মক থেকে ঋণাত্মক হয়ে পড়ে, তখন $f(x)$ অপেক্ষকের $f(a)$ মানকে সর্বোচ্চ মান বলা হয়।

(ii) যখন x এর মান ক্রমশঃ বৃদ্ধি পেতে থাকে এবং x=a হলে $f'(a) = 0$ হয় এবং $f'(x)$ এর মান ঞ্ণাত্মক থেকে ধনাত্মক হয়ে পড়ে, তখন $f(x)$ অপেক্ষকের $f(a)$ মানকে সর্বনিম্ন মান বলা হয়।

(iii) উপরিউক্ত অবস্থার প্রেক্ষিতে যখন $f'(x)$ এর চিহ্ন কোনো পরিবর্তন না হয় তখন $f(a)$ মানকে সর্বোচ্চ আমরা সর্বনিম্ন মান বলা যায় না। তখন x=a বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকের আরূঢ় বিন্দু (saddle point) নির্ধারিত হয়।

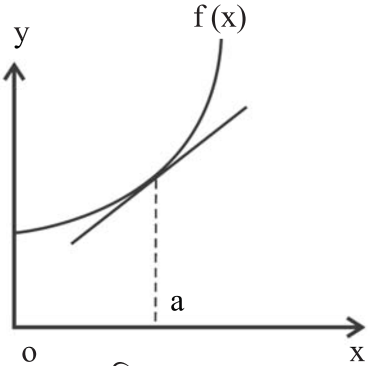
এখানে দুটি শর্ত উল্লেখ করা যায় :

উপরে উল্লিখিত (a) নির্ণায়কটি কোনো চরম মান (extreme value) নির্ধারণের প্রয়োজনীয় শর্ত (necessary condition) নির্দেশ করে। অন্যদিকে (b) নির্ণায়কটি যথেষ্ট শর্ত (sufficient condition) নির্দেশ করে যার সাহায্যে স্থানীয় গরিষ্ঠ, (স্থানীয়) লঘিষ্ঠ এবং অন্যান্য নিশ্চল মানের মধ্যে পার্থক্য করতে পারি।

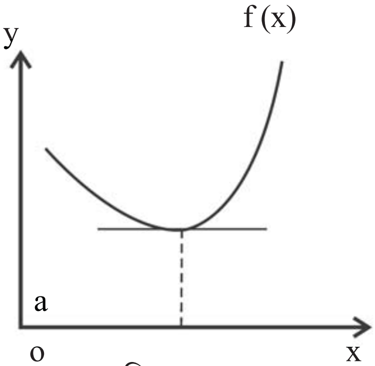
দ্বিতীয় অন্তরকলজের প্রয়োগ : (Application of Second Order Derivative) :

$f'(x)$ এর বৃদ্ধি বা হ্রাসের মাত্রা দ্বিতীয় অন্তরকলজের বা $f''(x)$ এর সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

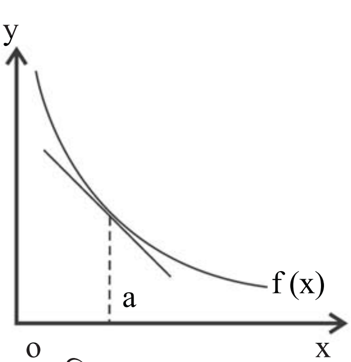
এখানে $f''(x) = \frac{d[f'(x)]}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d^2y}{dx^2}$ এটি $y = f(x)$ রেখার কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতির বৃদ্ধি বা হ্রাসের মাত্রা নির্দেশ করে।



চিত্র : 6.8



চিত্র : 6.9

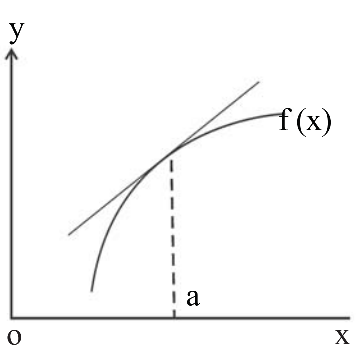


চিত্র : 6.10

যদি x=a এবং $f''(a) > 0$ হয়, তবে তার অর্থ হোলো x এর মান a-র মধ্য দিয়ে যখন ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকে যেমন f(x) এর ক্রমবর্ধমান হারে পরিবর্তন ঘটে, এবং যখন y=f(x) রেখার ওপর a ভুজ সম্পন্ন বিন্দুর মধ্য দিয়ে অগ্রসর হওয়া যায় তখন ওই রেখার বিভিন্ন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের নতি ক্রমশ বৃদ্ধি পায়।

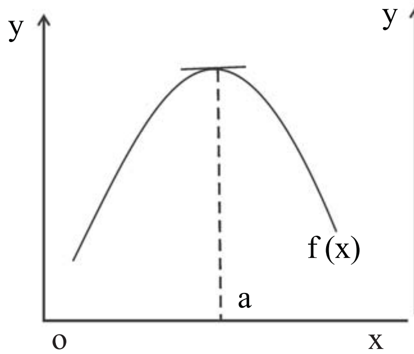
অনুরূপভাবে, যদি x = a এবং $f''(a) < 0$ হয়, তবে তার অর্থ হোলো x এর মান a-র মধ্য দিয়ে যখন ক্রমশ বৃদ্ধি পায়, তখন f(x) এর ক্রমহ্রাসমান হারে পরিবর্তন ঘটে। অর্থাৎ $f''(a)$ এর গাণিতিক মান নির্দেশ করে কত দ্রুত f(x) এর মান x = a এর অবস্থায় পরিবর্তিত হয়। এটি x = a অবস্থায় y=f(x) রেখার বক্রতার অবস্থাও নির্দেশ করে।

এখন $f''(a) > 0$ হওয়ার অর্থ হোলো x এর মান যখন a-র মধ্য দিয়ে বৃদ্ধি পেতে থাকে তখন f(x) অপেক্ষকের মান ক্রমবর্ধমান হারে পরিবর্তিত হয় এবং y=f(x) রেখাটি x=a তে নীচের দিক থেকে উত্তল (Convex from below) হয় (চিত্র 6.8—চিত্র 6.10)



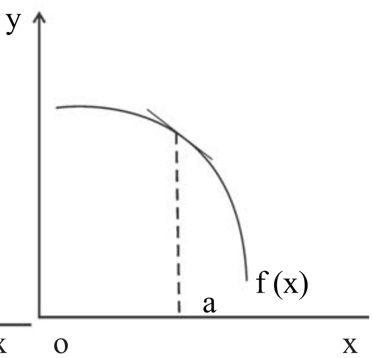
$f'(a) > 0, \; f''(a) < 0$

চিত্র : 6.11



$f'(a) = 0, \; f''(a) < 0$

চিত্র : 6.12



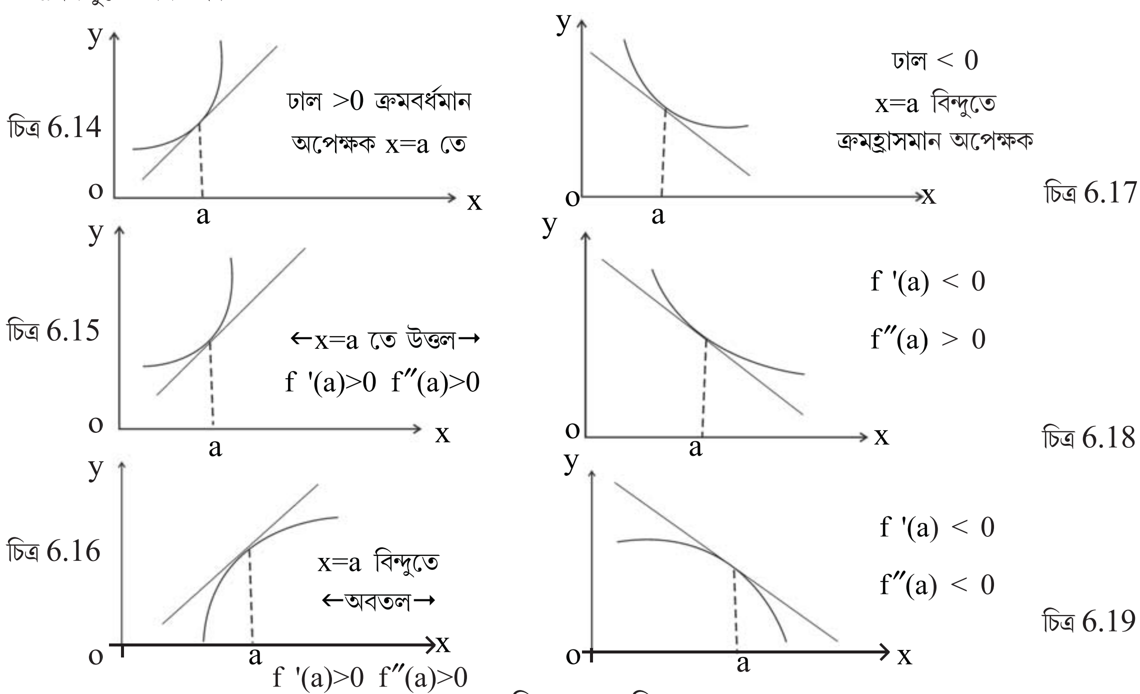
$f'(a) > 0, \; f''(a) < 0$

চিত্র : 6.13

আবার যদি $f(a)<0$ হয়, তবে তার অর্থ হোলো x এর মান যখন a-র মধ্য দিয়ে ক্রমশ বৃদ্ধি পেতে থাকে তখন $f''(x)$ অপেক্ষকের মান ক্রমহ্রাসমান গতিতে পরিবর্তিত হয়। এখানে x=a বিন্দুতে y = f(x) রেখাটি নীচ থেকে অবতল হয় (চিত্র 6.11—চিত্র 6.13)

6.7 উত্তল ও অবতল অপেক্ষক এবং বাঁক বদলের বিন্দু

কোনো একটি অপেক্ষক f(x), x = a তে উত্তল হবে, যদি [a, f(a)] খুব নিকটবর্তী কোনো অঞ্চলে, অপেক্ষকটির লেখচিত্র সম্পূর্ণভাবে, লেখচিত্রটির স্পর্শকের নীচে অবস্থান করে। পূর্বে উল্লিখিত আছে যে x=a তে দ্বিতীয় অন্তরকলজ ধনাত্মক হলে, ঐ বিন্দুতে অপেক্ষকটি উত্তল হবে। আবার x=a বিন্দুতে যদি দ্বিতীয় অন্তরকলজ ঋণাত্মক হয় তখন a বিন্দুতে অপেক্ষকটি অবতল হবে। অর্থাৎ $f''(a) > 0$ হলে f(x); x=a বিন্দুতে উত্তল ও $f''(a)<0$ হলে f(x); x=a বিন্দুতে অবতল।



চিত্র 6.14—চিত্র 6.19

যদি $f''(a) > 0$ একটি নির্দিষ্ট পরিসরে সকল x এর জন্য তখন তা কঠোরভাবে উত্তল (strictly Concave) আবার যদি $f''(x) < 0$ হয় একটি নির্দিষ্ট পরিসরে সকল x এর জন্য তখন তা কঠোরভাবে অবতল হয় (strictly Concave) (চিত্র 6.14—চিত্র 6.19)

এতদূর আলোচনার সারমর্ম হলো এই যে—

যখন কোনো একটি অবকলনযোগ্য অপেক্ষকের আপাত সর্বোচ্চ বা আপাত সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা হয় তখন দুটি বিষয় খেয়াল রাখা প্রয়োজন।

1. প্রথম পর্যায়ের অবকলনকে শূন্যর সঙ্গে সমান করে নিশ্চল মান নির্ণয় করা হয়। এই মান বা মানগুলিতে অপেক্ষকটি বাড়ে না এবং কমে না। এই x এর মানগুলি তখন সর্বোচ্চ না আপাত সর্বনিম্ন তা বিচারের জন্য দেখা হবে দ্বিতীয় পর্যায়ে।

2. নিশ্চল বিন্দুটিতে দ্বিতীয় অন্তরকলজের চিহ্নানুসারে তিনটি সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়। যদি নিশ্চল বা চরম বিন্দু a তে

i) $f''(a) < 0$; অপেক্ষকটি a তে অবতল এবং আপাত সর্বোচ্চ হয়

ii) $f''(a) > 0$; অপেক্ষকটি a তে উত্তল এবং আপাত সর্বনিম্ন

iii) $f''(a) = 0$; পরীক্ষাটি সিদ্ধান্তবিহীন (inconclusive)

এমন যদি অপেক্ষকটি কঠোরভাবে অবতল বা উত্তল হয়, তাহলে তার যথাক্রমে একটিমাত্র সর্বোচ্চ বিন্দু বা একটি মাত্র সর্বনিম্ন বিন্দু থাকবে যাকে যথাক্রমে সার্বিক গরিষ্ঠ বা সার্বিক লঘিষ্ঠ বলা হয়।

বাঁক বদলের বিন্দু : বাঁক বদলের বিন্দু (inflection point) বলতে সেই বিন্দুকে বোঝায় যেখানে অপেক্ষকটি তার স্পর্শককে ছেদ করে বা কর্তন করে এবং অপেক্ষকটি তার বক্রতা পরিবর্তন করে হয় উত্তল থেকে অবতল বা উল্টো রকম ভাবে। এক্ষেত্রে প্রথম অন্তরকলজের চিহ্নর গুরুত্ব থাকে না। ‘a’ যদি বাঁক বদলের বিন্দু হয় তাহলে তিনটি শর্ত আবর্শক :

1. $f''(a) = 0$ বা অসংজ্ঞাত

2. x=a তে বক্রতার পরিবর্তন

3. x=a তে লেখচিত্রটি স্পর্শককে অতিক্রম করে।

অর্থাৎ একটি দুইবার অবকলনযোগ্য অপেক্ষক f এর (a, b) সীমার মধ্যে ‘c’ একটি বাঁক বদলের বিন্দু হবে যদি নিম্নলিখিত দুই অবস্থার কোনো একটি সত্যি হয়।

a) $f''(x) \geq 0$ যদি $a < x < c$ ও $f''(x) \leq 0$ যদি $c < x < b$

অথবা

b) $f''(x) \leq 0$ যদি $a < x < c$ ও $f''(x) \geq 0$ যদি $c < x < b$

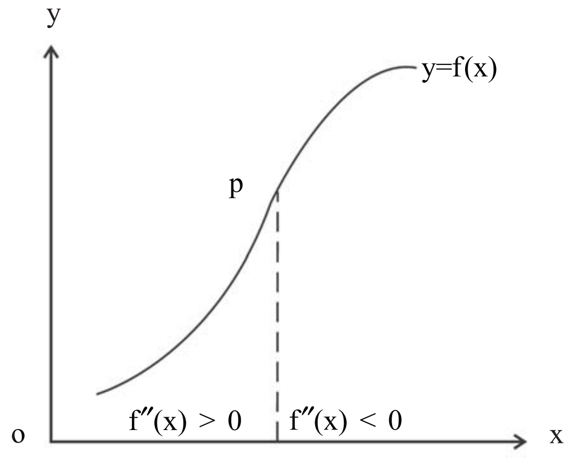
সুতরাং x=c তে বাঁক বদল হবে যদি c তে $f''(x)$ চিহ্ন পরিবর্তন করে। সেক্ষেত্রে লেখচিত্রটির বাঁকবদলের বিন্দু হবে (c, f(c)), (চিত্র 6.20)।

বাঁক বদলের বিন্দু নির্ণয়ের পরীক্ষা:

ধরা যাক f একটি অপেক্ষক যার I অন্তরালে বিচ্ছিন্ন দ্বিতীয় অন্তরকলজ আছে এবং I-এর ভিতর c একটি বিন্দু।

a) c একটি বাঁক বদলের বিন্দু হবে যদি $f''(c) = 0$ হয়

b) যদি $f''(c) = 0$ এবং f''; c তে তার চিহ্ন পরিবর্তন করে, তাহলে c হবে বাঁক বদলের বিন্দু।

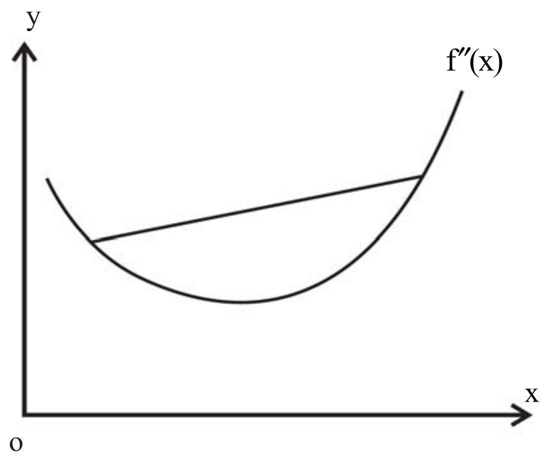


চিত্র 6.20 : P হোলো বাঁক বদল বিন্দু লেখচিত্রর উপর ও অপেক্ষকটির বাঁক বদল বিন্দু x = c

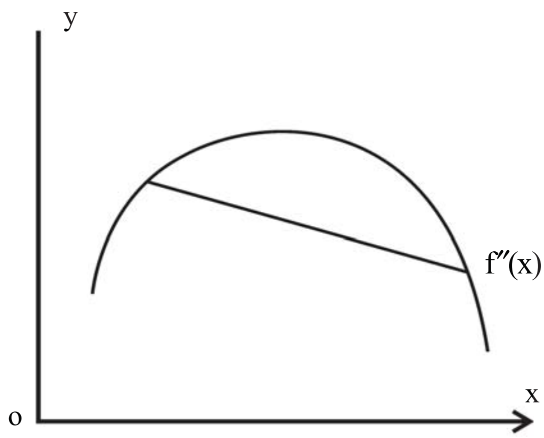
সুতরাং একটি আপাত (relative) চরমমানকে নিশ্চল মান হতেই হবে যেটি হয় সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন, অথবা বাঁক বদলের বিন্দু হবে। যদি $f''(a) = 0$ হয় অর্থাৎ পরীক্ষাটি সিদ্ধান্তবিহীন হয়, তাহলে তার সংলগ্ন সংকট বিন্দুতে (critical value) বা $f''(x) = 0$ তে x এর যে মান এসেছে তাতে যদি প্রথম উচ্চতর শূন্য ব্যতীত অন্তরকলজ (first non-zero value of a higher order derivative) বিজোড় ক্রমের (odd order) হয় তখন অপেক্ষকটির বাঁক বদল বিন্দু থাকবে। কিন্তু যদি প্রথম উচ্চতর শূন্যব্যতীত অন্তরকলজ জোড় একবিশিষ্ট হয় তবে অপেক্ষকটি সেই অন্তরকলজের চিহ্নানুসারে আপাত চরম মান থাকবে।

6.7.1 উত্তল এবং অবতল অপেক্ষকের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা

কোনো একটি অপেক্ষক অবতল (উত্তল) হয় যদি যার লেখচিত্রের উপর যে কোনো দুটি বিন্দু সংযোগকারি সরলরেখা, বক্ররেখাটির সম্পূর্ণ নীচে (উপরে) অবস্থান করে বা কখনও উপরে (নীচে) অবস্থান করে না।

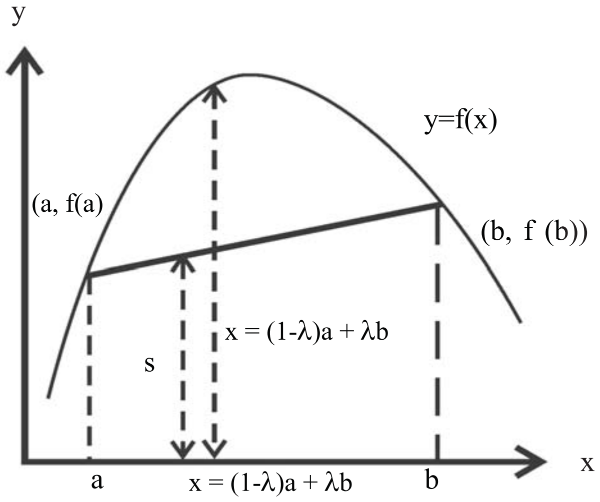


চিত্র 6.21 : f আপেক্ষিক উত্তল



চিত্র 6.22 : f আপেক্ষিক অবতল

উপরোক্ত সংজ্ঞা দুটি চিত্র 6.21-6.22 এ বর্ণিত করা হয়েছে ধরা যাক [a, b] অন্তরালে x একটি বিন্দু যেখানে a<b। একে লেখা যায়:



চিত্র 6.23

$x = (1-\lambda)a + \lambda b$

$= a+\lambda(b-a)$ (কিছু $\lambda \in [0, 1]$-র জন্য।

$$(1-\lambda)a + \lambda b = \left(1 - \frac{x-1}{b-a}\right)a + \frac{x-a}{b-a} \cdot b$$

এখন যদি $b > a$, ও $0 \le \lambda \le$ হয় তাহলে $a \le a + \lambda(b-a) \le b$

আবার যদি $x \in [a, b]$ হয় এবং $\lambda = \frac{x-a}{b-a}$ তাহলে $0 \le \lambda \le 1$ ও

$$= \frac{ba - a^2 - xa + a^2 + xb - ab}{b-a} = x$$

এক্ষেত্রে λ হোলো x থেকে a-র দূরত্ব আর a থেকে b এর দূরত্বের অনুপাত।

$$\therefore \lambda = \frac{x-a}{b-a}$$

চিত্র 6.23-এ s এর মান নির্ণয় করা দেখানো হল। (a, f(c)) ও (b, f(b)) -র সংযোগকারী সরলরেখার সমীকরণ হোলো:

কারণ (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুর সংযোগকারী রেখার ঢাল ও সমীকরণ:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ধরা যাক $x = (1-\lambda) a + \lambda b$ তাহলে $y = s$

$$\text{সুতরাং } s - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\left[(1-\lambda)a + \lambda b - a\right]$$

$$= \lambda\left[f(b) - f(a)\right]$$

অর্থাৎ $s = (1-\lambda) f(a)+\lambda f(b)$। এখন যদি λ; [0, 1] সীমার মধ্যে সব মানগুলি গ্রহণ করে, তাহলে $(1-\lambda)a + \lambda b$ ও [a, b] সীমার মধ্যে সবকটি মান গ্রহণ করবে। সুতরাং (a, f(a)) ও (b, f(b) সংযোগকারী সরলরেখা সর্বদা f এর লেখচিত্রর নীচে বা লেখচিত্রেরই উপর অবস্থান করবে বললে বোঝাবে $s \leq f((1-\lambda)a + \lambda b)$ সকল $\lambda \in [0, 1]$-র জন্য।

অর্থাৎ f যদি অবতল হয় I অন্তরালে যেখানে $a, b \in I$ ও $\lambda \in (0, 1)$ তবে $f((1-\lambda) a+\lambda b) \geq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$ বা সরলরেখাটির উচ্চতা, চাপের উচ্চতা অপেক্ষা কম হবে। যদি f অবতল হবে তাহলে –f উত্তল হবে। f উত্তল হবে I অন্তরালে সকল $a, b \in I$ এবং $\lambda \in (0, 1)$ যদি

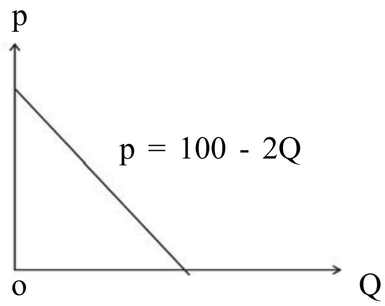
$f((1-\lambda) a+\lambda b) \leq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(b)$ অর্থাৎ সরলরেখার উচ্চতা, চাপের উচ্চতা অপেক্ষা বেশি হবে।

বিবিধ উদাহরণ (Miscellaneous Examples)

1. ধরা যাক একটি চাহিদা অপেক্ষক $P = 100 - 2Q$। এই অপেক্ষকটি কি ক্রমবর্দ্ধমান?

সমাধান: $P = 100 - 2Q$;

চাহিদা অপেক্ষকটি ঋণাত্মক ঢালসম্পন্ন এবং $\frac{d^2P}{dQ^2} = 0$ সুতরাং এই অপেক্ষক একটি নির্দিষ্ট হারে হ্রাস পেয়েছে। (চিত্র 6.24)।



চিত্র 6.24

2. **চাহিদা অপেক্ষক :** $p=\left(\frac{a}{Q+b}\right)-c$ যেখানে a, b, c হোলো ধনাত্মক ধ্রুবক। চাহিদা রেখাটির বক্রতা (curvature) নির্ণয় করো

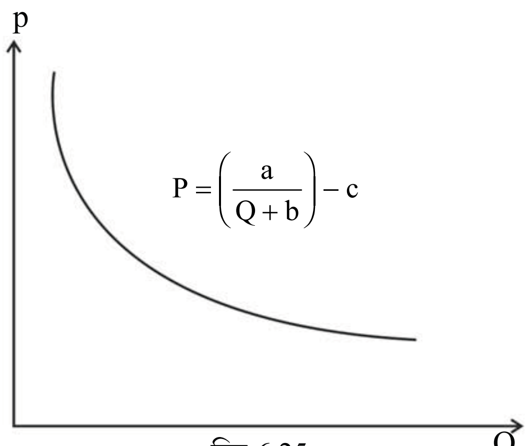
$$P=\left(\frac{a}{Q+b}\right)-c$$

$$\frac{dP}{dQ}=-\frac{a}{(a+b)^2}<0$$

$$\frac{d^2P}{dQ^2}=\frac{2a}{(Q+b)^3}>0 \quad (a, Q, b>0)$$

($\because a>0$ এবং হর > 0)

অর্থাৎ অপেক্ষকটি ক্রমহ্রাসমান।



চিত্র 6.25

সুতরাং অপেক্ষকটি ক্রমবর্ধমান হারে হ্রাস পাচ্ছে। অর্থাৎ চাহিদারেখাটি মূলবিন্দুর দিকে উত্তল হবে। (চিত্র 6.25)।

3. ধরা যাক, ফার্মের মোট ব্যয় (TC) অপেক্ষক হোলো $TC=300Q-10Q^2+\frac{1}{3}Q^3$। কোন উৎপাদন স্তরে AC ও MC সর্বনিম্ন হয় তা নির্ণয় করো।

সমাধান

$$TC=300Q-10Q^2+\frac{1}{3}Q^3$$

$$AC=\frac{TC}{Q}=\frac{300Q-10Q^2+y_3Q^3}{Q}=300-10Q+\frac{1}{3}Q^2$$

AC যেখানে সর্বনিম্ন হবে সেখানে $\frac{dAC}{dQ}=0$ এবং $\frac{d^2AC}{dQ^2}>0$ হবে

$\therefore \frac{dAC}{dQ}=-10+\frac{3}{3}Q=0 \Rightarrow \frac{2}{3}Q=10$

$\Rightarrow 2Q = 30 \quad \Rightarrow Q = 15$

আবার $\frac{d^2AC}{dQ^2}=\frac{2}{3}>0$। অর্থাৎ Q যখন 15 তখন ফার্মের AC সর্বনিম্ন হবে।

AC-র সমীকরণে Q = 15 বসিয়ে সর্বনিম্ন AC -র মান পাওয়া যাবে।

সর্বনিম্ন $AC=300-10Q+\frac{1}{3}Q^2=300-10\times15+\frac{1}{3}\times15\times15$

$= 300 + 75 - 150 = 225$

$MC=\frac{MTC}{dQ}=300-20Q+Q^2$

MC যখন সর্বনিম্ন হবে তখন $\frac{dMC}{dQ}=0$ এবং $\frac{d^2MC}{dQ^2}>0$ হবে।

$\therefore \frac{dMC}{dQ}=-20+2Q=0$

$\Rightarrow Q=10$

$\frac{d^2MC}{dQ^2}=2>0$ অর্থাৎ Q = 10 একক হলে MC সর্বনিম্ন হবে।

MC-র সমীকরণ Q = 10 বসালে সর্বনিম্ন MC-র মান পাওয়া যাবে।

সর্বনিম্ন MC=300 – 20Q+Q = 300 – 20×10 + 10×10 = 300+100–200=200

4. একটি ফার্ম একটি স্থির দামে (P) দ্রব্য বিক্রয় করে যেখানে P = Rs 2। ফার্মটির মোট ব্যয় অপেক্ষক হোলো $TC=1000+\frac{1}{2}\left(\frac{Q}{50}\right)^2$। ফার্মটির মুনাফা ($\pi$) অপেক্ষক নির্ণয় করো এবং যে উৎপাদনস্তরে মুনাফা সর্বোচ্চ হয় তা নির্দেশ করো।

সমাধান : π = TR – TC; TR = PQ = 2Q

$$\pi = TR - TC = 2Q - \left[1000 + \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{50}\right)^2\right]$$

$$= 2Q - 1000 - \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{50}\right)^2$$

যে উৎপাদন স্তরে মুনাফা সর্বোচ্চ হয় সেখানে $\frac{d\pi}{dQ} = 0$ এবং $\frac{d^2\pi}{dQ^2} < 0$ হবে।

এখানে $\frac{d\pi}{dQ} = 2 - \frac{Q}{50} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 100$

আবার $\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -\frac{1}{50} < 0$

সুতরাং Q = 100 হলে ফার্মের মুনাফা সর্বোচ্চ হবে।

5. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির (1) গুরুত্বপূর্ণ বা সংকট মান (Critical Value) নির্ধারণ কর (2) অপেক্ষকগুলির গুরুত্বপূর্ণ মান অপেক্ষকগুলির আপাত চরম অবস্থা অথবা বাঁক বদলের বিন্দু নির্ণয় করো।

a) $y = -(x - 8)^4$ b) $y = (5 - x)^3$ c) $y = -2(x - b)^6$

a) $y = -(x - 8)^4$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -4(x-8)^3$$

$\frac{dy}{dx} = 0$ বসালে x এর সংকট মান বেরোয়।

$y = -4(x-8)^3 = 0$

$\Rightarrow x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$ হোলো সংকট মান।

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = -12(x-8)^2 \; ; \; y''(8) = 0$$

$\therefore$ পরীক্ষাটি থেকে সিদ্ধান্ত নেওয়া যাবে না (The test is inconclusive)।

∴ উচ্চতর অন্তরকলন নির্ণয় করা যাক।

$y''' = -24(x - 8) \Rightarrow y'''(8) = -24(8-8) = 0$

∴ পরীক্ষাটি আবার সিদ্ধান্তবিহীন।

$y^{(4)} = -24 \Rightarrow y^4(8) = 24 < 0$

∴ অপেক্ষকটি অবতল এবং $x = 8$ এই গুরুত্বপূর্ণ বিন্দুতে সর্বোচ্চ হয়।

b) $y = (5 - x)^3$

1) $y' = 3(5 - x)^2 (-1) = -3(5 - x)^2 = 0$

$5 = x$ হোলো গুরুত্বপূর্ণ মান।

2) $y'' = 6(5 - x) \Rightarrow y''(5) = 6(5-5) = 0$ ∴ দ্বিতীয় অন্তরকলজ পরীক্ষা সিদ্ধান্তবিহীন।

$y''' = -6 \Rightarrow y'''(5) = -6 < 0$

অর্থাৎ y একটি বাঁক বদলের বিন্দুতে অবস্থান করছে x=5-এ যা চরম বিন্দু নয়।

c) $y = -2(x-6)^6$

1) $y' = -12(x-6)^5 = 0 \Rightarrow x=6$ সংকট বিন্দু।

2) $y'' = -60(x-6)^4$

$y''(6) = -60 \times 0^4 = 0$ ∴ পরীক্ষাটি সিদ্ধান্তবিহীন।

$y''' = -240(x-6)^3 \Rightarrow y'''(6) = 0$ ∴ পরীক্ষাটি সিদ্ধান্তবিহীন।

$y^{(4)} = -720(x-6)^2 \Rightarrow y^4(6) = 0$ ∴ পরীক্ষাটি সিদ্ধান্তবিহীন।

$y^{(5)} = -1440(x-6) \Rightarrow y^5(6) = 0$ ∴ পরীক্ষাটি সিদ্ধান্তবিহীন।

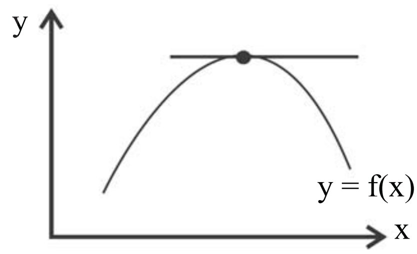
$y^{(6)} = -1440 \Rightarrow y^6(6) = -1440 < 0$

∴ y হোলো অবতল এবং এর সর্বোচ্চ মান আছে।

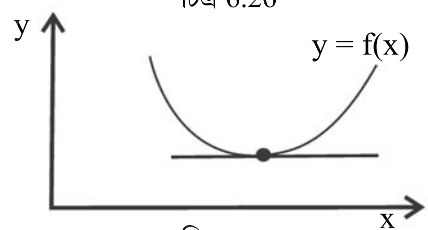
6.8 সর্বাধিক ও সর্বনিম্নকরণের জন্য প্রয়োজনীয় শর্তাবলি

আমাদের চিত্রে দেখা যাচ্ছে যে, $y = f(x)$ অপেক্ষকটি A বিন্দুতে সর্বাধিক, B বিন্দুতে সর্বনিম্ন এবং C বিন্দুটি হল বাঁক বদলের বিন্দু (Point of inflexion) যেখানে অপেক্ষকটি সর্বাধিকও নয়, আবার সর্বনিম্নও নয়। কিন্তু তিনটি বিন্দুতেই $\frac{dy}{dx} = 0$ এবং এটিই হল কোন অপেক্ষকের সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন মান হওয়ার প্রথম ক্রমের বা প্রয়োজনীয়

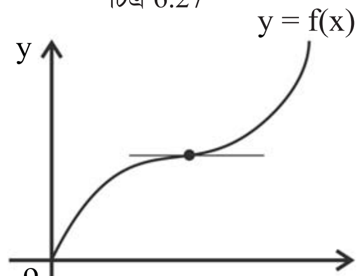
শর্ত। অবশ্য এই শর্ত পর্যাপ্ত নয়। সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন মান পেতে গেলে একটি পর্যাপ্ত বা দ্বিতীয় ক্রমের শর্তও পূরণ হওয়া দরকার। সর্বাধিককরণের জন্য দ্বিতীয় ক্রমের শর্তটি হল, $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ এবং সর্বনিম্নকরণের জন্য দ্বিতীয় ক্রমের শর্তটি হল, $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$। সংক্ষিপ্তসার হিসাবে বলতে গেলে:



চিত্র 6.26



চিত্র 6.27



চিত্র 6.28

সর্বাধিককরণের জন্য শর্ত হল : $\frac{dy}{dx} = 0,\ \frac{d^2y}{dx^2} < 0$

সর্বনিম্নকরণের জন্য শর্ত হল : $\frac{dy}{dx} = 0,\ \frac{d^2y}{dx^2} > 0$

বাঁক বদলের বিন্দুর জন্য প্রয়োজন : $\frac{d^2y}{dx^2} = 0\,,\ \frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$

তাহলে দেখা যাচ্ছে, সর্বাধিক ও সর্বনিম্ন বিন্দুগুলি হল নিশ্চল (stationary) বিন্দু, কিন্তু নিশ্চল বিন্দু সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন বিন্দু নাও হতে পারে, কেননা সেটি বাঁক বদলের বিন্দুও হতে পারে। কোন অপেক্ষক f(x)-এর নিশ্চল বিন্দুতে মানকে নিশ্চল মান (Stationary Value) বলা হয়।

উদাহরণ 6.8.1 : নীচের রাশিমালার সর্বাধিক ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয় কর।

উত্তর : মনে করি, $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 27$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9$ এখন, y কে সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন হতে গেলে $\frac{dy}{dx} = 0$ হতে হবে।

$\therefore\ 3x^2 - 6x - 9 = 0$ or, $x^2 - 2x - 3 = 0$ or, $(x+1)\ (x-3) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ 3$ এখন $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$

$x = -1$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = -12 < 0$ সুতরাং $x = -1$ হলে y সর্বাধিক হবে।

সর্বাধিক $y = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 27 = 27 + 9 - 3 - 1 = 32$

আবার, $x = 3$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 = 6 \times 3 - 6 = 12 > 0$

$\therefore$ $x = 3$ হলে y সর্বনিম্ন হবে।

y-এর সর্বনিম্ন মান = $3^3 - 3(3)^2 - 9(3) = 27 - 27 - 27 + 27 = 0$

উদাহরণ 6.8.2 : $y = 8x^5 - 15x^4 + 10x^2$ এই অপেক্ষকের সর্বাধিক ও সর্বনিম্ন মান বের কর।

উত্তর : ধরি, $y = f(x) = 8x^5 - 15x^4 + 10x^2$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 40x^4 - 60x^3 + 20x$$

সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন y পেতে গেলে $f'(x) = 0$ হতে হবে।

অর্থাৎ $40x^4 - 60x^3 + 20x = 0$ বা $20x(2x^3 - 3x^2 + 1) = 0$

সুতরাং হয় $x = 0$ বা, $2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

বা, $2x^3 - 2x^2 + x^2 + x - x + 1 = 0$

বা, $2x^2 (x-1) - x(x-1) -1(x-1) = 0$

বা, $(x-1)(2x^2-x-1) = 0$। তাহলে হয় $x=1$ কিংবা

$2x^2 - x - 1 = 0$ বা, $2x^2 - 2x + x - 1 = 0$

বা, $2x(x - 1) + 1(x-1) = 0$

বা, $(x - 1)(2x+1) = 0$ $\therefore$ $x = 1$ বা $-\frac{1}{2}$

x-এর এই সমস্ত মানে অপেক্ষকটির সর্বাধিক অথবা সর্বনিম্ন মান থাকতে পারে।

এখন

এখন, $f''(0) = 20 > 0$ সুতরাং $x = 0$ বিন্দুতে y-এর একটি সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে। সর্বনিম্ন $y = f(0) = 0$। আবার $f''(1) = 160 - 180 + 20 = 0$, সুতরাং, এই স্তরে আমরা নির্দিষ্ট করে কিছু বলতে পারছি না। আমাদের $f'''(x)$-এর মান দেখতে হবে। এখানে, $f'''(x) = 480x - 360x$

এখন, $f'''(1) = 480 - 360 = 120 \neq 0$, সুতরাং $x = 1$ বিন্দুতে y সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন কোনোটাই নয়। ঐ বিন্দুটি একটি বাঁক বদলের বিন্দু। $f(1) = 8(1)^5 - 15(1)^4 + 10(1)^2 = 8-15+10=3$

সুতরাং বাঁক বদলের বিন্দুর স্থানাঙ্ক হল (1, 3)।

আবার, $x = -\frac{1}{2}$ হলে,

$= -20 - 45 + 20 = -45 < 0$

সুতরাং, $x = -\frac{1}{2}$ হলে y সর্বাধিক হবে।

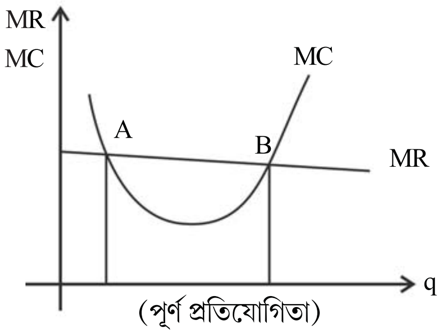
সর্বাধিক

$$= -\frac{1}{4} - \frac{15}{16} + \frac{5}{2} = \frac{40 - 15 - 4}{16} = \frac{21}{16}$$

অর্থনীতি থেকে উদাহরণ (Example from Economics)

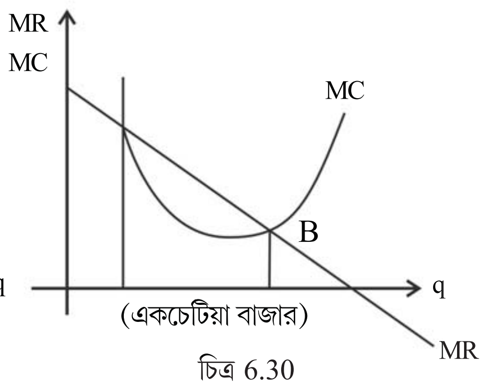
সর্বাধিককরণের প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের শর্তের উদাহরণ আমরা পূর্ণ প্রতিযোগিতা ও একচেটিয়া বাজারের ভারসাম্য অবস্থা থেকে দিতে পারি। মুনাফা সর্বাধিক করণের প্রথম ক্রমের শর্ত হল, MR=MC। এই শর্ত A ও B উভয় বিন্দুতে পূরণ হয়েছে। মুনাফা সর্বাধিককরণের দ্বিতীয় ক্রমের শর্ত হল, MC রেখার ঢাল > MR রেখার ঢাল। এই শর্ত পূরণ হয়েছে কেবল B বিন্দুতে। সুতরাং, A বিন্দু মুনাফা সর্বাধিককারী বিন্দু নয়। কিন্তু B বিন্দুতে যেহেতু প্রথম ও দ্বিতীয় উভয় ক্রমের শর্তই পালিত হচ্ছে, তাই B বিন্দু হল মুনাফা সর্বাধিককারী বিন্দু।

গাণিতিক সমস্যা ও তার সমাধান (Mathematical Problems & Solutions)



(পূর্ণ প্রতিযোগিতা)

চিত্র 6.29



(একচেটিয়া বাজার)

চিত্র 6.30

(1) উৎপাদন অপেক্ষকটি হল:

(i) L -এর যে মানে q সর্বাধিক, সেই মান বের কর। q-এর সর্বাধিক মান কত?

(ii) সর্বাধিক AP-র মান নির্ণয় কর।

(iii) দেখাও যে যখন AP সর্বাধিক, তখন AP = MP

উত্তর : (i) $q = 40L + 3L^2 - \frac{L^3}{2}$

$\therefore \frac{dq}{dL} = 40 + 6L = L^2$ । এখন q কে সর্বাধিক করার প্রথম ক্রমের শর্ত হল, $\frac{dq}{dL} = 0$

বা, $40 + 6L - L^2 = 0$

বা, $L^2 - 6L - 40 = 0$ বা, $(L+4)(L-10) = 0$, $\therefore$ L= – 4, 10.

q কে সর্বাধিক করার দ্বিতীয় ক্রমের শর্ত, $\frac{d^2q}{dL^2} < 0$

এখানে, $\therefore \frac{d^2q}{dL^2} = 6 - 2L$ । যখন $L = -4, \frac{d^2q}{dL^2} = -14 < 0$

যখন $L = 10, \frac{d^2q}{dL^2} = -14 < 0$

সুতরাং, যখন L = 10 তখন q সর্বাধিক। q এর সর্বাধিক মান হল

$$= 40 \times 10 + 3 \times 10^2 - \frac{10^3}{3} = 700 - \frac{1100}{3} = \frac{1100}{3} = 367 \text{(Ans.)}$$

(ii) $MP = \frac{dq}{dL} = 40 + 6L - L^2$

এখন MP সর্বাধিক হতে গেলে $\frac{dMP}{dL} = 0$ or, $6 - 2L = 0$ $\therefore$ L=3

এখানে $\frac{d^2MP}{dL^2} = -2 > 0$ সুতরাং L=3 হলে MP সর্বাধিক হবে।

সর্বাধিক MP = 40 + 6 × 3 – 3 = 55

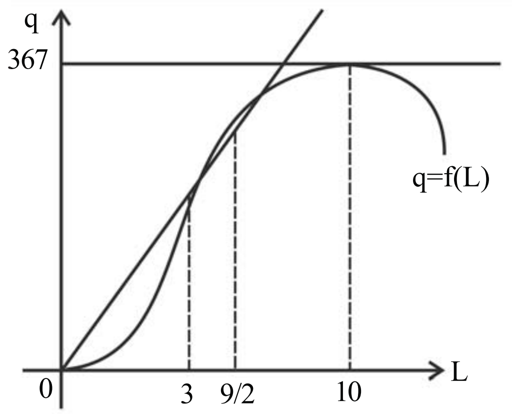
(iii) $AP = \frac{q}{L} = 40 + 3L - \frac{L^2}{3}$ এখন, AP কে সর্বাধিক হতে গেলে $\frac{dAP}{dL}$ 0 এবং হতে হবে।

এখন । এখানে

সুতরাং, যখন $L = 9/2$, তখন AP সর্বাধিক।

সর্বাধিক $AP = 40 + 3L - \frac{L^2}{3}$

$= 40 + 3 \times \frac{9}{2} - \frac{1}{3} \times \frac{81}{4} = 40 + \frac{22}{2} - \frac{27}{4}$

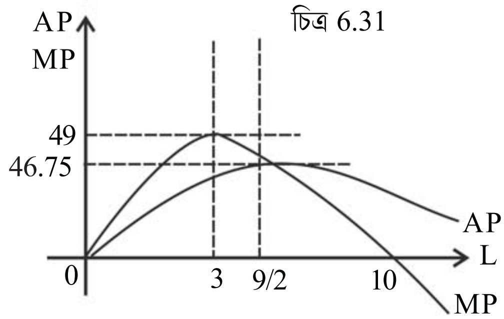


চিত্র 6.31

যখন $L = 9/2$, $MP = 40 + 4L - L^2$

$= 40 + 6 \times \frac{9}{2} - \frac{81}{4} 40 + \frac{27}{4}$

= 46·75



চিত্র 6.32

দেখা যাচ্ছে, যখন তখন AP সর্বাধিক

$L = 9/2 = 40 + \frac{27}{4} = 46\frac{3}{4} = 46{\cdot}75$ এবং ঐ বিন্দুতে সর্বাধিক AP=MP

6.9 সারাংশ

এই অধ্যায়ে কোনো একটি অপেক্ষক f(x) যে বিন্দুতে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন হয়, প্রথম মাত্রা ও দ্বিতীয় মাত্রার অন্তরকলজের চিহ্নানুসারে তার নির্ধারণ পদ্ধতি বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা হয়েছে। এক্ষেত্রে $f'(x) = 0$ হলে f(x) এর নিশ্চল মান হওয়ার ধারণা ব্যাখ্যা করা হয়েছে। সেই সূত্রে f(x) অপেক্ষকের সকল সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের ক্ষেত্রে $f'(x) = 0$ হয়, তা দর্শিত হয়েছে। যদি $f'(a) = 0$ এবং $f''(a) = 0$ হয় তাহলে f(a) মানকে x=a বিন্দুতে অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ধারিত হবে, এবং $f'(a) = 0$ এবং $f''(a) > 0$ হলে, f(a) মানকে x=a বিন্দুতে অপেক্ষকের সর্বনিম্ন মান নির্ধারিত হবে, সেটা দেখানো হয়। কোনো অপেক্ষকের বক্রতার ধরন উত্তল না অবতল, এবং তার কোনো বাঁক বদলের বিন্দু আছে কিনা সেটার নির্ণয় পদ্ধতি নিয়েও আলোচনা করা হয়েছে।

6.10 অনুশীলনী

1. নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলি x=4-এ ক্রমবর্ধমান না ক্রমহ্রাসমান??

   a) $y = 3x^2 - 14x + 5$ b) $y = (5x^2 - 8)^2$

2. $f(x) = -7x^2 + 126x-23$ অপেক্ষকটির আপাত চরমাবস্থা নির্ধারণ করুন।

3. দেখাও যে দ্বিঘাত অপেক্ষকের কোনো বাঁক বদলের বিন্দু নেই কিন্তু ত্রিঘাত অপেক্ষকের বাঁক বদলের বিন্দু আছে।

4. যদি মোট ব্যয় অপেক্ষক $C = 4q^2+10$ ও মোট বিক্রয়লব্ধ আয় $R = -2q^2+6q$ হয় তাহলে কোন্ উৎপাদনের পরিমাণে মুনাফা সর্বোচ্চ হবে?

5. কোনো একটি উৎপাদন অপেক্ষক হোলো $q = -3L^3+18L^2+L$ দেখান যে বাঁক বদলের বিন্দুতে প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা (MP) সর্বোচ্চ হয়। দেখান যে গড় উৎপাদনশীলতা (AP) যখন সর্বোচ্চ হয় (L এর যে মানে) সেখানে MP = AP হবে।

6. $y = -2x^3+4x^2+9x-15$ অপেক্ষকের $x=3$ এ বক্রতা কী হবে?

6.11 গ্রন্থপঞ্জি

1. Alpha. C. Chiang and K. Wainwright (2013): Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw Hill Education, Fourth Edition.

2. Silberberg. E. and Suen, W: The Structure of Economics: A Mathematical Analysis, Third Edition, McGrawHill, 2001.

3. Bhukta, Anindya and Seikh Salim (2013) : Mathematics for Undergraduate Economics, Progressive Publishers.

4. Sarkhel, J and A, Bhukta (2000): An Introduction to Mathematical Techniques for Economic Analysis, Book Syndicate Private Limited.

5. Henry, S.G.B. (1969) : Elementary Mathematical Economics, Routledge and Kegan Paul.

একক 7 ❑ কিছু চলকের অপেক্ষক

গঠন ঃ

7.1 উদ্দেশ্য

7.2 প্রস্তাবনা

7.3 দুই স্বাধীন চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষক

7.4 লেভের রেখা

7.5 আংশিক অবকলের নিয়ম

7.6 অর্থনৈতিক প্রয়োগ

7.6.1 অনেক চলরাশি ভিত্তিক আংশিক অবকলনের দ্বিতীয় ক্রম

7.7 ইয়ং উপপাদ্য

7.8 গ্র্যাডিয়েন্ট এবং হেসিয়ান

7.9 দ্বিচলকবিশিষ্ট রাশির দ্বিঘাত রূপ

7.9.1 পূর্ণ ও আংশিক অন্তরকলজ

7.9.2 পূর্ণ অবকল

7.9.3 দ্বিতীয় ক্রমের পূর্ণ অন্তরকলজ

7.10 চিহ্ন নির্দিষ্টকরণের নির্ণায়ক পরীক্ষা

7.11 সংক্ষিপ্তসার

7.12 প্রশ্নাবলী

7.13 গ্রন্থপঞ্জী

7.1 উদ্দেশ্য

এই অধ্যায় পাঠে কিছু বাস্তব চলকের অর্থাৎ দুই বা ততোধিক বাস্তব চলকের অপেক্ষক কিভাবে প্রকাশ করা যায় এবং তার সমাধান ও প্রয়োগ সম্যকভাবে জানা যাবে।

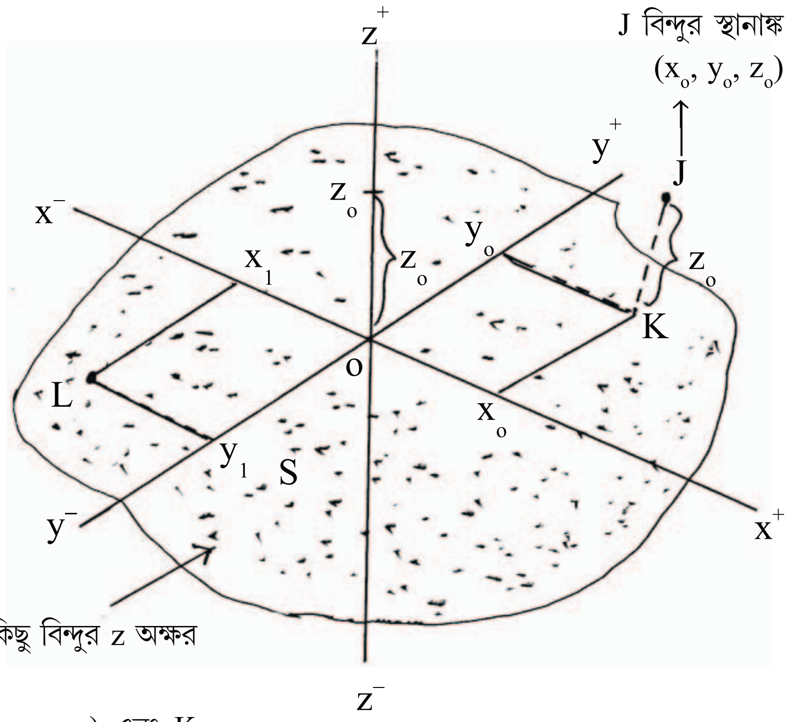
7.2 প্রস্তাবনা

অর্থনৈতিক বিভিন্ন সমস্যার প্রকাশের ক্ষেত্রে বাস্তব বহুচলক বিশিষ্ট অপেক্ষক পরিলক্ষিত হয়। তার প্রকাশ, এবং প্রসঙ্গত লেভেল রেখা ও দ্বিঘাত রূপের প্রকাশ করার ধারণা সমস্যাগুলির সমাধানের দিক নির্দেশ করে।

7.3 দুই স্বাধীন চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষক

ধরা যাক $Z = f(x, y)$ একটি দ্বিচলক (স্বাধীন) বিশিষ্ট অপেক্ষকের সাধারণ রূপ (general form)। এক্ষেত্রে নির্ভরযোগ্য বা নির্ভরশীল চলরাশি (dependent variables) হলো Z, এবং স্বাধীন চলরাশি হলো x ও y। উদাহরণ হিসাবে বলা যায় $Z = 4x^2 - 16y$ বা $Z = e^{3x+2y}$ ইত্যাদি। এই ধরনের অপেক্ষকের লেখচিত্র হবে ত্রিমাত্রিক অর্থাৎ তিন অক্ষ বিশিষ্ট (Three dimensional) যেখানে এক একটি অক্ষে এক একটি চলরাশির পরিমাপ হয়।

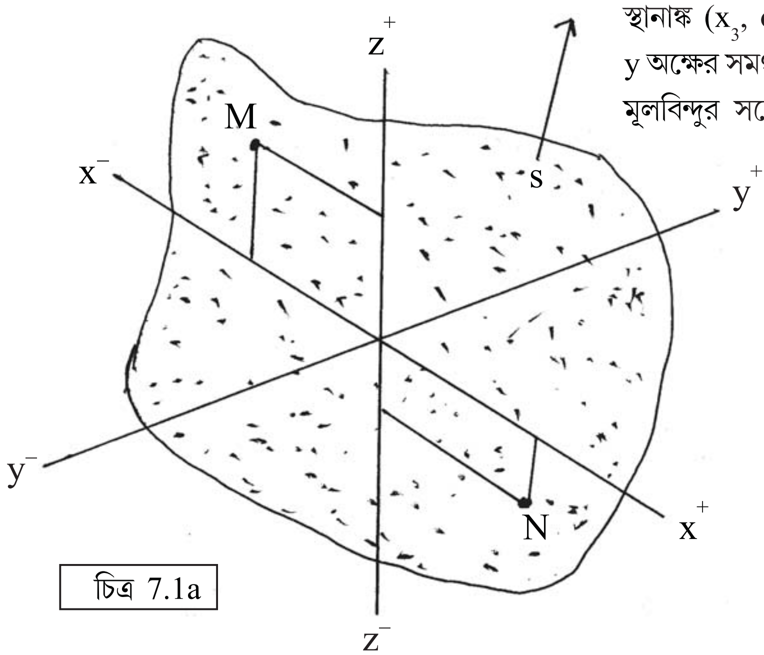
চিত্র 7.2 এ এই ধরনের অপেক্ষকের লেখচিত্র বোঝানো হয়েছে। সেখানে দেখা যাচ্ছে তিনটি অক্ষই, মূলবিন্দু 0 তে সমকোণে মিলিত হয়েছে। যেখানে x, y ও z এর মান শূন্য। x অক্ষ বরাবর মূলবিন্দু থেকে x^+ এর দিকে গেলে x ক্রমশঃ ধনাত্মক হবে আবার x^- এর দিকে x এর মান ক্রমশঃ ঋণাত্মক হবে, কিন্তু এক্ষেত্রে y ও z এর মান শূন্য থাকবে।



S ক্ষেত্রের বিন্দুগুলি মধ্যে কিছু বিন্দুর z অক্ষর স্থান $z = 0$।
যেমন L বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1, o) এবং K বিন্দুর (x_o, y_o, o) এই বিন্দুগুলি একটি সমতল গঠন করে (plane) যার নাম oxy সমতল, যা x ও y ও মূলবিন্দু নিয়ে গঠিত।

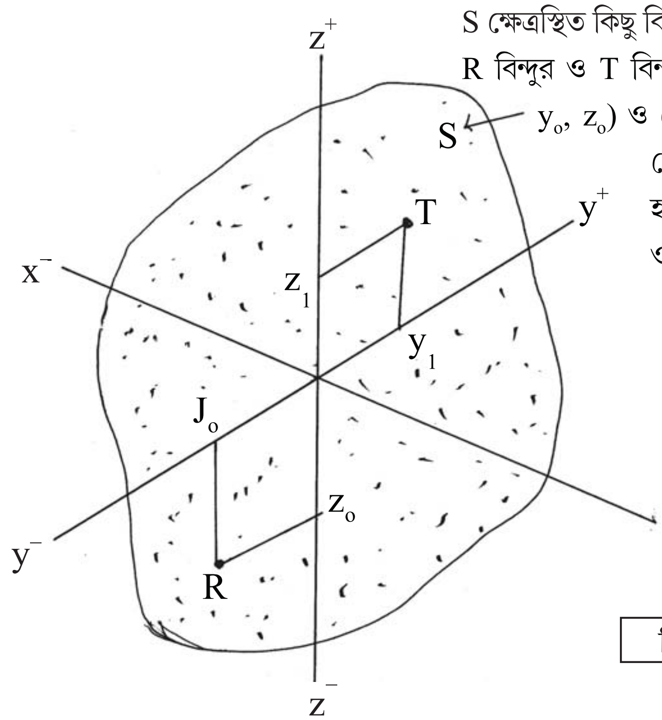
চিত্র 7.1a

s ক্ষেত্রস্থিত কিছু বিন্দুর y অক্ষের মান y = 0। যেমন M বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_2, o, z_2) এবং N বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_3, o, z_3) এই বিন্দুগুলি x ও y অক্ষের সমণ্বয়ে ozx সমতল সৃষ্টি করে মূলবিন্দুর সঙ্গে।



চিত্র 7.1a

S ক্ষেত্রস্থিত কিছু বিন্দুর x এর মান শূন্য, যেমন R বিন্দুর ও T বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (o, y_o, z_o) ও (o, y_1, z_1) এই বিন্দুগুলি যে সমতল গঠন করছে তা হলো oyz সমতল যা y, z, ও মূলবিন্দু দ্বারা আবদ্ধ।)



চিত্র 7.1b

7.4 লেভেল রেখা

$z = f(x, y)$ এর ত্রিমাত্রিক ক্ষেত্রে যে লেখচিত্র বোঝানো হলো তাকে xy তলের সমান্তরাল অনুভূমিক তলগুলি (plane) দিয়ে কাটলে সেই অংশগুলিকে xy তলে প্রক্ষেপ করলে, অর্থাৎ লেখচিত্র এবং তলের ছেদাংশ যখন xy তলে প্রক্ষিপ্ত হলে, সেই অংশগুলি লেভেল রেখা তৈরী করে। যদি ছেদক সমতলটি (intersecting plane) $Z = C$ হয়, তাহলে ছেদাংশটি f এর জন্য C উচ্চতায় লেভেল রেখা সৃষ্টি করবে যার রূপ হবে $f(x, y) = C$.

নীচের চিত্রগুলির মাধ্যমে লেভেল রেখা বোঝানো হলো।

z

z = c

y

x f(x, y) = c

চিত্র 7.2 ঃ $z = f(x, y)$ এবং তার (x, y) তলে একটি লেভেল রেখা।

উদাহরণ চিত্র 7.4.1 ঃ z x^2 y^2 এর লেভেল রেখাগুলি অঙ্কন করো Oxy ও Oxy তলে।

সমাধান ঃ নির্ণেয় লেভেল রেখা হলো সেখানে হলো ধ্রুবক। এটি একটি বৃত্তের সমীকরণ হবে Oxy তলে যার মূলবিন্দু হবে শূন্য এবং ব্যাসার্ধ হবে । ধরা যাক তৈরী হলো নীচ থেকে উপরে একের পর এক বৃত্ত জড়ো করে। তাহলে একটি শঙ্কু (cone) সৃষ্টি হবে যার শীর্ষবিন্দু হবে মূলবিন্দুতে। ইচ্ছেমতো z কে তার বিভিন্ন নির্দিষ্ট মানের ভিত্তিতে (এখানে $Z = 0, 9, 16, 25$ নেওয়া হয়েছে যেখানে যথাক্রমে) তল বরাবর বিভক্ত করে যদি oxy তলে প্রক্ষেপ করা হয় তাহলে উপর থেকে দেখলে, শঙ্কুর মধ্যে এই অনুভূমিক বিভাগগুলি একই কেন্দ্রবিন্দু যুক্ত বৃত্তের আকার ধারণ করবে ও নির্দিষ্ট প্রক্ষেপণ গুলি oxy তলে এক একটি বৃত্ত হবে। তেমনি যদি y এর কিছু

নির্দিষ্ট মানের ভিত্তিতে তল বরাবর বিভাগ নিয়ে oxz এ প্রক্ষেপ করা হয় তাহলে চিত্র (7.3c) এর আকার ধারণ করবে। যেমন y = 0 হলে AOB বিভাগ হবে যার সমীকরণ $Z = x^2 + o$ এগুলি অধিবৃত্ত হবে।

চিত্র (7.3a) ঃ $z = x^2 + y^2$-এর ত্রিমাত্রিক প্রকাশ, যেখানে কিছু আইসো y ও আইসো z বিভাগ আছে।

$x^2 + y^2 = 25$ (iso –z ভাগ যখন z = 25)

A

B $z^2 = x^2 + 4$ (iso –z ভাগ যখন y = 2)

$x^2 + y^2 = 16$ (iso –y ভাগ যখন z = 16)

C

E

$x^2 + y^2 = 9$ (iso –y ভাগ যখন z = 9)

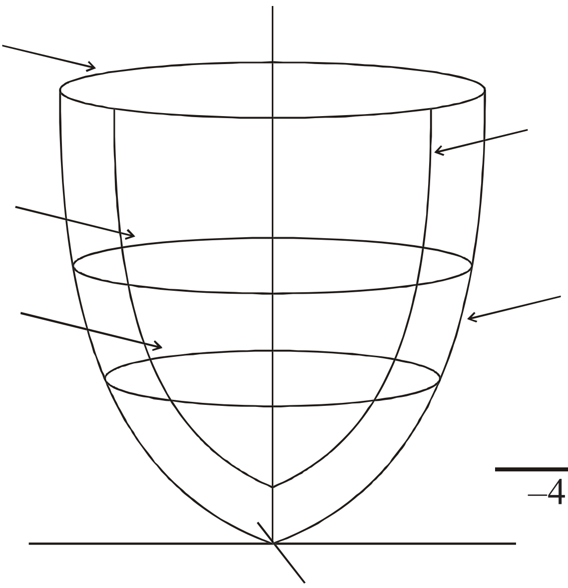
$z = x^2 + 0$ (iso –z ভাগ যখন y = 0)

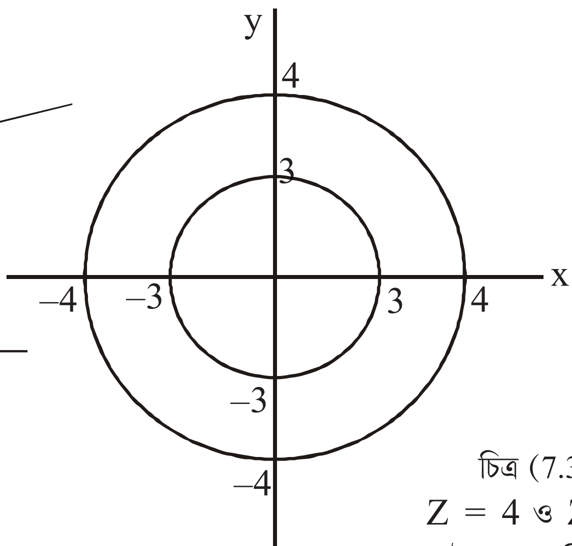
D }4

O

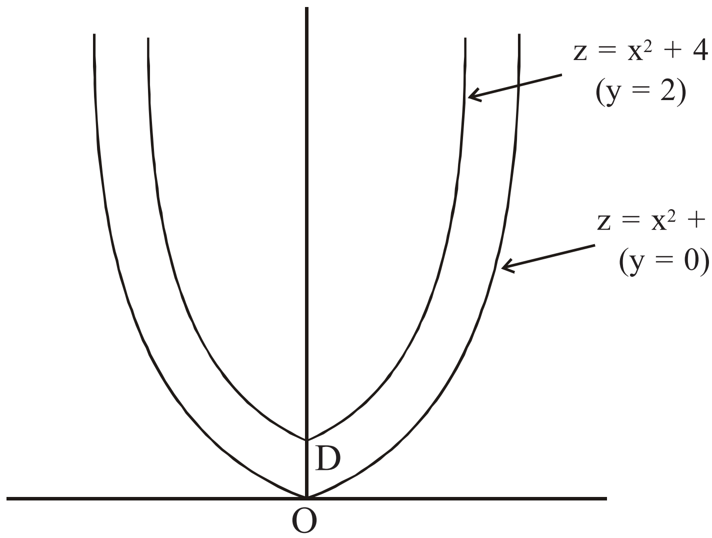
x

y





চিত্র (7.3b) ঃ $z = x^2 + y^2$ এর Z = 4 ও Z = 9 এর Oxy তলে আইসো Z বিভাগ।



চিত্র (7.3c) ঃ $z = x^2 + y^2$ এর oxz তলে আইসো y বিভাগ।

উদাহরণ 7.4.2 ঃ দেখাও যে (x, y) এর সকল বিন্দুগুলি যারা xy = 5 এই শর্তপূরণ করে তারা g(x, y) অপেক্ষকের লেভেল রেখা হবে যেখানে $g\ x.y \quad \frac{6\ xy\ \ 1^{2}}{x^{4}y^{4}\ \ 1}$

সমাধান ঃ xy = 5 ; g তে বসালে ঃ

অর্থাৎ সকল (x, y) যেখানে xy = 5, g(x, y) এর মান ধ্রুবক। সুতরাং (x, y) এর যে কোনো বিন্দু যা xy = 5 এই শর্ত পূরণ করে তারা g এর উচ্চতায় লেভেল রেখার উপর অবস্থান করে।

4. আংশিক অবকল ও তার অর্থনৈতিক প্রয়োগ ঃ

4. আংশিক অবকলের ধারণা ঃ

যখন y কেবল একটিমাত্র চলরাশি x এর উপর নির্ভর করে, অর্থাৎ y = f(x) অপেক্ষক হয় যার পরিসর x   ℝ হয় তখন y অপেক্ষকের অবকল হলো যে হারে x পরিবর্তনের ফলে y পরিবর্তিত হয়

, যখন x এর পরিবর্তন খুব স্বল্প হয় অর্থাৎ $\Delta x \quad 0$, যখন $y = f(x_1, x_2)$ হয় তখন x_1 ও x_2 এই দুটি চলরাশি আলাদা ভাবে নিয়ে আবার দেখা যায় y কিভাবে x_1 ও x_2 র প্রত্যেকটির পরিবর্তনের ফলে কি হারে পরিবর্তিত হয়। যেমন যখন কে ধ্রুবক রেখে, তা বার করা যায়। প্রাপ্ত ফলাফলকে বলা হয় $y = f(x_1, x_2)$ অপেক্ষকের x_1 এর সাপেক্ষে আংশিক অবকল।

অর্থাৎ একে এইভাবে প্রকাশ করা হয় ঃ বা $\frac{y}{x_1}$ বা কেবলই f_1 যেখানে

$$= \lim_{x_1 \quad 0} \frac{f\ x_1 \quad x_1, x_2\ - f\ x_1, x_2}{x_1}$$

এইভাবে $y \quad f\ x_1, x_2$ র, x_2 এর সাপেক্ষে আংশিক অবকল হবে $\frac{f\ x_1, x_2}{x_2}$ বা $\frac{y}{x_2}$ বা বা কেবলই f_2 যেখানে

$$= Q \quad \frac{1}{3} K^3 L^3,$$

আংশিক অবকলম বলার কারণ হলো, এক্ষেত্রে কেবল একবারে x_1 বা x_2 এর পরিবর্তনের ফলে y এর পরিবর্তন গণ্য করা হচ্ছে, যদিও y ; x_1 ও x_2 উভয়ের উপরই নির্ভরশীল।

7.5. আংশিক অবকলের নিয়ম

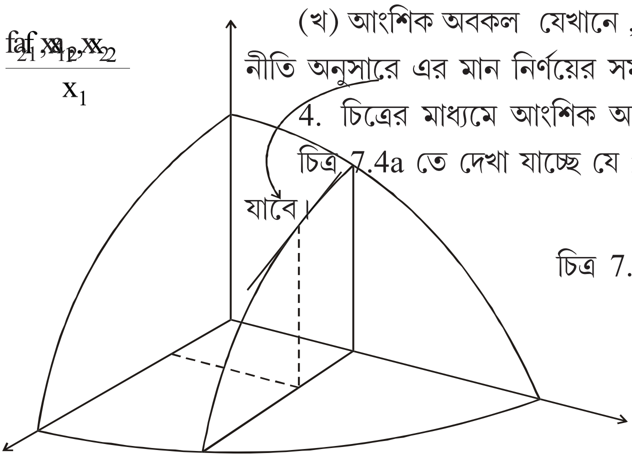
যে কোনো $y = f(x_1, x_2)$, দুই স্বাধীন চলরাশিবিশিষ্ট অপেক্ষকদের দুটি প্রথম বর্গীয় আংশিক অবকল থাকে।

(ক) আংশিক অবকল , যেখানে , x_1 এর দিকের তলের নতি পরিমাপ করে। অবচলনের নিয়মানুসারে এর মান নির্ণয়ের সময়ে x_2 কে স্থির রাখতে হবে।

(খ) আংশিক অবকল যেখানে , x_2 এর দিকের তলের (surface) নতি পরিমাপ করে। অবকলনের নীতি অনুসারে এর মান নির্ণয়ের সময়ে x_1 কে ধ্রুবক বা স্থির রাখতে হবে।

4. চিত্রের মাধ্যমে আংশিক অবকলের ধারণার ব্যাখ্যা ঃ

চিত্র 7.4a তে দেখা যাচ্ছে যে x_2 কে স্থির রাখলে মাত্র দুটি দিক থেকে প্রদত্ত বিন্দুর কাছে যাওয়া যাবে।



চিত্র 7.4 ঃ $\mathbb{R}^2$ তে সংজ্ঞায়িত আংশিক অবকলন

y

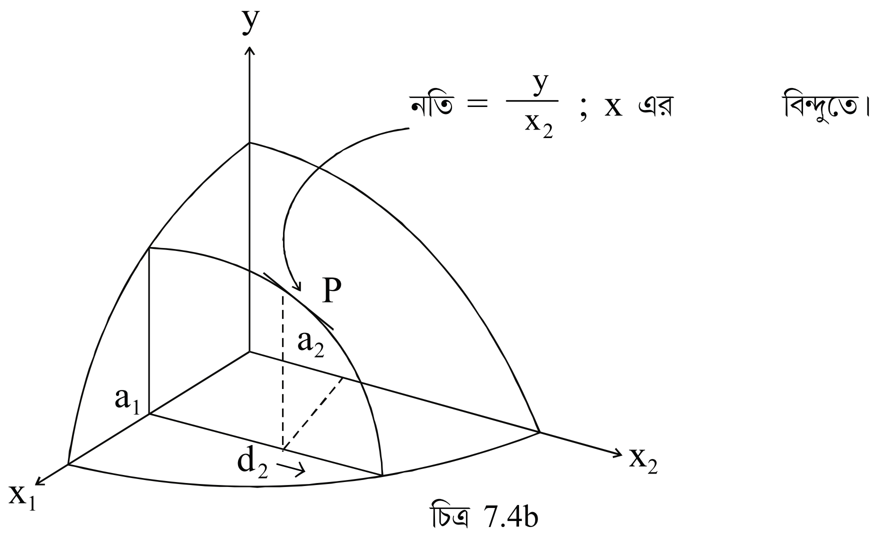
নতি = $\frac{y}{x_1}$; x এর বিন্দুতে।

P

x_2

x_1

চিত্র 7.4a



চিত্র 7.4b

এক্ষেত্রে, যেন একটি স্বাধীন চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষকের, সেই চলরাশির পরিবর্তনের ফলের মতো আচরণ করে।

এবার যদি n সংখ্যক চলরাশি গ্রহণ করা হয় অর্থাৎ অপেক্ষক যদি $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ হয়, তাহলে

=

হবে y এর x_i এর সাপেক্ষে আংশিক অবকল।

নীচের উদাহরণের মাধ্যমে কিভাবে আংশিক অবকলের মান নির্ণয় করা হয় তা বোঝানো হলো।

উদাহরণ 7.5.1 : $y \quad x_1^2 x^2$ এই অপেক্ষকের ক্ষেত্রে এর মান নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ (1) নম্বর সূত্রানুসারে অর্থাৎ অবকলনের প্রথম নীতি অবলম্বন করলে ঃ

$$\frac{f\ x_1, x_2}{x_1} = \lim_{x_1 \quad 0} \frac{f\ x_1 \quad x_2, x_2 - f\ x_1, x_2}{x_1}$$

$$= \lim_{x_1 \quad 0} \frac{x_1 \quad x_2{}^2 x_2 - x_1, x_2}{x_1}$$

$$= \lim_{x_1 \quad 0} \frac{x_1^2 \quad 2x_1 \ x_1 \quad x_1{}^2 \ x_2 - x_1^2 x_2}{x_1}$$

$$= \lim_{x_1 \quad 0} \frac{2x_1 \ x_1 \quad x_1{}^2 \cdot x_2}{x_1}$$

$$= \lim_{x_1 \quad 0} 2x_1 \quad x_1 \ x_2 = 2x_1 x_2$$

প্রথম নীতি ছাড়া আংশিক অবকলন নীতি অনুসারে ঃ নির্ণয় করার ক্ষেত্রে $x_2 = a$ এই ধ্রুবকে স্থির রাখা হলো।

$$\text{এখন} \quad \frac{f\ x_1, x_2}{x_1} = \frac{d\ cx_1^2}{dx_1} = 2cx_1$$

$$= 2x_2x_1$$

7.6 অর্থনৈতিক প্রয়োগ

উদাহরণ 7.6.1 : নিম্নলিখিত পরিবারভিত্তিক চাহিদা রেখাটি গণ্য করো ঃ

$q^d = q^d(p, y) = 10y^2 + 2y^4p^{-2} - 3p^3 \ (p, y > 0)$

q^d_y, q^d_p, q^d_{yy}, q^d_{pp}, q^d_{py} এবং q^d_{yp}.

$$\frac{f\ x_1x_2^2}{x_1 \quad x_1}$$

$$q_p^d \quad \frac{q^d}{p} \quad -4y^4p^{-3} - 9p^2$$

$$q_y^d \quad \frac{q^d}{y} \quad 20y \quad 8y^3p - 2$$

$$\frac{{}^2q^d}{p^2} \quad q^d_{pp} \quad \frac{}{p}\ \frac{q^d}{p} \quad 12y^4p^{-4} - 18p$$

$$\frac{{}^2q^d}{y^2} \quad q^d_{yy} \quad \frac{}{y}\ \frac{q^d}{y} \quad 20 \quad 24y^2p - 2$$

$$\frac{{}^2q^d}{p\ y} \quad q^d_{py} \quad \frac{}{p}\ \frac{q^d}{y} \quad -16y^3p^{-3}$$

$$\frac{{}^2q^d}{p\ y} \quad q^d_{py} \quad \frac{}{y}\ \frac{q^d}{p} \quad -16y^3p^{-3}$$

উদাহরণ 7.6.2 : কোনো উৎপাদনে অপেক্ষক $Q \quad \frac{1}{3}K^3L^3$, যেখানে Q হলো উৎপাদনের পরিমাণ এবং K ও L হলো যথাক্রমে মূলধন ও শ্রম। মূলধন ও শ্রমের প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ মূলধনের প্রান্তিক উৎপাদনশীলতার MP_K ও শ্রমের প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা MP_L যথাক্রমে Q কে K ও L এর সাপেক্ষে আংশিক অবচলন করলেই পাওয়া যাবে।

$MP_K \quad \frac{Q}{K} \quad K^2L^3$ এবং

7.6.1 অনেক চলরাশি ভিত্তিক আংশিক অবকলনের দ্বিতীয় ক্রম (Second order Partial derivatives with more variables)

পূর্বে আলোচিত হয়েছে যে যদি $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ একটি অপেক্ষক হয় তাহলে , যেখানে $i = 1, 2, ..., n$ বলতে বোঝায় x_i এর সাপেক্ষে $f(x_1, ..., x_n)$ এর আংশিক অবকলন যেখানে x_i ব্যাতীত বাকী সকল স্বাধীন চলরাশিকে স্থির রাখা হয়।

f এর প্রত্যেক n প্রথম বর্গীয় আংশিক অবকলের সাপেক্ষে n দ্বিতীয় বর্গীয় আংশিক অবকল হলো ঃ

এক্ষেত্রে i ও j উভয়েই 1, 2, ..., n এর মধ্যে যে কোনো মান নিতে পারে বা সর্বমোট n^2 দ্বিতীয় বর্গীয় আংশিক অবকল থাকে।

যদি এই দ্বিতীয় বর্গীয় আংশিক অবকলকে $n \times n$ বর্গাকার বিন্যাসে সজ্জিত করা যায় তবে তা হবেঃ

এই বিন্যাসকে বলা হয় f-এর হেসিয়ান ম্যাট্রিক্স যেখানে এর উপর নির্ভর করে।

উদাহরণ 7.6.3 : $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_1x_2^3 - x_2^2x_3^2 + x_3^3$ এর হেসিয়ান ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ নির্ণয় হেসিয়ান ম্যাট্রিক্স হলো ঃ

$$f \; x \quad \begin{matrix} f_{11}\,x & f_{12}\,x & f_{1n}\,x \\ f_{21}\,x & f_{22}\,x & f_{2n}\,x \\ f_{n1}\,x & f_{n2}\,x & f_{nn}\,x \end{matrix}$$

7.7 Young উপপাদ্য

মনে করা যাক $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ এর সকল m তম আংশিক অবকল হলো অবিচ্ছিন্ন। এবার যদি তাদের যে কোনো দুটি এমন হয় যে তাদের প্রত্যেককেই একই সংখ্যক বার, প্রত্যেকের সাপেক্ষে অবকলিত হয় তবে তারা সমান হয়। (suppose that all the order partial derivatives of the function $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ are continuous. If any two of them involve differentiating w.r.t each of the variables the same number of times, then they are necessarily equal.

ধরা যাক $m = m_1 + m_2 ..... m_n$ এবং মনে করা যাক $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ যথাক্রমে m_1 সংখ্যকবার x_1 m_2 সংখ্যক বার x_2, ..., m_n সংখ্যক বার x_n কে অবচলন করা হলো। এক্ষেত্রে কিছু $m_1, ..., m_n$ শূন্য হতেই পারে। ধরা যাক m তম ক্রমের ক্ষেত্রে (mta order) আংশিক অবকলনের অবিচ্ছিন্নতার শর্তপূরণ হয়েছে। তাহলে m = 2 এর ক্ষেত্রে

$$(i = 1, 2, ...n, j = 1, 2, ..n)$$

হবে যদি উভয় অবকলই অবিচ্ছিন্ন হয়।

7.8 গ্র্যাডিয়েন্ট এবং হেসিয়ান

$f_{21}(x_1, x_2)$ $f_{22}(x_1, x_2)$

কোনো একটি সমতলে গ্র্যাডিয়েন্ট ভেক্টরকে লেখা যায় $Df(x_1, x_2)$ বা $\begin{matrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{matrix}$

যেখানে ও

হেসিয়ান ম্যাট্রিক্স হবে ঃ

বা একে হিসাবেও প্রকাশ করা যায়।

উদাহরণ 7.8.1 : $f(x, y) \quad xy^4 \quad x^3y^2$ এর গ্র্যাডিয়েন্ট ও হেসিয়ান ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ উক্ত অপেক্ষকের আংশিক অবকলগুলি হলো ঃ

$$\frac{f}{x} \quad y^4 \quad 3x^2y^2,$$

সুতরাং $\frac{{}^2f}{x^2}\quad 6xy^2,$ $\qquad\frac{{}^2f}{x\ y}\quad 4y^3\quad 6x^2y$

অতএব গ্র্যাডিয়েন্ট ঃ $Df\ x, y$ বা $\begin{matrix} 3x^2 \quad y^2\ y^2 \\ 2x^2 \quad 4y^2\ xy \end{matrix}$

এবং হেসিয়ান হলো ঃ

7.9 দ্বিচলকবিশিষ্ট রাশির দ্বিঘাত রূপ

এই অধ্যায় আলোচনার পূর্বে-অন্তরকলজ সম্পর্কে ধারণা থাকা আবশ্যক। কারণ পূর্বে আমরা দেখেছি বলতে সহজ করে বোঝায় যখন Δx, শূন্যের দিকে অগ্রসর হয় তখন এর সীমা কি হবে সেই মান। এখন দেখবো এই কিভাবে অন্তরকলজ অনুপাত (differential ratio) হিসাবে প্রকাশিত হবে যেখানে dy হবে y এর অন্তরকলজ ও dx হবে x এর অন্তরকলজ।

7.9.1 পূর্ণ ও আংশিক অন্তরকলজ (Total and partial differential)

যদি একক স্বাধীন চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষক নেওয়া যায় অর্থাৎ y = f(x), সেক্ষেত্রে y এর অন্তরকলজ অর্থাৎ dy ; x এর স্বল্প পরিবর্তন, dx ; এর জন্য কতটা পরিবর্তিত হবে সেই মানকে নির্দেশ করবে।

যদি স্বাধীন চলরাশি দুই বা তার অধিক হয়, তখন পূর্ণ চলরাশির স্বল্প পরিবর্তন জন্য, নির্ভরশীল চলরাশি কতটা পরিবর্তিত হয়।

অর্থাৎ Z = f(x, y) হলে পূর্ণ অন্তরকলজ

dz

$z_x dx \quad z_y dy$

উদাহরণ 7.9.1 : ধরা যাক $Z = x^6 + 10xy + 5y^4$ তাহলে Z এর পূর্ণ অন্তরকলজ কি হবে?

সমাধান ঃ $Zx = 6x^5 + 10y$ $Zy = 10x + 20y^3$

সুতরাং $dz = (6x^5 + 10y)dx + (10x + 20y^3)dy$.

7.9.2 পূর্ণ অবকল (Total Derivatives)

ধরা যাক Z = f(x, y) এবং Y = g(x) অর্থাৎ y ও x তারা স্বাধীন নয়। x এর পরিবর্তন সরাসরি

যেমন Z কে প্রভাবিত করে, তেমন পরোক্ষভাবে g অপেক্ষকের মাধ্যমেও Z কে প্রভাবিত করে। এক্ষেত্রে পূর্ণ অবকল এই প্রত্যক্ষ এবং পরোক্ষ, দুই প্রভাবই পরিমাপ করে এবং এর মাধ্যমে।

x g y f z

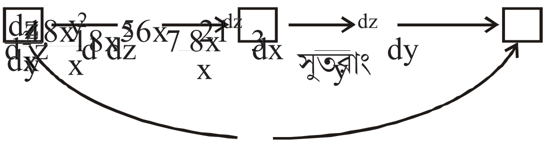
f

সুতরাং পূর্ণ অবকল হলো $\frac{dz}{dx} \quad z_x \quad z_y\frac{dy}{dx}$

উদাহরণ 7.9.2 : z = f(x, y) = 6x3 + 7y এর পূর্ণ অবকল নির্ণয় করো, যেখানে y = g(x) = 4x² + 3x + 8.

সমাধান ঃ $\frac{dz}{dx} \quad z_x \quad z_y\frac{dy}{dx}$

$z_x \quad 18x^2,\ z_y = 7,\ \frac{dy}{dx} \quad 8x \quad 3$



7.9.3 দ্বিতীয় ক্রমের পূর্ণ অন্তরকলজ (Second Order total differentials)

আগের অধ্যায়ে বা পাঠে দেখা গেল Z = f(x, y) এর ক্ষেত্রে $dz = Z_x dx + Z_y dy$ যাকে আবার $f_x d_x + f_y d_y$ ভাবেও প্রকাশ করা যায়। এমন dz নির্ভর করে fx ও fy এর উপর, যেখানে fx আর fy উভয়েই x ও y এর উপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ dz, Z এর মতোই x ও y এর উপর নির্ভরশীল।

$$\overline{\ \ }_{x}\ fx^{dx} \quad fy^{dy}\ dx \quad \overline{\ \ }_{y}\ fx^{dx} \quad fy^{dy}\ dy$$

$$fxx^{dx} \quad fxy^{dy}\ dx \quad fxy^{dx} \quad fyy^{dy}\ dy$$

$fxx^{dx^2} \quad fxy^{dydx} \quad fyx^{dxdy} \quad fyy^{dy^2}$

$fxx^{dx^2} \quad 2fyx^{dxdy} \quad fyy^{dy^2} \; fxy \quad fyx$

এই d^2z একটি দ্বিঘাত গঠনের প্রকাশ। এর চিহ্ন ধনাত্মক, ঋণাত্মক, কঠোর ধনাত্মক বা কঠোর ঋণাত্মক, হতে পারে dx ও dy এর যে কোনো মানের জন্য (arbetrary), যেখানে উভয়েই শূণ্য নয় একসাথে, কিছু নির্দিষ্ট নিয়মের ভিত্তিতে। ধরা যাক $u = dx$, $v = dy$, $a = f_{xx}$, $b = f_{yy}$, $n = f_{xy}$ $(= f_{yx})$.

সুতরাং $d^2z = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2$ বা $q = au^2 + 2huv + bv^2$ হলো q এর u এবং v রাশিভিত্তিক দ্বিঘাতরূপ। লক্ষ্য করলে দেখা যাবে এখানে $dx = u$ এবং $dy = v$, চলরাশি হিসাবে প্রকাশ পায় এবং দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অবকলগুলি স্থির রাশি হচ্ছে।

এবার নিম্নপ্রদত্ত a, b ও h এর উপর বাধা আরোপের ফলে, এবং যেখানে u ও v যে কোনো মান নিতে পারবে, সেই অবস্থায় q এর কি নির্দিষ্ট চিহ্ন হতে পারে তা গণ্য করা যাক। তা বিচার করার জন্য মনে রাখতে হবে ঃ

(ক) q ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে যদি q অবশ্যই ধনাত্মক বা $q > 0$ হয়।

(খ) q ধনাত্মক আধানির্দিষ্ট হবে যদি $q > 0$ হয়।

(গ) q ঋণাত্মক আধানির্দিষ্ট হবে যদি $q < 0$ হয়।

(ঘ) q ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হয় যদি $q < 0$ হয়।

যদি চলরাশিগুলি বিভিন্নরকম মান নেয় তাহলে q অনির্দিষ্ট হবে। (If q changes sign when the variables assured different values, it is said to be indefinite).

এই ধনাত্মক বা ঋণাত্মক নির্দিষ্টতা, চরম বা অবম মান নির্বাচন সংক্রান্ত দ্বিতীয় বর্গীয় যথেষ্ট শর্তের সঙ্গে সম্পর্কযুক্ত। আবার আধানির্দিষ্টতা, দ্বিতীয় বর্গীয় যথেষ্ট শর্তের সঙ্গে সম্পর্কিত। যখন $q = d^2z$ অনির্দিষ্ট হয় তখন স্যাডেল বিন্দু (saddle point) বা জিন বিন্দু দেখা যায়।

7.10 চিহ্ন নির্দিষ্টকরণের নির্ণায়ক পরীক্ষা

আমরা দেখেছি যে $q = au^2 + 2huv + bv^2$ এই সমীকরণে ৱযদি ডানদিকে যথাক্রমে যোগ ও বিয়োগ করা যায় তাহলে হবে

$$q \quad au^2 \quad 2huv \quad \frac{h^2}{a}v^2 \quad bv^2 - \frac{h^2}{a}v^2$$

$$a\ u^2 \quad \frac{2h}{a}uv \quad \frac{h^2}{a}v^2 \qquad b - \frac{h^2}{a}v^2$$

অর্থাৎ q ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে কেবলমাত্র যদি $a > 0$ এবং $ab - h^2 > 0$ হয়। আবার q ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হবে কেবলমাত্র যদি $a < 0$ এবং $ab - h^2 > 0$ হয়। সুতরাং উভয় ক্ষেত্রেই $(ab - h^2)$ কে ধনাত্মক হতেই হবে। সেটা একমাত্র সম্ভব হতেই হবে। সেটা একমাত্র সম্ভব যদি ab ধনাত্মক হয়। আবার a ও b যদি একই চিহ্নযুক্ত হয় তবেই ab ধনাত্মক হবে।

উপরিউক্ত শর্তগুলি নির্ণায়কের মাধ্যমে প্রকাশ করা সম্ভব।

$q = au^2 + 2huv + bv^2$

$\quad = au^2 + h(av) + h(vu) + bv^2$

এই সমীকরণটি সহগগুলি একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্স (symmetric matrix) গঠন করে, যার মুখ্য কর্ণে থাকবে a ও b অন্য স্থাস্তেন বা off diagonal এ থাকবে h। অর্থাৎ

$$\begin{vmatrix} a & h \\ n & b \end{vmatrix} \; a\ u \quad \frac{h}{a}\,0v^{2} \quad \frac{ab-h^2}{a}v^2 \quad q \quad u \quad v \quad \begin{matrix} a & h & u \\ h & b & v \end{matrix}$$

সহগ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক কে বলা হয় q এর নিরূপক (discriminant) বা |D|। তাহলে পূর্বে বর্ণিত q এর, a, b ও h ভিত্তিক চিহ্নকে এভাবেও বলা যাবে যে ঃ

(ক) q ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে কেবলমাত্র যদি $|a| > 0$ ও হয়।

(খ) q ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হবে কেবলমাত্র যদি $|a| < 0$ বা হয়।

যেখানে |a| হলো প্রথম নেতৃস্থানীয় মুখ্য মাইনর (first leading principal minor) এবং হলো দ্বিতীয় নেতৃস্থানীয় মুখ্য মাইনর।

এবার d^2z এ প্রতিস্থাপন করলে পাওয়া যায় ঃ

(ক) d^2z হবে ধনাত্মক নির্দিষ্ট যদি $fxx > 0$ ও

(খ) d^2z হবে ঋণাত্মক নির্দিষ্ট যদি $fxx < 0$ এবং হয়।

তখনই সম্ভব যদি fxx ও fxy একই চিহ্নযুক্ত হয়।

এই অধ্যায়ে আলোচিত হেসিয়াল নিরূপকের সংজ্ঞানুসারে যেখানে $fyx = fxy$ ইয়ং উপপাদ্যর ভিত্তিতে।

উদাহরণ 7.10.1 ঃ যদি $fxx = -4$, $fxy = 3$, $fyy = -8$, $z = f(x, y)$ এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে হয়, তাহলে d^2z এর, dx ও dy এর যাই মান হোক না কেন কোনো নির্দিষ্ট চিহ্ন (definite sign) থাকতে পারে?

সমাধান ঃ d^2z এর নিরূপক হলো ঃ $\begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fxy & fyy \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix}$

যেখানে নেতৃস্থানীয় মুখ্য মাইনররা হলো $-4 < 0$ এবং $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 32-9 \\ 23 \quad 0 \end{matrix}$

সুতরাং d^2z হলো ঋণাত্মক নির্দিষ্ট।

7.11 সংক্ষিপ্তসার

এই অধ্যায়ে আলোচনা করা হলো প্রধানতঃ দুই চলরাশিবিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে লেখচিত্রটির আকার কিরূপ হয়। একে লেভেল রেখার মাধ্যমে সহজে কিভাবে প্রকাশ করা হয়। পরবর্তী পর্যায়ে দুই স্বাধীন চলরাশিভিত্তিক অপেক্ষকের ক্ষেত্রে আংশিক অবকল নির্ণয় করা এবং অর্থনৈতিক ক্ষেত্রে তার প্রয়োগ দেখানো হয়েছে। পরিশেষে পূর্ণ অন্তরকলজর ধারণা দেওয়া হয়েছে ও এই ধরণের অপেক্ষকগুলির দ্বিঘাত প্রকাশ বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

7.12 প্রশ্নাবলী

১। নীচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির পূর্ণমান-২

(ক) লেভেল রেখা কাকে বলে?

(খ) যদি $f(x, y) = x + 4y$ হয় তবে $f(0, 1)$ কত হবে?

(গ) আংশিক অবকল কাকে বলে?

(ঘ) পূর্ণ অবকল কাকে বলে?

(ঙ) ইয়ং উপপাদ্য বিবৃত করো।

২। নীচের প্রশ্নের প্রতিটির মান ৫ নম্বর।

(ক) দেখাও যে $x^2 + y^2 = 6$ হলো $f(x, y) =$ এর একটি লেভেল রেখা।

(খ) যদি $f(x, y) = x^3e^{y2}$ হয় তাহলে $(x, y) = (1, 0)$ তে প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অবকলগুলি নির্ণয় করো।

(গ) যদি $2 = (x + y)2$ হয় তবে ও এর মান কত হবে?

(ঘ) নীচের অপেক্ষকগুলির গ্র্যাডিয়েন্ট ও হেসিয়াম ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো ঃ

(i) $f(x, y) = x^3eny + 6x^2y^2 + e^2xy$

(ii) $f(x, y) = (x + 4y)(e^{-2x} + e^{-30})$

৩। নীচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির মান ২০ নম্বর ঃ

(ক) একজন একচেটিয়া কারবারী X ও Y দ্রব্যের যথাক্রমে x ও y একক পরিমাণ বিক্রয় করে। X ও Y দ্রব্যের দাম যথাক্রমে Px ও Py যেখানে $Px = 25 - 2x + y$ ও $Py = 20 + x - y$। কারবারীর মোট আয় ও প্রান্তিক আয় নির্ণয় করো।

$\sqrt{x^2 \quad y^2} - x^2 - y^2 \quad 2$

(খ) নীচের অপেক্ষকটির গ্র্যাডিয়েন্ট ভেক্টর ও হেসিয়ান ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করো ও $(1, -2)$ বিন্দুতে তার মান নির্ণয় মান করো ঃ

$f(x, y) = 3x^2y^3 + 2x^3y^2$

(গ) নীচের অপেক্ষকগুলির সকল প্রথম ও দ্বিতীয় বর্গীয় আংশিক অবকলগুলি নির্ণয় করো ঃ

(i) $Z = xy^2 - e^{xy}$ (ii) $Z = x^y$

(ঘ) একজন ভোক্তা X দ্রব্যের x একক এবং Y দ্রব্যের y একক ভোগ করে এবং এক্ষেত্রে তার তৃপ্তির অপেক্ষক $(x, y) = 2 \ln x + 4 \ln y$ ধরা যাক ভোক্তা প্রথম দ্রব্যের 20 একক এবং দ্বিতীয় দ্রব্যের 30 একক ভোগ করে।

(i) প্রথম দ্রব্যের অতিরিক্ত এক একক ভোগের জন্য তার কতোটা তৃপ্তি বৃদ্ধি পাবে?

(ii) দ্বিতীয় দ্রব্যের অতিরিক্ত এক একক ভোগের জন্য তার কতটা তৃপ্তি বৃদ্ধি পাবে?

(ঙ) নীচের দ্বিঘাত রূপগুলি তাদের সহগের প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের গঠনের ভিত্তিতে প্রকাশ করো। (Express each of the following quadratic forms as a matrix product involving a

symmetric coefficient matrix.) ওই প্রতিসম সহগ ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক ভিত্তিক পরীক্ষার মাধ্যমে সিদ্ধান্ত করো দ্বিঘাত রূপগুলি ধনাত্মক নির্দিষ্ট বা ঋণাত্মক নির্দিষ্ট।

(i) $q = 3u^2 - 4uv + 7v^2$

(ii) $q = 6xy - 5y^2 - 2x^2$

7.13 গ্রন্থপঞ্জী

1. Allen, R.G.D. : (1938) Mathematical Analysis for Economists, Macmillan and Co. Ltd.
2. Hay M ; Lwernous J ; Mckenna C, Rees R. Stengos T : (2001) : Mathematics for Economics, the MIT Press.
3. Courant, R : (1937) Differential and Integral Calculas, Interscience Publishers, Inc.

একক 8 ❑ বহুচলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের পরম অবস্থা–I

গঠন

8.1 উদ্দেশ্য

8.2 প্রস্তাবনা

8.3 উত্তল অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য

8.3.1 সংজ্ঞা

8.4 জ্যামিতিক পদ্ধতিতে উত্তলতার ধারণা

8.5 উত্তল অপেক্ষকের ধারণা

8.6 দ্বিচলকবিশিষ্ট অবকলনযোগ্য অপেক্ষকের ক্ষেত্রে উত্তলতার সংজ্ঞা

8.7 বহুচলকবিশিষ্ট উত্তল অপেক্ষকের উদাহরণ

8.8 উত্তল অপেক্ষকের ধর্ম

8.9 উত্তল অপেক্ষকের প্রয়োগ

8.10 সংক্ষিপ্তসার

8.11 প্রশ্নাবলী

8.12 গ্রন্থপঞ্জি

8.1 উদ্দেশ্য

এই অধ্যায় পাঠে অপেক্ষকের চরিত্র, প্রকৃতি এবং তার সর্বোচ্চ সীমায় পৌঁছানোর আবশ্যকীয় শর্তাবলী জানা যাবে।

8.2 প্রস্তাবনা

একটি প্রদত্ত অর্থনৈতিক এককের (unit) সাম্যাবস্থায় পৌঁছানো বলতে পরম মান (Optimum) পৌঁছানো বোঝায়। এই পরম মান কিভাবে নির্ধারণ করা যাবে বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষকের ভিত্তিতে তা দেখানো হয়েছে।

8.3 উত্তল অপেক্ষকের বৈশিষ্ট্য

উত্তল অপেক্ষকের (convex function) বৈশিষ্ট্য বোঝার আগে উত্তল অপেক্ষকের ধারণাটির সুস্পষ্ট ব্যাখ্যা আবশ্যক।

8.3.1 সংজ্ঞা ঃ

প্রথম সংজ্ঞা ঃ একটি অপেক্ষক উত্তল হবে যদি এর ডোমেইন (Domain) একটি উত্তল সেট হয় এবং এই ডোমেইনের সকল x, y এর জন্য এবং সকল এর জন্য হয়।

অর্থাৎ যদি কোনো অপেক্ষকের উপর x, y দুটি বিন্দু নেওয়া হয়, তাহলে এদের যে কোনো উত্তল মিশ্রণেই (convex combination) f এর মান নির্ণয় করা হোক না কেন, তা কোনো ভাবেই f(x) ও f(y) এর একই উত্তল সংমিশ্রণ অপেক্ষা বেশী হবে না। জ্যামিতিক অর্থে, (x, f(x)) ও (x, f (y)) এর সংযুক্তি রেখা f এর রেখাচিত্রের উপরে অবশ্যই অবস্থান করবে। চিত্র নং 8.1 এ এটা দেখানো হলো।

y y(x)

$f(x^{11})$

$\bar{f}$

x

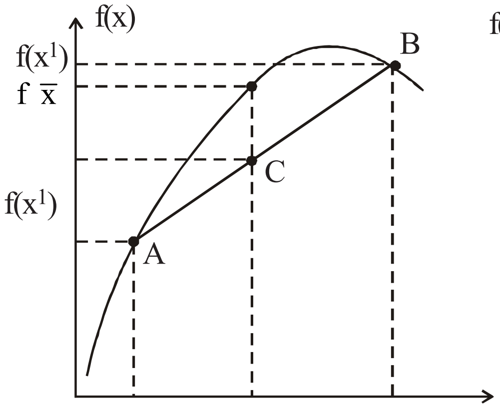
চিত্র 8.1

এখানে রেখার উপরিস্থিত বিন্দুদ্বয় হলো ও এবং ।

যদি অসমচিহ্ন কঠিন হয় (strict enequality) হয় অর্থাৎ হয় তাহলে f(x) রেখা চরম বা কঠিনভাবে উত্তল হবে (strictly convex)। যে রেখাচিত্র চিত্র 8.1 এ দেখানো হয়েছে সেটি চরম উত্তল রেখা।

একইভাবে f যদি উত্তল হয় তবে –f হবে অবতল।

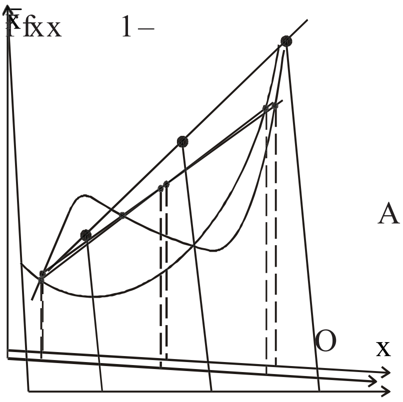
নীচের চিত্রে (চিত্র 8.2) চার ধরনের অপেক্ষকের রেখাচিত্র দেখানো হল।



f(x)

(8.2a) (8.2b)

f(x) f(x)



B

C

A

x1 x O x x1

(8.2 c) (8.2 d)

চিত্র 8.2a তে লক্ষণীয় এই যে যদি ওই রেখাচিত্রটির উপর x^0 ও x^1 যে কোনো দুটি বিন্দু নেওয়া হয়, এবং তাদের প্রতিষঙ্গিক অপেক্ষক মান (corresponding function values) যথাক্রমে $f(x^0)$ ও $f(x^1)$ কে একটি সরলরেখার মাধ্যমে যুক্ত করা হয়, তাহলে এই দুটি মানের মধ্যে অবস্থিত অপেক্ষকটির রেখাচিত্র সম্পূর্ণরূপে উক্ত সরলরেখা বা জ্যা-এর উপর (chord to the function) অবস্থান করবে। এক্ষেত্রে রেখাচিত্রটি অবতল অপেক্ষক নির্দেশ করবে। চিত্র 8.2b র ক্ষেত্রে ঠিক উল্টো ঘটনা হবে এবং ঐ রেখাচিত্রটি উত্তল হবে।

চিত্র 8.2c এর ক্ষেত্রে অপেক্ষকটির রেখাচিত্র সম্পূর্ণরূপে সরলরেখাটির সাথে মিশে যাবে। এই ক্ষেত্রে রেখাচিত্রই সরলরেখা বা linear হবে। আবার চিত্র 8.2d তে অবতল ও উত্তল দুটি ক্ষেত্রেই লক্ষ্য করা যায়।

এক্ষেত্রে দুটি বিষয় আলোচনা করা আবশ্যক।

(১) x^0 ও x^1 এই বিন্দুর মধ্যে অবস্থিত x এর যে কোনো মান কে x^0 ও x^1 এর ভরযুক্ত গড় (weighted average) হিসাবে প্রকাশ করা যাবে। অর্থাৎ যেখানে হবে। হলো x^0 ও x^1 এর উত্তল সংমিশ্রণ (convex combination)।

(২) যদি $f(x^0)$ ও $f(x^1)$ এই দুই অপেক্ষক মানের ভরযুক্ত গড় নেওয়া যায় λ এর একই মানের ভিত্তিতে, এবং এই ভরযুক্ত গড়কে দিয়ে সূচিত করা যায়। তাহলে এই কে বরাবর, AB জ্যায়ের উপর অবস্থিত C বিন্দুতে বা উল্লম্ব অক্ষে পরিমাপ করতে হবে।

অবতল অপেক্ষকের ক্ষেত্রে $\overline{f}(x) \geq \overline{f}$ হয় এবং কঠোরভাবে অবতল অপেক্ষকের ক্ষেত্রে হবে। x^0 এবং x^1 এর মধ্যে যে কোনো বিন্দুতে x এর অবস্থান হলে। যখন অপেক্ষকটি রৈখিক (linear) হবে তখন হবে (চিত্র 8.2c)।

উদাহরণ 8.3.1 ঃ দেখাও যে $f(x) = x^2$ একটি উত্তল অপেক্ষক।

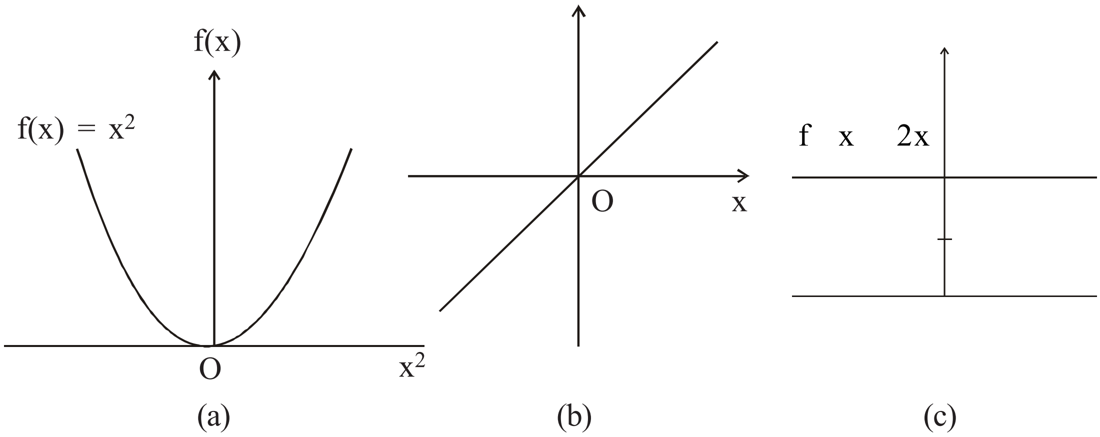
ধরা যাক [c, d] C I, (I হলো interval বা পরিসর) এবং $O < t < 1$.

$$f[(1-t)C + td] = (1-t)^2 c^2 + 2t(1-t)cd + t^2d^2$$
$$= (1-t)c^2 - t(1-t)c^2 + 2t(1-t)cd + t^2d^2$$
$$= (1-t)c^2 - t(1-t)c\,(2d-c) + t^2d^2 - td^2 + td^2$$
$$= (1-t)c^2 - t(1-t)(c-d)^2 + td^2 < (1-t)c^2 + td^2$$

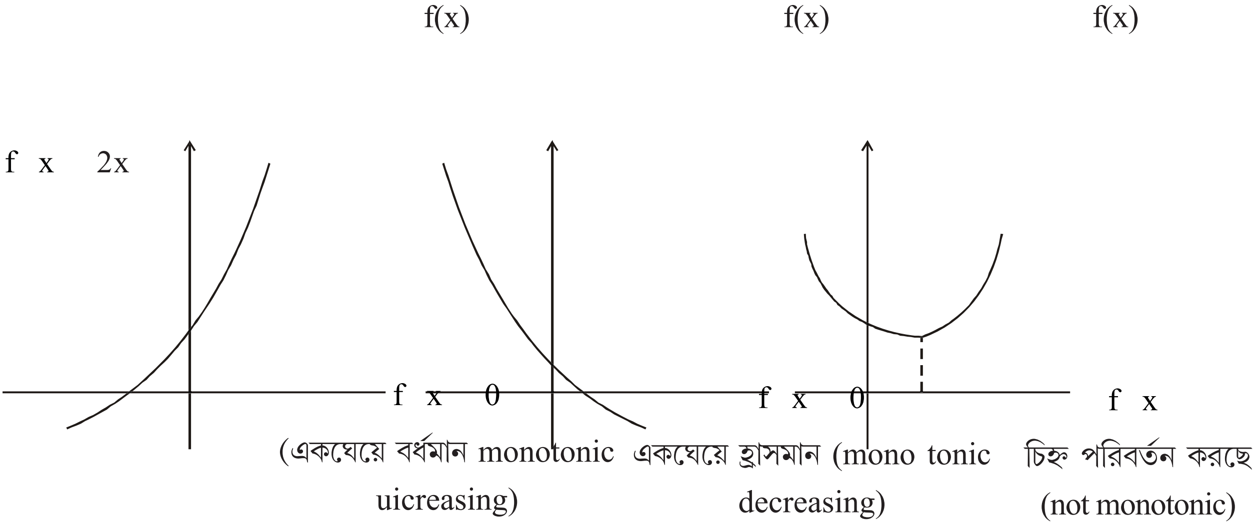
$\therefore\ f(x) = x^2$ হলো উত্তল অপেক্ষক।

8.4 জ্যামিতিক পদ্ধতিতে উত্তলতার ধারণা ঃ

যদি f(x) পরপর দুইবার অন্তরকলনযোগ্য হয় (twice differentiable function) তবে সেটা উত্তল হবে যদি তার ক্ষেত্রের (domain) প্রতিটি বিন্দুতে $f''(x) > 0$ হয়। পরপর দুইবার অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক f(x) কঠোরভাবে উত্তল হবে যদি $f(x) > 0$ হয়, সম্ভবতঃ কোনো একক বিন্দু ছাড়া (except possibly at a single point) একটি রৈখিক অপেক্ষক ও উত্তলতার সংজ্ঞা অনুসারে উত্তল। চিত্র 8.3 এর সাহায্যে উত্তলতা এবং ক্রমাগত বর্ধমান, হ্রাসমান ও একঘেয়ে নয় (monotonic increasing, monotonic decreasing and not monotonic) এমন অপেক্ষকের ক্ষেত্রে উত্তল অপেক্ষকের ধারণা স্পষ্ট করা হলো।



চিত্র 8.3 (i) $f\ x\ x^2, x\ \ \mathbb{R}$ এবং তার প্রথম দুই অবকল



চিত্র 8.3 (ii) কঠোরভাবে উত্তল অপেক্ষকের সম্ভাব্য গঠন।

চিত্র 8.3 (i) এ কঠোরভাবে উত্তল অপেক্ষকটি $f(x) = x^2$ তার পরস্পর দুই অবকলের চিত্র সহযোগে দেখানো হয়েছে। দ্বিতীয় অবকলটি সম্পূর্ণরূপে ধনাত্মক। যদি $f(x) = x^4$ হয় তাহলে $f''(x) = 12x^2$ হবে, তবে এক্ষেত্রে $f''(x)$ ধনাত্মক হবে যদি $x = 0$ হয়। সেইজন্য কঠোরভাবে উত্তল অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সংজ্ঞাটিকে বলা হয় $f(x) > 0$ কেবলমাত্র সম্ভবত একটি বিন্দু ব্যতীত ($f''(x) > 0$ except at one point)।

চিত্র 8.3 (ii) কঠোরভাবে উত্তল অপেক্ষক দেখানো হয়েছে যেখানে অপেক্ষকটি একঘেয়েভাবে বর্ধমান, হ্রাসমান ও একঘেয়ে নয়।

যদি f(x) এই অপেক্ষকটি দুবার অবকলনযোগ্য হয় (twice differentiable) তবে তা অবতল হবে যদি f(x) < 0 হয় এর ক্ষেত্রের প্রতিটি বিন্দুর জন্য এবং f কঠোরভাবে অবতল হবে যদি f(x) < 0 হবে এর ক্ষেত্রের কেবলমাত্র সম্ভবতঃ একটি বিন্দু ব্যতীত সবকটি বিন্দুতে।

উদাহরণ 8.4.1 ঃ $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)x^3 + 3x^2 - 5x + 10$ যেখানে x > 0

উক্ত অপেক্ষকটির চিত্র বর্ণনা করো ও আকৃতির ব্যাখ্যা করো।

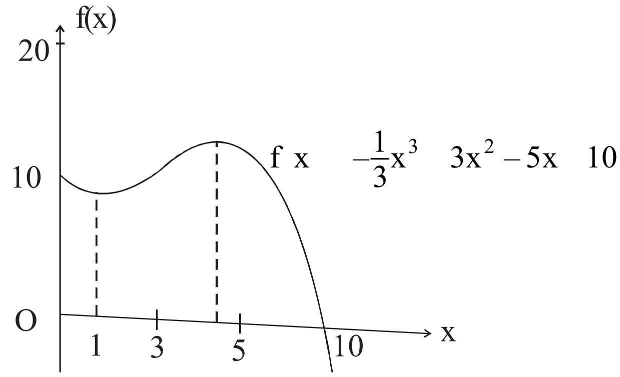
সমাধান ঃ $f'(x) = -x^2 + 6x - 5$ এবং $f''(x) = -2x + 6$ যেহেতু x < 3 হলে $f''(x) > 0$ এবং x > 3 হলে $f''(x) < 0$, সুতরাং [0, 3] এই পরিসরে (interval) অপেক্ষকটি কঠোরভাবে উত্তর এবং [3, + ∞) এই পরিসরে কঠোরভাবে অবতল। নীচের সারণটিতে x = 0, 1, ..., 8 এই মানগুলির জন্য অপেক্ষকটির মান ও তার প্রাতিষঙ্গিক প্রথম ও দ্বিতীয় অবকলনের মান প্রদত্ত হলো।

x	f(x)	f′(x)	f″(x)
0	10.00	–5.00	6.00
1	7.67	0.00	4.00
2	9.33	3.00	2.00
3	13.00	4.00	0.00
4	16.67	3.00	–2.00
5	18.33	0.00	–4.00
6	16.00	–5.00	–6.00
7	7.67	–12.00	–8.00
8	–8.67	–21.00	–10.00

$f'(x) = -(x-5)(x-1)$

লক্ষণীয় যে x এর যে বিন্দুতে $f'(x) = 0$ সেখানে অপেক্ষকটি বাড়বেও না। কমবে ও না এবং ওই বিন্দুতে flat থাকবে।

এখন উৎপাদন বিশ্লেষণ করলে $f'(x) = -(x-5)(x-1)$ $f'(x) = 0$ হবে x = 1 ও x = 5 হলে। এবং x < 3 হলে দ্বিতীয় অবকল ধনাত্মক হবে এবং রেখাটি উত্তল হবে এবং x > 3 হলে $f''(x) < 0$ হবে ও রেখাটি অবতল হবে।



চিত্র 8.4

উদাহরণ 8.4.2 ঃ পরীক্ষা করো নিম্নলিখিত অপেক্ষকদ্বয় x = 3 বিন্দুতে উত্তল কি অবতল?

(ক) $y = -2x^3 + 4x^2 + 9x - 15$

(খ) $y = (5x^2 - 8)^2$

সমাধান ঃ (ক) $y'(x) = -6x2 + 8x + 9$

$y''(x) = 12x + 8$

$y''(3) = -12 \times 3 + 8 = -28 < 0$ অবতল।

(খ) $y'(x) = 2(5x^2 - 8)(10x)$

$= 20x(5x^2 - 8)$

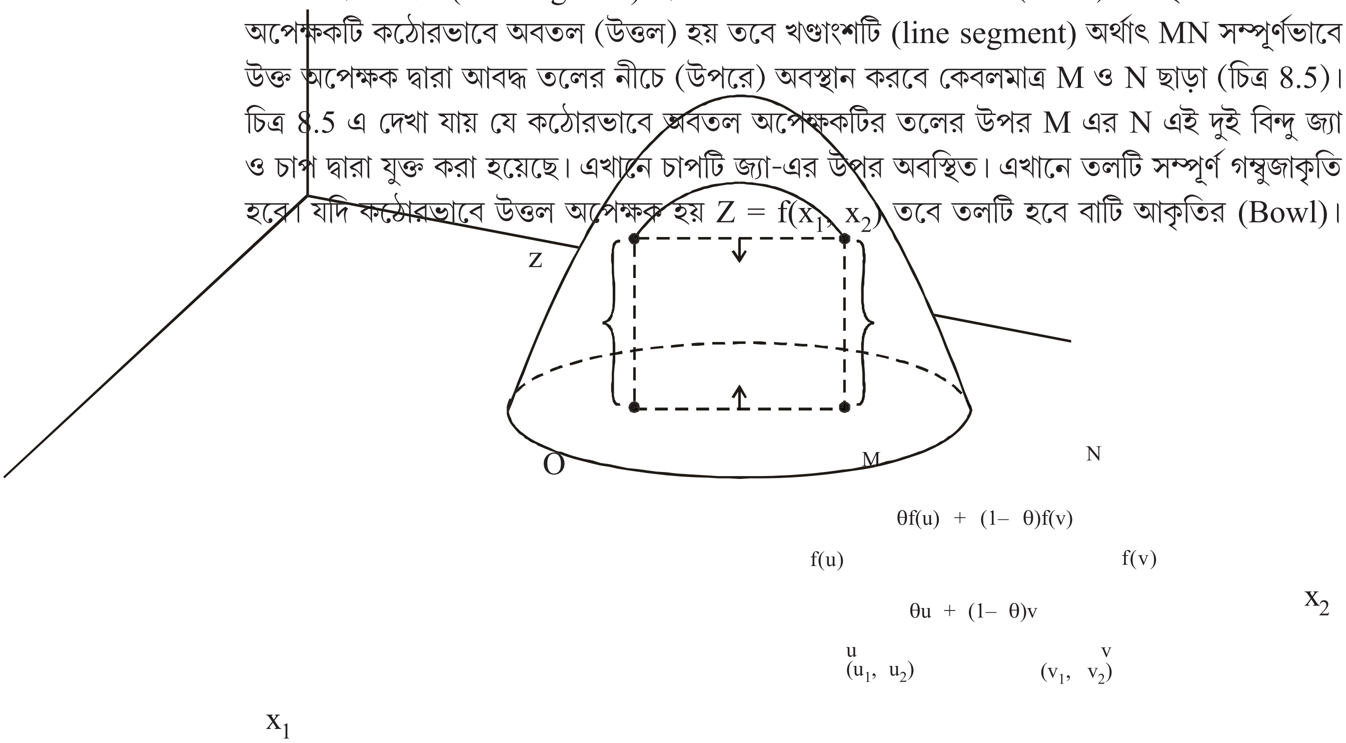
$= 100x^3 - 160x$

$y''(x) = 300x^2 - 160$

$y''(3) = 300 \times 9 - 160 = 2540 > 0$ উত্তল।

8.5 উত্তল অপেক্ষকের ধারণা

দ্বিচলক বিশিষ্ট অপেক্ষক $z = f(x_1, x_2)$ এর ক্ষেত্রে বলা যায় যে, সেটি অবতল (উত্তল) হবে কেবলমাত্র যদি, যে কোনো দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু M এবং N, অপেক্ষকটির তলে (surface) নেওয়া যায়, তবে MN এই খণ্ডাংশ (line segment) হয় উক্ত তলের উপর বা নীচে (উপরে) অবস্থান করবে। যদি অপেক্ষকটি কঠোরভাবে অবতল (উত্তল) হয় তবে খণ্ডাংশটি (line segment) অর্থাৎ MN সম্পূর্ণভাবে উক্ত অপেক্ষক দ্বারা আবদ্ধ তলের নীচে (উপরে) অবস্থান করবে কেবলমাত্র M ও N ছাড়া (চিত্র 8.5)। চিত্র 8.5 এ দেখা যায় যে কঠোরভাবে অবতল অপেক্ষকটির তলের উপর M এর N এই দুই বিন্দু জ্যা ও চাপ দ্বারা যুক্ত করা হয়েছে। এখানে চাপটি জ্যা-এর উপর অবস্থিত। এখানে তলটি সম্পূর্ণ গম্বুজাকৃতি হবে। যদি কঠোরভাবে উত্তল অপেক্ষক হয় $Z = f(x_1, x_2)$ তবে তলটি হবে বাটি আকৃতির (Bowl)।



চিত্র 8.5

যদি $u = (u_1, u_2)$ এবং $v = (v_1, v_2)$, $z = f(x_1, x_2)$ এর ক্ষেত্রে বা ডোমেইনে দুটি সুস্পষ্ট ক্রমিক জোড় (Ordered pair) তাহলে এই u ও v এর প্রাতিষঙ্গিক z এর মান বা পৃষ্ঠতলের উচ্চতা (height of surface) হবে $f(u) = f(u_1, u_2)$ ও $f(v) = f(v_1, v_2)$ যথাক্রমে। যেহেতু চলক দুটির প্রকৃত মান ধরা হয়েছে (real value) সুতরাং uv রেখাংশতে অবস্থিত সকল বিন্দুই z এর ডোমেইনে থাকবে। এবার উক্ত রেখাংশটিকে u ও v এর ভরযুক্ত গড় বলা যাবে এবং একে $Qu + (1 - \theta)v$ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে যেখানে Q একটি স্কেলার যার মান 0 এবং 1 এর মধ্যে থাকবে বা $0 < Q < 1$ আবার MN রেখাংশ, f(u) ও f(v) র ভরযুক্ত গড়কে একইভাবে প্রকাশ করা যাবে বা $Qf(u) + (1 - \theta) f(v)$ হিসাবে লেখা যাবে যেখানে $0 < Q < 1$ হবে। এখন MN রেখা দ্বারা আবদ্ধ চাপ (arc) নির্দেশ করে uv এই রেখাংশটির বিভিন্ন বিন্দুতে f অপেক্ষকটির মান অর্থাৎ $f[Qu +(1 - \theta) v]$। সুতরাং বীজগাণিতিক পদ্ধতি অবলম্বনে দেখা যাবে ঃ একটি অপেক্ষক অবতল বা উত্তল হবে কেবলমাত্র তখনই, যখন (iff) f এর ডোমেইনে যে কোনো দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু u, এবং v এর জোড়ার জন্য এবং $0 < Q < 1$ এর জন্য।

$$\theta f(u) + (1-\theta) f(v) \le \underbrace{f}[\theta(u) + (1-\theta)v]$$

রেখাংশের উচ্চতা জ্যামের উচ্চতা

(এটি অবতল অপেক্ষকের শর্ত)

অথবা (এটি উত্তল অপেক্ষকের শর্ত) ....(১)

উদাহরণ 8.5.1 ঃ $z = x_1^2 + x_2^2$ অপেক্ষকটি উত্তল বা অবতল পরীক্ষা করো।

সমাধান ঃ ধরা যাক $u = (u_1, u_2)$ এবং $v = (v_1, v_2)$ z এর ক্ষেত্রে দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

$f(u) = f(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$

$f(v) = f(v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2$

এবং

$\underbrace{}_{}x_1$ এর মান $\underbrace{}_{}x_2$ এর মান

উত্তল বা অবতলের সংজ্ঞা অবলম্বনে (১) এ বসিয়ে ডানদিকের পদকে বাঁদিকের থেকে বিয়োগ এবং সরল করলে পাওয়া যাবে ঃ

$$\theta(1-\theta)(u_1^2 + v_2^2) + \theta(1-\theta)(v_1^2 + v_2^2) - 2\theta(1-\theta)(u_1 v_1 + u_2 v_2)$$

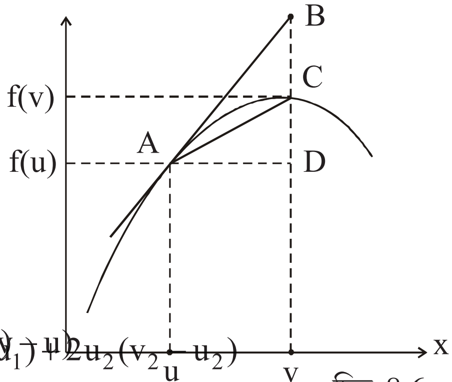
$$= \theta(1-\theta)[(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2] > 0$$

যেহেতু ও $(1 - \theta)$ উভয়েই ধনাত্মক। যেহেতু (u_1, u_2) ও (v_1, v_2) দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু যাতে হয় $u_1 = v_1$ বা $u_2 \neq v_2$ (অথবা উভয়ই), সুতরাং বন্ধনীর মধ্যের পদকে (expression) ধনাত্মক হতেই হবে। ∴ কঠোরভাবে > 0 অসম চিহ্ন নির্দেশ করবে $z = x_1^2 + x_2^2$ একটি কঠোরভাবে উত্তল অপেক্ষক।

8.6 দ্বিচলকবিশিষ্ট অবকলনযোগ্য অপেক্ষকের ক্ষেত্রে উত্তলতর সংজ্ঞা

কোনো অবকলনযোগ্য অপেক্ষক $f(x)$ অবতল হবে যদি একটি প্রদত্ত বিন্দু u এবং অপর যে কোনো বিন্দু v এর জন্য $f(v) < f(u) + f'(u)(v - u)$ হবে এবং উত্তল হবে যদি $f(v) > f(u) + f'(u)(v - u)$ হয়।

চিত্র 8.6 যে রেখাচিত্রটি অঙ্কিত হয়েছে ধরা যাক A হলো ওই রেখাচিত্রের উপরিস্থিত একটি বিন্দু। A বিন্দুর উচ্চতা হলো $f(u)$ এবং A বিন্দু বরাবর রেখাচিত্রের উপর AB স্পর্শক অবস্থান করছে। ধরা যাক x এর মান u থেকে বৃদ্ধি পায়। তাহলে রেখাচিত্রটি যদি কঠোর অবতল হয়, তাহলে একটি পাহাড়ের আকৃতির মত রেখাটি AB স্পর্শক থেকে বেঁকে যাবে এমনভাবে, যাতে C বিন্দু, যার উচ্চতা $f(v)$, সেটি B বিন্দুর নীচে থাকে। এক্ষেত্রে AC এই রেখাংশটির নতি, AB এই স্পর্শকের তুলনায় কম হবে। যদি রেখাচিত্র কঠোর অবতল না হয় তবে AC এই চাপটি হয়তো কিছুটা সরলরেখাংশ হতে পারে এবং কিছুটা AB স্পর্শকের সঙ্গে এক হতে পারে। অর্থাৎ সেক্ষেত্রে, AC র নতি AB র নতির সঙ্গে সমান হয়। এই দুই অবস্থাকে একসাথে করে বলা যায় ঃ



চিত্র 8.6

AC রেখাংশের ঢাল $\frac{DC}{AD} = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq$ AB রেখার ঢাল $= f'(u)$

অথবা যা অবতল অপেক্ষক নির্দেশ করে।

অর্থাৎ যদি কোনো অপেক্ষক দুইবার ক্রমাগত অবকলনযোগ্য হয় তাহলে তার আংশিক অবকল বর্তমান থাকে, এবং d^2z সংজ্ঞায়িত হয়। এই অপেক্ষক অবতল যদি d^2z সর্বত্র ঋণাত্মক আধা নির্দিষ্ট (semi definite) হয়। যদি উক্ত অপেক্ষকটি কঠোর অবতল হয় তাহলে d^2z সর্বত্র ঋণাত্মক নির্দিষ্ট (negative definite) হবে। কঠোর উত্তলের ক্ষেত্রে d^2z ধনাত্মক নির্দিষ্ট এবং উত্তলের ক্ষেত্রে আধা ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে।

উদাহরণ ঃ এর অবকলন শর্ত অনুসারে উত্তলতা পরীক্ষা করো।

সমাধান ঃ ধরা যাক $u = (u_1, u_2)$ এবং $v = (v_1, v_2)$ দুটি বিন্দু।

সুতরাং উত্তল ও অবতলের সংজ্ঞা অবলম্বনে বামপক্ষ ঃ ,

ডানপক্ষ

ডানদিককে বাঁদিকের থেকে বাদ দিলে পাই ঃ

$$v_1^2 \quad 2v_1u_1 \quad u_1^2 \quad v_2^2 \quad 2v_2u_2 \quad u_2^2 \quad (v_1 \quad u_1)^2 \quad (v_2 \quad u_2)^2$$

যেহেতু এই বিয়োগফল সবসময় ধনাত্মক। কঠোর উত্তল। আবার যদি d^2z ধনাত্মক নির্দিষ্ট কিনা বিচার করা হয় তবে

এবং

$\therefore$ d^2z সর্বত্র ধনাত্মক নির্দিষ্ট ও উত্তল।

একচলক বিশিষ্ট উত্তল অপেক্ষকের উদাহরণ (Examples of univariate convex functions) :

(a) e^{ax} (b) $-\log(x)$ (c) x^a (এ সংজ্ঞায়িত); বা

(d) $-x^a$ (সংজ্ঞায়িত), $0 < a < 1$

(e)

(f) $x \log(x)$ (এ সংজ্ঞায়িত)।

8.7 বহুচলকবিশিষ্ট উত্তল অপেক্ষকের উদাহরণ

(a) অ্যাফাইন অপেক্ষক (Affine function) ঃ $f(x) = a^Tx + b$ যে কোনো ( ) অপেক্ষক উত্তল, কিন্তু কঠোর উত্তল নয়, আবার অবতলও।

অ্যাফাইন অপেক্ষক হলো একমাত্র অপেক্ষক যা একসঙ্গে উত্তল এবং অবতল হতে পারে।

(b) কিছু দ্বিঘাত অপেক্ষক (Some quadratic function) : $f(x) = x^TQx + C^Tx + d$

— উত্তল হবে কেবলমাত্র যদি $Q > 0$ হয়।

— কঠোর উত্তল কেবলমাত্র যদি $Q > 0$ হয়।

— অবতল কেবলমাত্র যদি $Q < 0$; এবং কঠোর উত্তল কেবলমাত্র যদি $Q < 0$ হয়।

(c) যে কোনো নর্ম (Any norm) : নর্ম হোলো এমন এক অপেক্ষক f যেখানে নিম্নলিখিত শর্তগুলি সাধিত হয়।

(a)

(b)

(c)

8.8 উত্তল অপেক্ষকের ধর্ম

উত্তল অপেক্ষকের ক্ষেত্রে নিম্ন উদ্ধৃত ধর্মগুলি লক্ষ্য করা যায়।

(ক) যদি কোনো অপেক্ষক উত্তল হয়, তবে f + g ও উত্তল হয়।

(খ) যদি উত্তল হয় এবং হয়, তবে λf ও উত্তল হবে।

(গ) প্রত্যেক রৈখিক (linear) বা অ্যাফাইন অপেক্ষক উত্তল হবে।

(ঘ) যদি f ও –f উভয়েই উত্তল হয়, তবে f একটি অ্যাফাইন অপেক্ষক হবে।

(ঙ) যদি f ও g উত্তল অপেক্ষক হয়, তবে h অপেক্ষক সেখানে h(x) = max{f(x), g(x)} ও উত্তল [illegible] হবে।

প্রথম ধর্মটির একটি প্রমাণ দেওয়া যাক। প্রমাণ করো যে যদি f(x) ও g(x) উভয়েই অবতল (উত্তল) হয়। যদি f(x) ও g(x) উভয়ই অবতল (উত্তল) এবং সেই সঙ্গে দুটির যে কোনোটি বা উভয়েই কঠোর অবতল (উত্তল) হয় তাহলে f(x) + g(x) কঠোর অবতল (কঠোর উত্তল) হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক f(x) ও g(x) উভয়েই অবতল।

সুতরাং ;

ও উভয়কে যোগ করলে পাওয়া যাবে ঃ

এটি [f(x) + g(x)] এর অবতল হওয়ার শর্ত।

এবার যদি f(x) কঠোর অবতল হয় তাহলে

হবে।

আবার একই পদ্ধতি অনুসরণ করে দেখা যাবে যে f(x) + g(x) কঠোর অবতল হবে। উত্তল অপেক্ষকের ক্ষেত্রে একই পদ্ধতিতে প্রমাণ করা হয়।

8.9 উত্তল অপেক্ষকের প্রয়োগ

গণিত এবং অর্থনীতিতে উত্তল অপেক্ষকের বহু প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়। বিশেষভাবে এই অপেক্ষক প্রযুক্ত হয় অপ্টিমাইজেশন আলোচনা করার ক্ষেত্রে। (Study of optimization) যেমন কোনো একটি মুক্ত সেটের উপর সংজ্ঞায়িত কোনো উত্তল অপেক্ষকের একটির বেশী ন্যূনতম মান থাকবে না।

নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি থেকে বহুচলকবিশিষ্ট অপেক্ষকের উত্তলতার বা অবতলতার প্রমাণ পাওয়া যাবে।

উদাহরণ 8.9.1 ঃ একটি কবডগলাস (Cobb Douglas) অপেক্ষক নেওয়া হলো যেখানে $K > 0$ ও $L > 0$। দেখাও যে এটি অবতল হবে যদি $A > 0$, $a > 0$, $b > 0$ এবং $a + b < 1$; এবং কঠোর অবতল হবে যদি $a > 0$, $b > 0$ ও $a + b < 1$.

সমাধান ঃ মনে রাখতে হবে যে দ্বিচলকবিশিষ্ট অপেক্ষক $z = f(x, y)$ এর ক্ষেত্রে, যার অবিচ্ছিন্ন আংশিক অবকল (Continuous partial derivatives) প্রথম ও দ্বিতীয় ক্রমে পাওয়া যায়, এবং যে অপেক্ষকটি একটি প্লেনে একটি মুক্ত উত্তল সেটের মধ্যে সংজ্ঞায়িত হয়েছে, তার ক্ষেত্রে

(ক) f অবতল হবে $\Leftrightarrow f_{22}^{11} \le 0\,; f_{22}^{11} \le 0,$ ও

(খ) f উত্তল হবে $\Leftrightarrow f''_{11} \ge 0, f''_{22} \ge 0$ ও

এই অসমতার চিহ্ন যখন কঠোর অসমতা হবে তখন যথাক্রমে কঠোর অবতল ও কঠোর উত্তল হবে।

এই ধর্মানুসারে $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$ কে পরীক্ষা করা হলো।

$$Y''_{KL} = Y''_{LK} = \alpha\beta AK^{\alpha-1}L^{\beta-1}$$

$$Y''_{LL} = \beta(\beta-1)AK^{\alpha}L^{\beta-2}$$

$$H = \begin{vmatrix} Y''_{KK} & Y''_{KL} \\ Y''_{LK} & Y''_{LL} \end{vmatrix} = \alpha(\alpha-1)AK^{\alpha-2}L^{\beta} \underset{AK^{\alpha}L^{\beta-2}}{\beta} (\beta-1).$$

$$-(\alpha\beta\, AK^{\alpha-1}, L^{\beta-1})^2$$

$$= \alpha\beta A^2K^{2\alpha-2}L^{2\beta-2}[(\alpha-1)(\beta-1)-\alpha\beta]$$

....(1)

যদি $A > 0$, $a' > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < 1$ হয় তবে $H > 0$; এবং $\alpha, \beta > 0$ ও $\alpha + \beta < 1$ হলে $H > 0$ সেই সঙ্গে ও হবে < 0 বা < 0।

উদাহরণ 8.9.2 ঃ একজন একচেটিয়া কারবারী নিম্ন উদ্ধৃত চাহিদা অপেক্ষকের সম্মুখীন হয় ঃ

$$Q_1 = 40 - 2P_1 + P_2$$

$$Q_2 = 15 + P_1 - P_2$$

অর্থাৎ $-2P_1 + P_2 = Q_1 - 40$

এবং $P_1 - P_2 = Q_2 - 15$

ক্রেমার নিয়মে, Q_1 ও Q_2 কে যদি প্যারামিটার ধরে P_1 ও P_2 কে বার করা যায়, তা হবে

$$P_1 = 55 - Q_1 - Q_2 = AR_1$$

$$P_2 = 70 - Q_1 - 2Q_2 = AR_2$$

মোট আয় $R = P_1Q_1 + P_2Q_2 = (55 - Q_1 - Q_2)\,Q1 + (70 - Q_1 - 2Q_2)Q_2$

$$= 55Q_1 + 70Q_2 - 2Q_1Q_2 - Q_1^2 - 2Q_2^2$$

সুতরাং লাভ $= \pi = R - C$

$$= 55Q_1 + 70Q_2 - 3Q_1Q_2 - 2Q_1^2 - 3Q_2^2$$

(যেখানে $C = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$)

$\pi_{12} = \pi_{21} = -3$

$$H = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{12} & \pi_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 15 > 0$$

$\pi_{11} = -4 < 0$

$\pi_{22} = -6 < 0$ হেসিয়ান কে H দিয়ে প্রকাশ করলে

সুতরাং মুনাফা অপেক্ষকটি কঠোর অবতল।

উদাহরণ 8.9.3 ঃ দেখাও যে (ক) $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ $(a, b, c > 0)$ একটি উত্তল অপেক্ষক (খ) $g(x, y, z) = e^{ax^2+by^2+cz^2}$ $(a, b, c \geq 0)$ একটি উত্তল অপেক্ষক।

সমাধান ঃ (ক) যেহেতু f হলো পৃথকভাবে তিনটে উত্তল অপেক্ষকের যোগফল সুতরাং f হলো উত্তল।

(খ) $g(x, y, z) = e^u$ যেখানে $u = ax^2 + by^2 + cz^2$ এখানে $u \rightarrow e^u$ এই রূপান্তরটি (transformation) এ u হলো উত্তল। যদি f(x) উত্তল ও F(u) উত্তল এবং বর্ধমান হয় তবে v(x) = F(f(x)) ও উত্তল হবে। উত্তলতার এই ধর্মানুসারে g উত্তল হবে।

8.10 সংক্ষিপ্তসার

সমগ্র অধ্যায়টিতে বহুচলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের উত্তলতার ধারণা, অপ্টোমাইজেশনের ধারণা ও শর্ত, আধা অবকল অপেক্ষক, রৈখিক প্রোগ্রামিং ইত্যাদি বিষয়ক আলোচনা করা হয়েছে।

8.11 অনুশীলনী

১। নীচের প্রশ্নের প্রতিটির মান 2 :

(ক) $z = (x_1 + x_2)^2$ অপেক্ষকটি কি উত্তল, অবতল, কঠোর উত্তল, কঠোর অবতল বা কোনোটিই না-এর মধ্যে কোনটি হবে দেখাও।

(খ) আধা উত্তলতা কাকে বলে?

(গ) দ্বৈততা সম্বন্ধীয় উপপাদ্য বিবৃত করো।

(ঘ) $y = 2x_1^2 + x_2^2$ এর স্থিতাবস্থা মান নির্ণয় করো (stationary values)

(ঙ) এনভেলপ উপপাদ্য বিবৃত করো।

২। নীচের প্রশ্নের প্রতিটির পূর্ণমান 5

(ক) a, b, c র মানের উপর কোন কোন শর্ত আরোপ করলে নীচের অপেক্ষকটি কঠোরভাবে অবতল হবে?

$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$

(খ) $Z = -x^2 + xy - y^2 + x + 5y$ এর চূড়ান্ত মান নির্ণয় করো এবং দেখাও যে তারা সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন?

(গ) বিচার করো $Z = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 3x^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$ এর চরম বা অবম মান আছে কিনা এবং থাকলে তার মান কত?

(ঘ) $f(x_1, x_2) = x_1^2\, x_2^3$ অপেক্ষকটি কি আধা অবতল? বিচার করো।

(ঙ) $f(x, y) = 60x + 34y - 4xy - 6x^2 - 3y^2 + 5$ এর সংকট বিন্দুগুলি (critical paints) নির্ণয় করো।

8.12 গ্রন্থপঞ্জি

1. Simon and Bluue
2. Renshaw
3. Chaing
4. Tekayana
5. Intrilligator M D (1971) : Mathematical optimisatiri and Economic Theory, Preutice Hall, Inc.

একক 9 ❑ বহুচলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের পরম অবস্থা-II

গঠন

9.1 উদ্দেশ্য

9.2 প্রস্তাবনা

9.3 অপ্টিমাইজেশনের শর্ত

9.4 সীমাবদ্ধ অপ্টিমাইজেশন সমস্যার বিশদ ব্যাখ্যা

9.5 সীমাবদ্ধ অপ্টিমাইজেশন ও অসমতাযুক্ত বাধা সমীকরণ

9.6 রৈখিক প্রোগ্রামিং

9.7 কিছু অতিরিক্ত বিষয়

9.8 আধা অবতল অপেক্ষক

9.9 আধা অবকলের বীজগাণিতক সংজ্ঞা

9.10 এনভেলপ উপপাদ্য

9.11 ল্যাগ্রাঞ্জ গুণাঙ্কের ব্যাখ্যা

9.12 সংক্ষিপ্তসার

9.13 প্রশ্নাবলী

9.14 গ্রন্থপঞ্জি

9.1 উদ্দেশ্য

এই অধ্যায় পাঠে অপেক্ষকের চরিত্র, প্রকৃতি এবং তার সর্বোচ্চ সীমায় পৌঁছানোর আবশ্যকীয় শর্তাবলী জানা যাবে।

9.2 প্রস্তাবনা

একটি প্রদত্ত অর্থনৈতিক এককের (unit) সাম্যাবস্থায় পৌঁছানো বলতে পরম মান (Optimum) পৌঁছানো বোঝায়। এই পরম মান কিভাবে নির্ধারণ করা যাবে বিভিন্ন ধরনের অপেক্ষকের ভিত্তিতে তা দেখানো হয়েছে।

9.3 সীমাহীন অপ্টিমাইজেশন

অর্থনীতিতে সীমাহীন অপ্টিমাইজেশনের ধারণা খুবই মৌলিক। যেমন চাহিদা তত্ত্বে আলোচিত হয় কিভাবে ভোক্তা তার ক্রয়ক্ষমতা দ্বারা সমর্থিত দ্রব্যগুচ্ছের মধ্যে তার সবচেয়ে পছন্দের দ্রব্যসংমিশ্রণ পছন্দ করতে পারে।

সংজ্ঞা ঃ অপ্টিমাইজেশন বা স্থানীয় প্রান্তিকমান বলতে বোঝায় কিছু প্রদত্ত সেটের মধ্যে সংজ্ঞায়িত অপেক্ষককে সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন করা। সীমাহীনভাবে এই সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্নকরণ বলতে বোঝায় যে যদি অপেক্ষকগুলি দুবার অবিচ্ছিন্নভাবে অবকলনযোগ্য হয় তবে $\mathbb{R}^n$ এর মধ্যে যে কোনো বিন্দুই সম্ভাব্য সমাধান যোগ হবে (By unconstrained optimisation problem it means that for functions which one twice continuously differentiable, any point in $\mathbb{R}^n$ is allowed to be a possible solution)

9.3.1 অপ্টিমাইজেশনের শর্ত ঃ

বহুচলক অপেক্ষক $Z = f(x, y)$ আপাত সর্বনিম্নতা বা সর্বাধিক মানে পৌঁছাবে নিম্নপ্রদত্ত শর্তগুলি সাধিত হলে ঃ

(i) প্রথম ক্রমের (first order) আংশিক অবকলগুলি একত্রে শূন্য হতে হবে। এর অর্থ হলো কোনো প্রদত্ত বিন্দু যাকে সংকট বিন্দু (critical point) বলা হয়, সেই বিন্দুতে অপেক্ষকটি তার মুখ্য অক্ষের সাপক্ষে বাড়বেও না এবং কমবেও না। কিন্তু একটি আপাত মালভূমিতে থাকবে। (but it at its relative plateau)

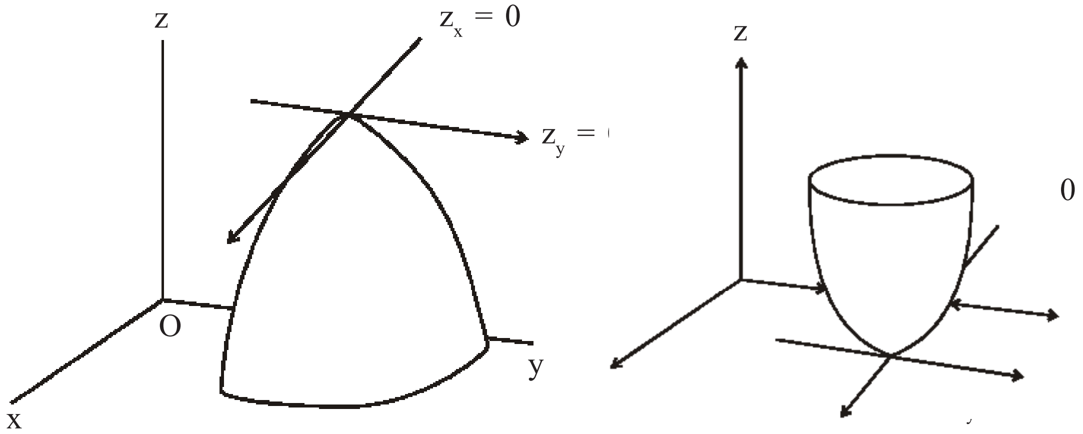
(ii) দ্বিতীয় ক্রমের প্রত্যক্ষ আংশিক অবকলগুলির (second order direct partial derivatives) যখন সংকট বিন্দু (a, b) তে মান নির্ণয় করা হয়, সেই মান অবশ্যই ঋণাত্মক হবে যদি অপেক্ষকটি আপাত সর্বোচ্চ স্থানে পৌঁছায় ও ধনাত্মক হবে যদি আপাত নিম্নতম স্থানে পৌঁছায়। এর অর্থ হলো যে ওই আপাত মালভূমি, (a, b) বিন্দু থেকে অপেক্ষকটি অবতল হয়ে মুখ্য অক্ষদুটির সাপেক্ষে নিম্নভিমুখী হয় যদি অপেক্ষক সর্বাধিক (maximum) বা চরম হয় এবং উত্তল হয়ে উর্ধ্বগামী হবে, সংকট বিন্দুতে যদি অপেক্ষকটি অবম বা সর্বনিম্ন হয়।

(iii) দ্বিতীয় ক্রমের প্রত্যক্ষ আংশিক অবকলদ্বয়ের গুণফল যখন সংকট বিন্দুতে নেওয়া হয়, তখন তার মান, বিপরীত আংশিক অবকলদ্বয়ের (cross partial derivatives) গুণফল অপেক্ষা অধিক হয়। এক্ষেত্রেও মানগুলি সংকট বিন্দুতেই নেওয়া হবে।

নীচের ছবিগুলির মাধ্যমে বিশদভাবে ধারণাটি বোঝা যাবে।

চিত্র 9.1

চিত্র 9.1a তে অপেক্ষকটি কঠোর অবতল, x এবং y এর সাপেক্ষে। সেখানে কেবলমাত্র একটিই



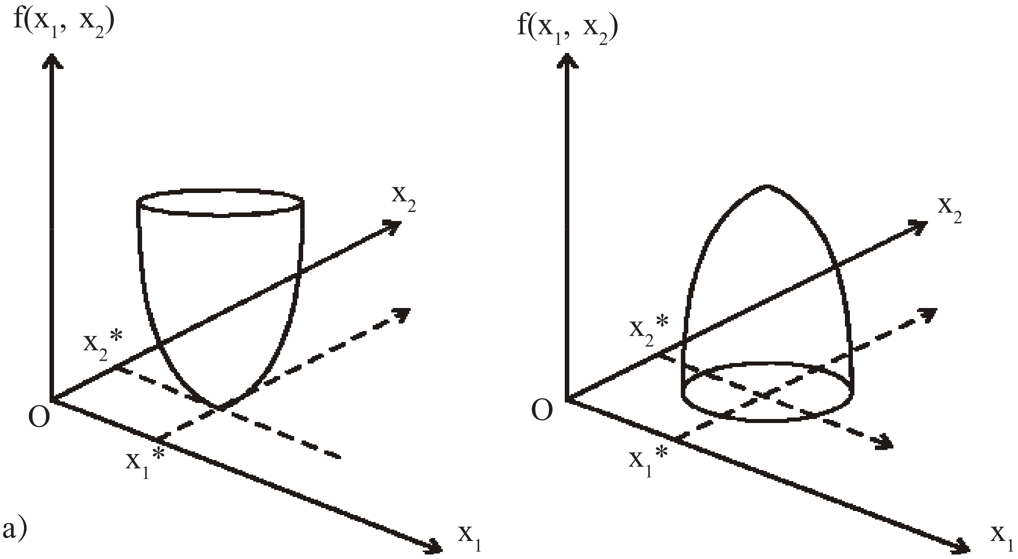
(a) (b)

চরম মান আছে যাকে বলা যাবে সার্বিক চরম মান (Global maxima) আবার চিত্র 9.1b কঠোর উত্তল অপেক্ষক আঁকা হয়েছে যার কেবলমাত্র একটিই অবম মান আছে। সুতরাং এক্ষেত্রে সংকট বিন্দু সার্বিক অবম মান নির্দেশ করবে। যদি অপেক্ষক অবতল (উত্তল) হয় x ও y এর সাপেক্ষে, কোনো নির্দিষ্ট পরিসরে, তাহলে উক্ত সংকট বিন্দু স্থানীয় চরম (অবম) মান নির্দেশ করবে।

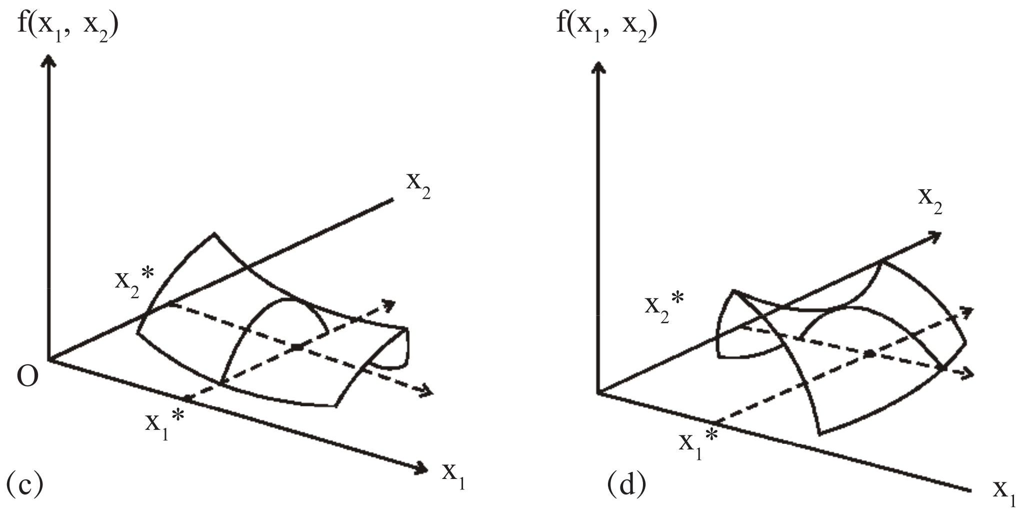
এবার চিত্র 9.2 লক্ষ করা যাক্।

চিত্র (9.2)

চিত্র 9.2a তে অপেক্ষকটি x_1 বরাবর (direction) অবম ও x_2 বরাবর অবম মানগ্রহণ করছে। চিত্র



(a)



9.2b তে x_1 ও x_2 উভয়দিকে অপেক্ষকটি চরম। চিত্র 9.2c তে অপেক্ষক x_1 বরাবর অবম ও x_2 বরাবর অবম ও x_2 বরাবর চরম এবং চিত্র 9.2d তে x_1 বরাবর চরম ও x_2 বরাবর অবম হয়েছে স্থিতিশীল বিন্দুতে (stationary valuesof $f(x_1, x_2)$)। এই 9.2c ও 9.2d চিত্রতে অপেক্ষকটি স্থিতিশীল বিন্দুর সাপেক্ষে "জিন বিন্দু" বা saddle point বলা হয়।

সুতরাং চরম মানের গাণিতিক শর্তানুসারে

1. fx, fy = 0
2. fxx, fyy < 0
3. fxx, fyy > $(f_{xy})^2$ বা fxx.fyy – $(fxy)^2 > 0$

অবম মানে যখন z = f(x, y) পৌঁছবে তার গাণিতিক শর্ত ঃ

1. fx, fy = 0
2. fxx, fyy > 0
3. fxx.fyy > $(f^{xy})^2$ বা fxx.fyy – $(f_{xy})^2 > 0$

z = f(x, y) সংকট বিন্দু যখন ভাঁজ বিন্দু বা ভাঁজ বিন্দু হবে (inflection point) তার গাণিতিক শর্ত

1. fxx, fyy একই চিহ্ন
2. fxx.fyy < (fxy)2 বা fxx.fyy – (fxy)2 < 0 এবং অপেক্ষকটি জিন বিন্দুতে থাকবে (the function is at a saddle point) তার শর্ত ঃ

1. fxx ও fyy পরস্পর বিরোধী চিহ্ন
2. fxx.fyy < $(fxy)^2$ বা fxx.fyy – $(fxy)^2 < 0$

উদাহরণ 9.3.1 ঃ নীচের অপেক্ষকদ্বয়ের ক্ষেত্রে (i) তাদের কোন সংকট মানে অপেক্ষকদ্বয় স্থানীয় প্রান্তিক মানে পৌঁছেছে (optimized) নির্ণয় কর। (ii) সেই সংকট মানে (critical values) অপেক্ষকে দুটি কি চরম, অবম, ভাঁজ বিন্দু বা জিন বিন্দুতে পৌঁছেছে তা নির্ণয় করো।

(i) $f(x, y) = 48y - 3x^2 - 6xy - 2y^2 + 72x$

(ii) $z(x, y) = 3x^2 - 5y^2 - 225x + 70y + 23.$

সমাধান ঃ (i) $f(x, y) = 48y - 3x^2 - 6xy - 2y^2 + 72x$

$Z_x = -6x - 6y + 72 = 0$ $\qquad$ $Z_y = -6x - 4y + 48 = 0$

$x = 0, y = 12$ অর্থাৎ সংকট বিন্দু (0, 12)

$Z_{xx} = -6, \quad Z_{yy} = -4$

$Z_{xx}(0, 12) = -6 < 0 \quad Z_{yy}(0, 12) = -4 < 0$

সুতরাং অপেক্ষকটির Zxx ও Zyy এই দুই দ্বিতীয় ক্রমের আংশিক অবকলন মান একই চিহ্নযুক্ত।

$Z_{xy} = -6 = Z_{yx}$ $\qquad$ $Z_{xy}(0, 12) = -6 = Z_{yx}(0, 12)$

কিন্তু $Z_{xx}(0, 12) \,.\, Z_{yy}(0, 12) = -6x - 4 = 24$

এবং $[Z_{xy}(0, 12)]^2 = (-6)^2 = 36.$

$24 < 36$ বা $Z_{xx} \,.\, Z_{yy} < (Z_{xy})^2$

অর্থাৎ Z_{xx}, Z_{yy} একই চিহ্ন যুক্ত হলেও $Z_{xx}.Z_{yy} < (Z_{xy})^2$ হওয়াতে অপেক্ষকটি (0, 12) বিন্দু (সংকট বিন্দু) ভাঁজবিন্দু হয়েছে (inflection point)।

(ii) $\qquad Z(x, y) = 3x^2 - 5y^2 - 225x + 70y = 23$

$Zx = 9x^2 - 225 = 0$ $\qquad$ $Zy = -10y + 70 = 0$

$9x^2 - 225$ $\qquad$ $10y = 70$

$x = 5$ $\qquad$ $\Rightarrow y = 7$

$\therefore (x^2 = 25)$

$\therefore$ সংকট বিন্দুগুলি (5, 7) ও (–5, 7)

$Z_{xx} = 18x$ $\qquad$ $Z_{yy} = -10$

$Z_{xx}|_{(5,7)} = 18 \times 5 = 90 < 0$ $\qquad$ $Z_{yy}|_{(5,7)} = -10 < 0$

$Z_{xx}|_{(-5,7)} = -90 < 0$ $\qquad$ $Z_{yy}|_{(-5,7)} = -10 < 0$

বিপরীত আংশিক অবকলন মান $Zxy = Zyx = 0$

এখন (5, 7) সংকট বিন্দুতে ঃ

$$Z_{xx}.Z_{yy} = 90 \times -10 = -900$$

$\therefore (Z_{xx}.Z_{yy}) < (Z_{xy})^2$ এবং Zxx ও Zyy এই (5, 7) সংকট বিন্দুতে পরস্পর বিরোধী চিহ্ন নির্দেশ করে। সুতরাং Z (5, 7) হলো জিন বিন্দু (Saddle point)।

আবার (–5, 7) সংকট বিন্দুতে

$Z_{xx} \,.\, Z_{yy} = 900$

$Z_{xx} \,.\, Z_{yy} > (Z_{xy})^2$ ও Z_{yy} উভয়েই ঋণাত্মক। সুতরাং Z(–5, 7) এ আপাত চরম মান নির্দেশ করবে।

উদাহরণ 9.3.2 ঃ যদি f(x, y) = $ax^2y + bxy + xxy^2 + c$ হয় তবে a, b, c এই তিনটি ধ্রুবকের কোন মানের জন্য অপেক্ষকটি (2/3, 1/3) বিন্দুতে স্থানীয় অবম মানে পৌঁছাবে যেখানে তার স্থানীয় সর্বনিম্ন মান হবে –1/9 ?

$f(x, y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$

প্রাথমিক শর্ত (first order condition) ঃ

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2axy + by + 2y^2 = 0 \Rightarrow y(2ax + b + 2y) = 0$$

$\therefore\ 2ax + b + 2y = 0$ হবে যদি y = 0 হয়। .....(1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 9x2 + bx + 4xy = 0 \Rightarrow x(ax + b + 4y) = 0$$

$\Rightarrow ax + b + 4y = 0$ হবে যদি $x \neq 0$ হয়। .....(2)

(i) ও (ii) পারস্পরিক সমাধান করে পাওয়া যায়

$x = -\frac{b}{3a} = \frac{2}{3}$ $y = -\frac{b}{6} = \frac{1}{3}$ $\therefore$ a = 1 ও b = –2

যেহেতু f(x, y) এর স্থানীয় অবম মান হলো $-\frac{1}{9}$

$$\therefore f(x, y) = 1.\frac{4}{9}.\frac{1}{3} + (-2).\frac{2}{3}.\frac{1}{3} + 2.\frac{2}{3}.\frac{1}{9} + C = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{27} - \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + C = -\frac{1}{9}$$

সুতরাং $C = -\frac{1}{9}$

$\therefore\ a = 1,\ b = -2,\ c = -\frac{1}{9}$ হলো ধ্রুবকত্রয়ের মান।

যদি এবার n সংখ্যক পছন্দ চলক (n choice variables) নেওয়া যায় এবং উদ্দেশ্য অপেক্ষক (objective function) হয় $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ তাহলে নির্ণায়ক ভিত্তিক আপাত স্থানীয় প্রান্তিক মানকে (Relative optimum) নিম্নলিখিত সারণী মাধ্যমে প্রকাশ করা যাবে।

সারণী 1 ঃ আপাত স্থানীয় প্রান্তিক মানের নির্ণায়কভিত্তিক পরীক্ষা ঃ $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

শর্ত	সর্বোচ্চ	সর্বনিম্ন
প্রথম বর্গের	$f_1 = f_2 = ... = f_n$	$f_1 = f_2 = ... = f_n$

আবশ্যিক শর্ত

দ্বিতীয় বর্গের আবশ্যিক শর্ত	$(-1)^i \lvert Hi \rvert > 0 \ \forall i = 1, ..., n$	$\lvert Hi \rvert > 0 \ \forall \ i = 1, 2, ..., n$

যেখানে $\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & ...... & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & ...... & f_{2n} \\ f_{n_1} & f_{n_2} & ...... & f_{n_n} \end{bmatrix}$ যার মুখ্য মাইনর

$$|H_1| = f_{11}, \ |H_2| = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \ ...., \ |H_n| = |H|$$

এই আলোচনার ক্ষেত্রে বিশেষভাবে মনে রাখা আবশ্যক যে যখন $z = f(x, y)$ অপেক্ষকের স্থানীয় প্রান্তিক মান নির্ণয় করা হচ্ছে ঃ তখন প্রথম ক্রমের আবশ্যিক শর্ত যা পূরণ না হলে চরম বা অবম মান প্রাপ্ত হবে না তা হলো $dz = 0$; dx ও dy এর যে কোনো মানের (arbitrary) মানের জন্য যেখানে উভয়েই একসাথে শূন্য হবে না।

$$dz = fx^{dx} + fy^{dy}.$$

দ্বিতীয় ক্রমের শর্ত বা যথেষ্ট শর্ত হলো z এর চরম মানের জন্য $d^2z \leq 0$ এবং z এর অবম মানের জন্য $d^2z \leq 0$; dx ও dy এর যে কোনো মানের সাপেক্ষে, যেখানে দুটি একসাথে শূন্য হবে না।

এখন $d^2z \quad < 0$ যদি $fxx < 0, fyy < 0$; $fxx \ fyy > f^2xy$

> 0 যদি $fxx > 0 \ fyy > 0$; $fxx \ fyy > f^2xy$

উদাহরণ 9.3.3 ঃ কোনো একটি পূর্ণ প্রতিযোগিতামূলক ফার্মের মুনাফা অপেক্ষক হলো $\pi = R - C$ ধরা যাক উৎপাদন অপেক্ষক কব ডগলাস আকারের, দ্রব্যের দাম, মজুরীর হার ও মূলধনের দাম যথাক্রমে p, w ও r। ধরা যাক উৎপাদন অপেক্ষকটিতে $\alpha = \beta < \frac{1}{2}$ এবং $\alpha + \beta < 1$ এক্ষেত্রে কি পরিমাণ উৎপাদনে, শ্রমিক ও মূলধনের পরিমাণে মুনাফা সর্বোচ্চ হবে নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ $Q = Q(K, L) = L^{\alpha}K^{\beta} = L^{\alpha}K^{\alpha} \quad (\because \ \alpha = \beta)$

$$\pi = R - C = PQ - wL - rK. = PL^{\alpha}K^{\alpha} - wL - rK.$$

মুনাফা সর্বোচ্চকরণের প্রথম ক্রমের আবশ্যিক শর্তানুসারে $\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{\partial \pi}{\partial K} = 0$

$$\therefore \ \frac{\partial \pi}{\partial L} = P\alpha L^{\alpha-1}K^{\alpha} - w = 0 \qquad .....(1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = P\alpha L^{\alpha}K^{\alpha-1} - r = 0 \qquad .....(2)$$

(1) ও (2) থেকে স্থানীয় প্রান্তিক K ও L নির্ণীত হবে কিন্তু দ্বিতীয় তার চরম না অবম জানার জন্য দ্বিতীয় ক্রমের যথেষ্ট শর্ত পূরণ হওয়া আবশ্যক।

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} \pi_{LL} & \pi_{LK} \\ \pi_{KL} & \pi_{KK} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} P\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\alpha} & P\alpha^2L^{\alpha-1}K^{\alpha-1} \\ P\alpha^2L^{\alpha-1}K^{\alpha-1} & P\alpha(\alpha-1)L^{\alpha}K^{\alpha-2} \end{vmatrix}$$

চরম মানের যথেষ্ট শর্তানুসারে $|H_1| < 0$ ও $|H| > 0$

$$|H_1| = P\alpha(\alpha-1)L^{\alpha-2}K^{\alpha} < 0 \qquad \left(\because \alpha < \frac{1}{2}\right)$$

$$|H| = P^2\alpha^2(\alpha-1)^2L^{2\alpha-2}K^{2\alpha-2} - P^2\alpha^4L^{2\alpha-2}K^{2\alpha-2}$$

$$= P^2\alpha^2L^{2\alpha-2}K^{2\alpha-2}(1-2\alpha) > 0 \qquad \left(\because \alpha < \frac{1}{2}\right)$$

দ্বিতীয় যথেষ্ট শর্ত পূরণ হলো।

(1) থেকে ঃ $P\alpha L^{\alpha-1}K^{\alpha} = W$

$$\therefore K = \left(\frac{W}{P\alpha}L^{1-\alpha}\right)^{Y_\alpha}$$

(2) এ প্রতিস্থাপন করে পাওয়া যাবে ঃ

$$P\alpha L^{\alpha}K^{\alpha-1} - r = P\alpha L^{\alpha}\left[\left(\frac{w}{P\alpha}L^{1-\alpha}\right)^{y_\alpha}\right]^{\alpha-1} - r = 0$$

$$\Rightarrow P^{Y\alpha}\alpha^{Y\alpha}W^{(\alpha-1)/\alpha}L^{(2\alpha-1)/\alpha} = r$$

$$\therefore L^* = \left(P\alpha W^{\alpha-1}R^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-2\alpha}}$$

$$K^* = \left(P\alpha\, r^{\alpha-1}\, w^{-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-2\alpha}}$$

$$Q^* = \left(L^*\right)^{\alpha}\left(K^*\right)^{\alpha} = \left(P\alpha W^{\alpha-1}r^{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}\left(P\alpha R^{\alpha-1}W^{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}$$

$$= \left(\frac{\alpha^2p^2}{wr}\right)^{\frac{\alpha}{1-2\alpha}}$$

সুতরাং মুনাফা সর্বোচ্চকারী উৎপাদনকে p, w, r এই বর্হির্মুখী চলকের (exogeneous variables) অপেক্ষক হিসাবে প্রকাশ করা যায়।

L^* ও K^* হলো শ্রমিক ও মূলধনের পরিমাণ যা মুনাফা সর্বোচ্চ করে।

সীমাবদ্ধ স্থানীয় প্রান্তিক মান বা অপ্টিমাইজেশন (Constrained optimization) :

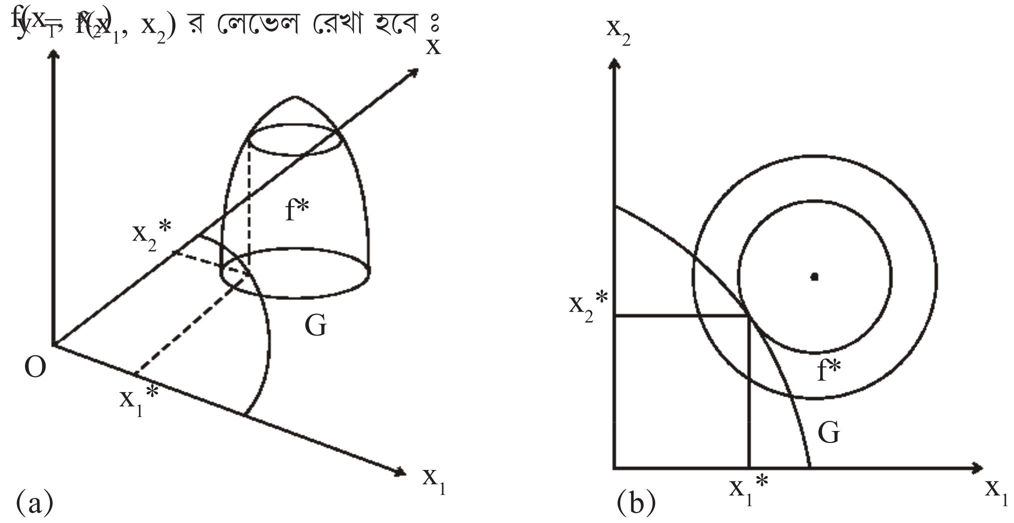
যখন কোনো অপেক্ষককে চরম বা অবম মানে পৌঁছাতে গেলে বাস্তব রেখার উপর অবস্থিত x চলকের যে কোনো মানই অবাধে সম্ভাব্য সমাধান হিসাবে গ্রহণ করা হয়, নির্দিষ্ট শর্ত সাপেক্ষে তখন সেটি সীমাহীন অপ্টিমাইজেশন পদ্ধতির মধ্যে পড়ে। কিন্তু অধিকাংশ ক্ষেত্রেই, বিশেষতঃ অর্থনৈতিক সমস্যার ক্ষেত্রে এক বা একাধিক সীমা বা বাধা x চলকের যে কোনো মান, চরম বা অবম হতে নিয়ন্ত্রণ করে বা বাধা দেয়। সীমাহীন অপ্টিমাইজেশন এরই অন্তর্গত।

9.4 সীমাবদ্ধ অপ্টিমাইজেশন সমস্যার বিশদ ব্যাখ্যা

ধরা যাক $f(x_1, x_2)$ অপেক্ষকটি যেখানে $f \in \mathbb{R}^2$ একটি কঠোর অবতল অপেক্ষক এবং বাধা হলো (constraint) $g(x_1, x_2) = 0$ যেখানে $g \in \mathbb{R}^2$ অর্থাৎ f কে যদি চরম মানে নেওয়া যায় তাহলে সমাধান হিসাবে সেই (x_1, x_2) কেই গণ্য করা হবে, যা $g(x_1, x_2) = 0$ এই বাধা সমীকরণটিকে রক্ষা করে। চিত্র 9.3a তে উদ্দেশ্য অপেক্ষক f কে তিনটি পৃষ্ঠতলে (Three dimensions) এবং 9.3b চিত্রে f এর সংলগ্ন (associated) লেভেল রেখা (level curve) অঙ্কন করা হয়েছে।

উপরিউক্ত চিত্রটিতে দেখানো হয়েছে কিভাবে বাধা রেখার উপরিস্থিত বিন্দু f এর সর্বোচ্চ মান দিতে পারে। G রেখা (x1, x2) জোড়ার সেট বোঝায় যা বাধা সমীকরণটি দ্বারা নির্দেশিত। 9.3b চিত্র থেকে বোঝা যায় যে f* হলো সর্বোচ্চ লেভেল রেখা যা G এর সাপেক্ষে বা G এর উপর থেকে চরম মান গ্রহণ করেছে যেখানে সর্বাধিক (x_1, x_2) হলো (x_1^*, x_2^*) বা (x_1^*, x_2^*) বিন্দু উদ্দেশ্য অপেক্ষকের, বাধা সমীকরণের ভিত্তিতে সর্বাধিক মান প্রদান করে। (x_1^*, x_2^*) বিন্দুতে বাধা অপেক্ষক ও উদ্দেশ্য অপেক্ষক পরস্পর স্পর্শক হয়। এখন যদি এই চিত্র অনুযায়ী সমাধানটিকে বীজগাণিতিয় পদ্ধতিতে দেখানো যায় তাহলে নিম্নের উপায় অবলম্বন করা হবে।

$y = f(x_1, x_2)$ র লেভেল রেখা হবে ঃ



চিত্র 9.3

$\overline{y} = f(x_1, x_2) \Rightarrow f(x_1, x_2) - \overline{y} = 0$

ইমপ্লিসিট অপেক্ষক উপপাদ্য (Implicit function theorem) অনুসারে $F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - y = 0$

$\therefore\ dF = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = 0$ যেহেতু y হলো স্থির রাশি।

$$\therefore\ \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=\overline{y}} \text{ or } \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{dy=0} = -\frac{f_1}{f_2} \text{ or } \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$$

G এর ঢাল হলো $\left.\dfrac{dx_2}{dx_1}\right| = \dfrac{g_1(x_1, x_2)}{g_2(x_1, x_2)}$

যে বিন্দতে এই দই অপেক্ষক স্পর্শক হয়েছে সেখানে এদের ঢাল সমান। এই বিন্দু (x_1^*, x_2^*) হলে

$$\therefore\ \frac{f_1(x_1^*, x_2^*)}{f_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{g_1(x_1^*, x_2^*)}{g_2(x_1^*, x_2^*)}$$

কিন্তু লক্ষণীয় যে এই একটি সমীকরণ থেকে x_1^*, x_2^* এই দুই অজানা রাশির মান নির্ণীত হবে না; তাই দ্বিতীয় সমীকরণ হিসাবে $g(x_1^*, x_2^*) = 0$ কে নেওয়া হয়। এভাবে x_1^*, x_2^* ও f এর মান নির্ণয় করা হয়।

অর্থাৎ $z = f(x_1, x_2)$ এই অপেক্ষকটির ক্ষেত্রে সীমাবদ্ধ অপ্টিমাইজেশন ও সীমাহীন অপ্টিমাইজেশনকে নিম্নলিখিত চিত্রে আরও সুস্পষ্টভাবে ব্যাখ্যা করা যায়।

চিত্রে সীমাহীন চরম মান হলো সম্পূর্ণ গম্বুজের চূড়াতে (peak point) কিন্তু সীমাবদ্ধ চরম মান হলো বাধারেখার (constraint line) উপরে যে উল্টো U আকৃতির বক্ররেখা (curve) তার সর্বোচ্চ বিন্দুতে। অর্থাৎ সীমাবদ্ধ চরম মান, স্বাধীন চরম মান অপেক্ষা অধিক হবে না।

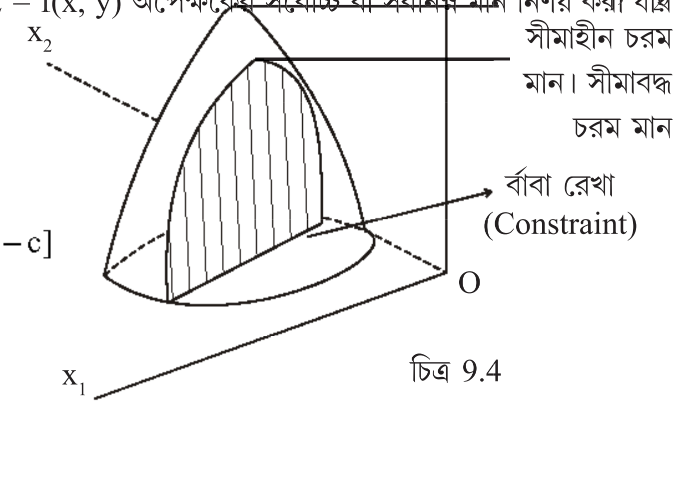
ল্যাগ্রাঞ্জ গুণক পদ্ধতি অনুসারে সীমাবদ্ধ অপ্টিমাইজেশন সমস্যার মান নির্ণয় (Lagrange Multiplier Method) :

ল্যাগ্রাঞ্জ গুণক প্রদ্ধতির অনুসরণে 2 = f(x, y) অপেক্ষকের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা যায় যেখানে x ও y একটি সমতাযুক্ত বাধা সমীকরণ (equality constrants), g(x, y) = c কে পূরণ করে।

ল্যাগ্রাঞ্জ কে লেখা হয় ঃ

$$L(x, y) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - c]$$

এখানে λ একটি ধ্রুবক। L কে x, ও y ও এর সাপেক্ষে আংশিক অবকলন করে প্রথম



চিত্র 9.4

ক্রমের জরুরী শর্তানুসারে তাকে শূন্যর সমান করা হয়। অর্থাৎ

$$Lx(x, y) = f_x(x, y) - \lambda g_x(x, y) = 0 \qquad .....(1)$$

$$Ly(x, y) = f_y(x, y) - \lambda g_y(x, y) = 0 \qquad .....(2)$$

$$L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) - c = 0$$

উপরিউক্ত তিনটি সমীকরণ পরস্পর সমাধান করলে x, y ও λ র মান পাওয়া যায়।

দ্বিতীয় ক্রমের শর্ত (Second Order Condition) :

এখানেও দ্বিতীয় ক্রমের জরুরী (necessary) ও যথেষ্ট শর্ত নির্ভর করবে দ্বিতীয় ক্রমের পূর্ণ অবকলন d^2z এর উপর যাকে স্থিতিশীল (stationary) বিন্দুতে (প্রথম ক্রম থেকে প্রাপ্ত x ও y বিন্দু) মান নির্ণয় করা হচ্ছে, তার উপর। এখানে d^2z এর নির্দিষ্ট বা আধানির্দিষ্ট (definite or semidefinite) চিহ্ন, বিবেচিত হবে কেবলমাত্র সেই dx ও dy এর মানের উপর যা dg = gxdx + gydy = 0 এই রৈখিক বাধাকে পূরণ করবে।

দ্বিতীয় ক্রমের আবশ্যিক বা জরুরী শর্ত ঃ

(i) Z চরম হবে যখন d^2z ঋণাত্মক আধানির্দিষ্ট (negative semidefinite), dg = 0 র সাপেক্ষে।

(ii) Z অবম হবে যখন d^2z ধনাত্মক আধানির্দিষ্ট, dg = 0 র সাপেক্ষে।

দ্বিতীয় ক্রমের যথেষ্ট শর্ত ঃ

(i) Z চরম হবে যখন d^2z ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হবে dg = 0 র সাপেক্ষে।

(ii) Z অবম হবে যখন d^2z ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে dg = 0 র সাপেক্ষে।

বর্তমান আলোচনার ক্ষেত্রে কেবলমাত্র দ্বিতীয় ক্রমের যথেষ্ট শর্তটি বিশদভাবে বোঝানো হলো।

পূর্বে আলোচিত ল্যাগ্রাঞ্জ পদ্ধতির জরুরী শর্তানুসারে $\frac{fx}{fy} = \frac{gx}{gy}$ (1 ও 2 নং সমীকরণ থেকে)

আবার (1) ও (2) নং সমীকরণ থেকে

$$\frac{fx}{fy} = \lambda \text{ or } \frac{fy}{gy} = \lambda$$

অর্থাৎ বাধার যদি সরণ হয় তবে L* ও Z* কিভাবে সাড়া দেবে তার পরিমাপ পাওয়া যায় λ থেকে।

এখন
$$d^2z = d(dz) = \frac{\partial}{\partial x}(dz)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(dz)dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[f_x dx + f_y dy]dx + \frac{\partial}{\partial y}[f_x dx + f_y dy]dy$$

$$=\left[f_{xx}dx+(f_{xy}dy+fy\frac{\partial dy}{dx}\right]dx+\left[f_{yx}dx+(f_{yy}dy+fy\frac{\partial}{\partial y}^{dy}\right]dy$$

$$=f_{xx}dx^2+f_{xy}dydx+fy\frac{\partial}{\partial x}^{(dy)}dx+fy_x dxdy+f_{yy}dy^2+fy\frac{\partial}{\partial y}(dy)+dy.$$

এখন $f_y\left[\frac{\partial}{\partial x}(dy)dx+\frac{\partial}{\partial y}(dy)dy\right]=f_y d(dy)=f_y d^2y$

$$\therefore\ d^2z=f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2+f_y d^2y \qquad .....(3)$$

বাধা সমীকরণ g(x, y) = c $\therefore$ dg = 0 এবং d(dg) = 0

$$\Rightarrow d^2g=g_{xx}dx^2+2g_{xy}dxdy+g_{yy}dy^2+g_y d^2y=0$$

এই সমীকরণ থেকে d^2y এর মান নির্ণয় করে যদি (3) নং সমীকরণে বসাই তাহলে d^2z হবে

আবশ্যিক শর্তের $L_x(x, y)$ ও $L_y(x, y)$ কে পুনরায় আংশিক অবকলন যদি করা যায় তাহলে হবে ঃ

$$L_{xx}=f_{xx}-\lambda g_{xx}$$

$$L_{yy}=f_{yy}-\lambda g_{yy}$$

$$L_{xy}=f_{xy}-\lambda g_{xy}=L_{yx}.$$

$$\therefore\ d^2z=L_{xx}dx^2+L_{xy}dxdy+L_{yx}dydx+L_{yy}dy^2$$

এই দ্বিতীয় ক্রমের প্রাপ্ত যথেষ্ট শর্তকে নির্ণায়কের মাধ্যমে যখন প্রকাশ করা হবে তখন তাকে বলা হবে বর্ডারকৃত হেসিয়ান (Bordered Hessian)। এই নির্ণায়কের গঠন পদ্ধতি নিম্নে আলোচনা করা হলো।

কোনো একটি রৈখিক বাধা র সাপেক্ষে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ঃ

এর নির্দিষ্টতার চিহ্নর শর্ত আগে দেখা যাক (sign definiteness)

$\alpha u+\beta v=0$ হলে

$\alpha u=-\beta v$ ও $v=-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)u.$

$$\therefore\ q=au^2-2h\frac{\alpha}{\beta}u^2+b\frac{\alpha^2}{\beta^2}u^2\ =(\alpha\beta^2-2h\alpha\beta+b\alpha^2)\frac{u^2}{\beta^2}$$

q ধনাত্মক (ঋণাত্মক) নির্দিষ্ট হবে কেবলমাত্র যদি বন্ধনীর মধ্যের পদ (expression) ধনাত্মক (ঋ

ণাত্মক) হয়।

এবার $2h\alpha\beta - \alpha\beta^2 - b\alpha^2 = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix}$ হবে। এই পদটি বন্ধনীস্থিত পদের বিপরীত।

সুতরাং বলা যায় ঃ

(1) q ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে $\alpha u + \beta v = 0$ র সাপেক্ষে কেবলমাত্র যদি $\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} < 0$ হয়।

(2) q ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হবে $\alpha u + \beta v = 0$ র সাপেক্ষে কেবলমাত্র যদি $\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix} > 0$ হয়।

লক্ষণীয় এই যে উল্লিখিত নির্ণায়কটি মূল দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক $\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$ যার উপরে এবং বাঁদিকে একই আকারের বর্ডার করা আছে। যেখানে মুখ্য কর্ণে শূন্য ও বাকি রাশি হলো বাধা সমীকরণের সহগ α ও β।

এবার এই পদ্ধতিটিই যদি d^2z এ প্রযুক্ত হয়, তখন $u = dx$ ও $v = dy$ এবং নিরূপক হবে $\begin{vmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix}$। আবার $g_x = \alpha$ ও $\beta = g_y$ হবে $g_x dx + g_y dy = 0$ থেকে।

সুতরাং বলা যায় ঃ

(i) d^2z ; ধনাত্মক নির্দিষ্ট হবে $dg = 0$ র সাপেক্ষে যদি $|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yz} & L_{yy} \end{vmatrix} < 0$ হয়।

(ii) d^2z ; ঋণাত্মক নির্দিষ্ট হবে $dg = 0$ র সাপেক্ষে যদি $|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix} > 0$ হয়।

$|\bar{H}|$ হলো বর্ডারযুক্ত হেসিয়ান নিরূপক।

অতএব $Z = f(x, y)$ এই উদ্দেশ্যে অপেক্ষকের বাধা সমীকরণের সাপেক্ষে প্রদত্ত স্থিতিশীল মান আপাত চরম হবে যখন $|\bar{H}|$ ধনাত্মক হবে ও অবম হবে যদি $|\bar{H}|$ ঋণাত্মক হয়। মনে রাখা আবশ্যক সমস্ত অবকলনগুলি, যেগুলি $|\bar{H}|$ এ ব্যবহার করা হয়েছে তা x, y এর সংকট মানের ভিত্তিতে গৃহীত হয়েছে।

বহুচলক বিশিষ্ট রাশির ক্ষেত্রে এই নির্ণায়ক ভিত্তিক অপ্টিমাইশেন পরীক্ষার জন্য নিচের সারণীটি

দেওয়া হলে; সেক্ষেত্রে উদ্দেশ্য অপেক্ষক হলো $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ও বাধা সমীকরণ হলো $g(x_1, x_2, ..., x_n) = C$ এবং $L = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda[c - g(x_1, x_2, ..., x_n)]$ হলো ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক।

শর্ত	সর্বোচ্চ মান	সর্বনিম্ন মান
প্রথম ক্রমের আবশ্যিক শর্ত	$L_1 = L_2 = ... = L_n = 0$	$L_1 = L_2 = ... = L_n = 0$
দ্বিতীয় ক্রমের আবশ্যিক শর্ত	$\lvert\bar{H}_2\rvert > 0 \lvert\bar{H}_3\rvert < 0$ $\lvert\bar{H}_4\rvert > 0 ..... (-1)^n \lvert\bar{H}_n\rvert > 0$	$\lvert\bar{H}\rvert, \lvert\bar{H}_3\rvert,$ $....., \lvert H_n\rvert y0$

উদাহরণ 9.4.1 ঃ নিম্নলিখিত উপযোগ অপেক্ষকটি বিবেচনা করো ঃ

$U = U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$ $(x, y > 0 ; \alpha ; \beta > 0)$

উপযোগ অপেক্ষকটির আবশ্যিক শর্ত সাপেক্ষে (প্রথম ক্রমের) x ও y এর সাম্যাবস্থার মান x*, y* নির্ণয় করো। এক্ষেত্রে বাজেট রেখা হলো M = pxx + pyy.

সমাধান ঃ ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক ঃ $L = x^{\alpha}y^{\beta} + \lambda[M = x\,Px - y\,Py]\,\lambda > 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = L_x = \alpha x^{\alpha-1}y^{\beta} - \lambda P_x = 0 \qquad ....(i)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = L_y = \beta x^{\alpha}y^{\beta-1} - \lambda P_y = 0 \qquad ....(ii)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = L_{\lambda} = M - p_x x - P_y y = 0 \qquad .....(iii)$$

(1) (ii), (iii) হলো প্রথম ক্রমের আবশ্যিক শর্ত।

(i) ও (ii) থেকে ঃ $\frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}}{\beta x^{x}y^{\beta-1}} = \frac{P_x}{P_y}$ বা $\frac{y}{x} = \frac{\beta}{\alpha}.\frac{P_x}{P_y}$

$$\therefore\ y = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{Px}{Py}\right)x.$$

এই y এর মান বাজেট রেখার সমীকরণে বসালে ঃ

$$xP_x + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right).\left(\frac{px}{py}\right)x.Py = M \Rightarrow xPx + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right).xp_x = M$$

$\Rightarrow xPx\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)=M \qquad \therefore\ x=\frac{\alpha M}{P_x(\alpha+\beta)}$ এবং x এর মান $y=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{P_x}{P_y}\right).x$ এ

বসালে ঃ $y=\frac{\beta M}{P_y(\alpha+\beta)}$

উদাহরণ 9.4.2 ঃ যদি উপযোগিতা অপেক্ষক U = u (x, y) = (x+2) (y+1) হয়, x দ্রব্যের একক মূল্য Rs. 4, ও y দ্রব্যের একক মূল্য Rs. 6 ও ব্যক্তির আয় Rs. 130 হয় তবে x ও y র কোন মানের জন্য উপযোগীতা সর্বোচ্চ হবে নির্ণয় করো।

সমাধান ঃ U = (x + 1)(y + 1) এবং বাজেট রেখার সমীকরণ $M = p_x x + p_y y = 4x + 6y = 130$

$\therefore\ L=(x+2)(y+1)+\lambda[130-4x-6y]$

$$Lx=\frac{\partial L}{\partial x}=(y+1)=4\lambda=0 \qquad \text{..... (1)}$$

$$Ly=\frac{\partial L}{\partial y}=(x+2)-6\lambda=0 \qquad \text{......(2)}$$

$$L\lambda=\frac{\partial L}{\partial \lambda}=130-4x-6y=0 \qquad \text{......(3)}$$

উপরিউক্ত সমীকরণ তিনটি সমাধান করলে

x* = 16 ও y* = 11 হবে।

দ্বিতীয় ক্রমের যথেষ্ট শর্ত অনুসারে

$$|\bar{H}|=\begin{vmatrix}0 & 9x & 9y\\ 9x & Lxx & Lxy\\ 9y & Lyx & Lyy\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 4 & 6\\ 4 & 0 & 1\\ 6 & 1 & 0\end{vmatrix}=48>0$$

সুতরাং x* = 16 একক ও y* = 11 একক এই মানে উপযোগিতা অপেক্ষকের মান চরম হবে

U* = (16 + 2)(11 + 1) = 18 × 12 = 216

উদাহরণ 9.4.3 ঃ C = 3x + 4y এই ব্যায়ের 2xy = 337.5 এই বাধা সমীকরণের সাপেক্ষে অবম মান দেখাও।

সমাধান ঃ C = 3x + 4y 2xy = 337.5

L = 3x + 4y + λ[337.5 – 2xy]

Lx = 3 – 2λy = 0 $\Rightarrow \lambda=\frac{1.5}{y}$ ....(1)

$L_y = 4 - 2x = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{x}$ .....(2)

$C_\lambda = 337.5 - 2xy = 0$

(1) ও (2) সমাধান করে পাই ঃ $\frac{1.5}{y} = \frac{2}{x} \Rightarrow y = 0.75x$

বাধা সমীকরণের মাধ্যমে ঃ $337.5 = 2x(0.75x) = 1.5x^2$

$\therefore\ x^2 = 225 \quad x^* = 15\ (x > 0)$

সুতরাং $y^* = 11.25$, ও $y^* = 0.133$

আবার $L_{xx} = 0, L_{yy} = 0, L_{xy} = L_{yx} = -2\lambda$

$g_x = 2y, \quad g_y = 2x$

$$\therefore\ |\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 2y & 2x \\ 2y & 0 & -2y \\ 2x & -2y & 0 \end{vmatrix} = 16\lambda xy < 0$$

(কারণ $x, y, \lambda > 0$)

অর্থাৎ $|\overline{H}|$ একটি ধনাত্মক নির্দিষ্ট নির্ণায়ক

$\therefore\ x^* = 15$ ও $y^* = 11.25$ এই মানে C অবম মান হয় ও $C^* = 3 \times 15 + 4 \times 11.25$ = Rs. 90 হবে।

9.5 সীমাবদ্ধ অপ্টিমাইজেশন ও অসমতাযুক্ত বাধা সমীকরণ (Constrained optimization with in equality constraint)

বিষয়টি একটি সাধারণ উদাহরণ থেকে ধারণা করা যাক। ধরা যাক একটি দ্বিচলকবিশিষ্ট অপেক্ষক ও অসম বাধা হলো maximise f(x, y) subject to $g(x, y) < b$. অর্থাৎ f(x, y) কে চরম মানে উন্নিত করতে হবে $g(x, y) < b$ এর সাপেক্ষে। চিত্র 9.5 থেকে এই বিষয়টি বোঝা যাবে।

চিত্র 9.5 ঃ ∇f ও ∇g p এর চরম মানের দিকে (∇f & ∇g point in the same direction at the maximizer P)

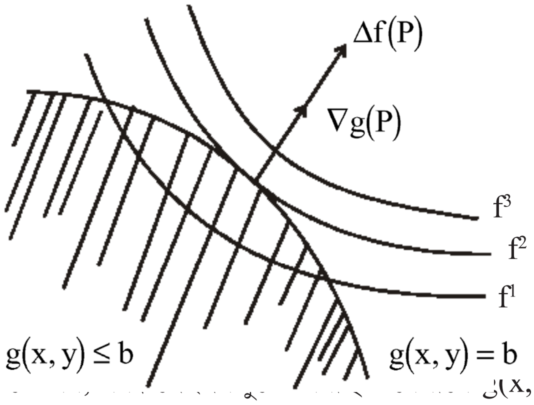
উপরের চিত্র $g(x, y) = b$ রেখাটির বাঁদিকে অঞ্চল $g(x, y) \leq b$. f এই উদ্দেশ্য অপেক্ষকের লেভেল সেটগুলি f^1, f^2, f^3 হিসাবে চিহ্নিত করা হয়েছে যেখানে সর্বোচ্চ লেভেল রেখা f^2 বাধা রেখাকে P বিন্দুতে স্পর্শ করছে। যেহেতু P বিন্দু বাধা সেটের সীমানাতে (boundary) আছে যেখানে $g(x, y) = b$; তাই এই বাধাকে বলা হবে বাঁধাই সীমাবদ্ধতা (Binding constraint), P বিন্দুতে। লক্ষণীয় যে $\nabla f(P)$ সেই দিকটি নির্দেশ করছে যেখানে f ; p বিন্দুতে আরো দ্রুত বৃদ্ধি পাচ্ছে। আবার $\nabla g(p)$ $g(x, y) \geq b$ সেটটিকে নির্দেশ করছে। যেহেতু p বিন্দু; $g(x, y) \leq b$ সেটে f কে চরম করে, সুতরাং f এর গ্র্যাডিয়েন্ট (gradient), সীমাবদ্ধ সেটকে (constraint set) নির্দেশ করবে না। তা যদি করতো তাহলে

$g(x, y) \leq b$ এই সীমানাতেই f কে আরো বাড়ানো যেত। সুতরাং $\nabla f(p)$; $g(x, y) \geq b = f$ এর দিকেই নির্দেশ করবে। অর্থাৎ $\nabla f(p)$ ও $\nabla g(p)$ উভয়ই একই দিক নির্দেশ করবে। তাহলে যদি $\nabla f(p)$ $\nabla g(p)$ র কোনো গুণক (Multiple) হয়, এবং λ তার গুণাংক হয় (multiplier) তাহলে বলা যায় $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ বা $\lambda \nabla f(p) - \lambda \nabla g(p) = 0$ এক্ষেত্রে $\lambda \geq 0$ হবে।

এবার যদি ল্যাগ্রাঞ্জ গঠন করা হয় তা হবে ঃ $L(x, y, \lambda) = f(x,y) - \lambda[g(x, y) - b]$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \text{ ও } \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

এবার $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ নির্ণয় করার আগে বিবেচনা করা প্রয়োজন যে, ধরা যাক চরম f, $g(x, y) \leq b$ এই



সীমা সেটের $g(x, y) = b$ (x, y) < b চিত্র 9.6 f এর চরম মান হলো সীমাবদ্ধ সেটের ভিতরে q বিন্দুতে। লেভেল সেট $g(x, y) = b$ এর উপর অবস্থিত r বিন্দুতে, f ও g এর লেভেল সেট পরস্পর স্পর্শক হয়েছে, কিন্তু ∇f ও ∇g বিন্দু r বিন্দু থেকে বিপরীত দিক নির্দেশ করছে, বা বিপরীতমুখী হয়েছে। যেহেতু q বিন্দুতে, $g(x, y) < b$: সুতরাং সীমানাটি q বিন্দুতে বা constraint হলো বাঁধাই বিহীন (non binding) অর্থাৎ $\frac{\partial f}{\partial x}(q) = 0$ এবং $\frac{\partial}{\partial}(q) \quad 0$ । এখানে q হলো স্থানীয় চরম মান। এখানে ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হলো $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - b]$. এবং $\frac{\partial L}{\partial x}$ ও $\frac{\partial L}{\partial y}$ কে শূন্যর সমান করা হবে যদি $\lambda = 0$ হবে। $\lambda = 0$ অর্থ বাধা সমীকরণকে চরম বিন্দুর ক্রিয়াশীল না করা (not binding)।

সুতরাং বাঁধাই সীমাবদ্ধতার ক্ষেত্রে $g(x, y) - b = 0$ এবং $\lambda > 0$ এবং যখন সীমাবদ্ধতা বাঁধাই নয় তখন $\lambda = 0$ যে অবস্থায় এই দুই অসমতার যে কোনো একটি ক্রিয়াশীল হবে তাকে বলা হয় পরিপূরক শিথিলতা অবস্থা (complementary slackness condition) এই দুই অবস্থা অর্থাৎ হয় $g(x, y) - b = 0$ বা $\lambda = 0$ কে $\lambda[g(x, y) - b] = 0$ হিসাবে লেখা যায়।

সমগ্র আলোচনাটি গঠনগতভাবে নিম্নলিখিত পদ্ধতি অনুসারে উপস্থাপন করা যায় ঃ

কোনো একটি অসম সীমাবদ্ধতাতর সাপেক্ষে যদি একটি অপ্টিমাইজেশন সমস্যাকে বিবেচনা করা হয় যেখানে অবকলনযোগ্য অবতল উদ্দেশ্য অপেক্ষক হলো f(x, y) এবং সীমাবদ্ধ অপেক্ষক হলো

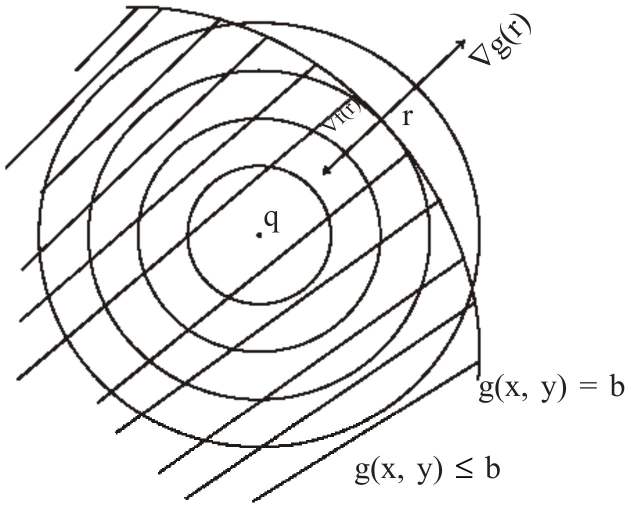
$g(x, y) \geq 0$, $x, y \geq 0$ তাহলে সংশ্লিষ্ট সমস্যাটি হল ঃ

maximize $f(x, y)$ subject to $g(x, y) \geq 0$ $(x, y) \geq 0$

এবং সংশ্লিষ্ট ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হলো ঃ

$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

এই সমস্যার প্রথম ক্রমের আবশ্যিক ও যথেষ্ট শর্তকে বলা হয় কুন টাকার শর্ত (Kunn Tucker conditions)। শর্তগুলি হলো ঃ



চিত্র 9.6 ঃ যে অবস্থায় সীমা বাঁধাই নয়।

১। (ক) $\frac{\partial F}{\partial x} = fx(x^*, y^*) + \lambda^* gx(x^*, y^*) \leq 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} = fx(x^*, y^*) + \lambda^* gy(x^*, y^*) \leq 0$

(খ) $x, y > 0$

(গ) $x\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad y\frac{\partial F}{\partial y} = 0$

২। (ক) $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x^* y^*) \geq 0$ (খ) $\lambda \geq 0$ (গ) $\lambda^* \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$

(গ) এর শর্তগুলিই হলো পরিপূরক শিথিলতার শর্ত।

উদাহরণ 9.5.1 ঃ নিম্নলিখিত বাধাযুক্ত সবচেয়ে কাম্য অবস্থায় (Optimization) সমস্যাটি বিবেচনা

কর ঃ $c(x, y) = 5x^2 - 80x + y^2 - 32y$ সর্বনিম্ন করো যেটিতে বাধা হলো উৎপাদিত দ্রব্যের পরিমাণ $x + y < 30$। Kunn-Tucker শর্তগুলি লেখ এবং x ও y এর কাম্য মানগুলি নির্ণয় করো (optimum values)।

Min $C(x, y) = 5x^2 - 80x + y^2 - 32y$

Subject to $x + y < 30$ বা $- x - y \geq 30$

ল্যাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক ঃ

$Z = 5x^2 - 80x + y^2 - 32y + \lambda\ [-30 + x + y]$

কুন-টাকার শর্তগুলি হলো ঃ

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 10x - 80 + \lambda \geq 0\,;\, x\frac{\partial z}{\partial x} = 0\,;\, x \geq 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 2y - 32 + \lambda \geq 0\,;\, y\frac{\partial z}{\partial y} = 0\,;\, y \geq 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = -30 + x + y \leq 0\,;\ \lambda\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0\,;\, \lambda \geq 0$$

ধরা যাক $x > 0$ ও $y > 0$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ এবং $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ পরিপূরক শিথিলতা শর্ত অনুসরণ করে

$\therefore 10x - 10 + \lambda = 0$ ও $2y - 32 + \lambda = 0$

আরো ধরা যাক $\lambda = 0$ তাহলে পরীক্ষা সমাধান (trial solution) :

$10x - 80 = 0 \ \therefore\ x = 8 > 0$

$2y - 32 = 0 \ \therefore\ y = 16 > 0$

এবং x ও y এর মান $x + y \leq 30$ কে পূরণ করে। $\therefore$ $x = 8, y = 16, \lambda = 0$ এই অঋণাত্মক মান হবে সমাধান।

9.6 রৈখিক প্রোগ্রামিং (Linear Programming)

এই তত্ত্বে কিভাবে একটি সীমাবদ্ধ অপ্টিমাইজেশনের সমস্যার সমাধান করা যায়, বিশেষত যেখানে একটি রৈখিক উদ্দেশ্য অপেক্ষকের রৈখিক অসমতা সীমাবদ্ধ অপেক্ষকগুলির সাপেক্ষে (linear inequality constraints) সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করা হয় তা দেখানো যায়। বিভিন্ন অর্থনৈতিক সিদ্ধান্তের ক্ষেত্রে এর প্রয়োগ লক্ষ্য করা যায়।

একটি সাধারণ রৈখিক প্রোগ্রামিং সমস্যা, যেখানে কেবলমাত্র দুটি সিদ্ধান্ত চলরাশি (decision variables) আছে তাকে প্রকাশ করা হয় ঃ

Z কে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন করা হয় যেখানে Z = c1x1 + c2x2 ...... উদ্দেশ্য অপেক্ষক

Subject to : $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$ অসমতা বাধা

....

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m$

এবং $x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$ অঋণাত্মক বাধা নীচের উল্লেখিত উদাহরণে লেখচিত্রের সাহায্যে কিভাবে এর সমাধান করা যায় তা দেখানো হল।

(১) চিত্রের সাহায্যে সমাধান করো ঃ

Maximize $Z = 4x_1 + 7x_2$

Subject to $12x_1 + 7x_2 \leq 42$

$5x_1 + 4x_2 \leq 20$

$2x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 \geq 0$ $x_2 \geq 0$

চিত্রে প্রদত্ত তিনটি বাধা ও উদ্দেশ্য উপেক্ষককে প্রথম চতুর্থাংশ আঁকা হলো। ABCDE হলো বাধা দ্বারা সমর্থিত সম্ভাব্য অঞ্চল (feasible region)। এই অঞ্চলের শীর্ষবিন্দুগুলি হলো ঃ A(3, 0) ; B (7/2, 0) ; C (), D(0, 5) ও E(0, 2) এই বিন্দুগুলি যদি উদ্দেশ্য অপেক্ষকে বসানো হয় তবে উদ্দেশ্য অপেক্ষকের মানগুলি হবে ঃ Z_A =12, Z_B = 14, $Z_C = \frac{1472}{65}$, Z_D = 35 ও Z_E = 14

সুতরাং Z, D(0, 5) বিন্দুতে সর্বাধিক হয়েছে এবং Z এর চরম মান হলো 35।

উদাহরণ 9.6.1 ঃ একটি শর্ত A ও B দুটি দ্রব্য প্রস্তুত করে। ফার্মটির দুটি উৎপাদনক্ষেত্র আছে যেখানে A ও B একসাথে প্রস্তুত হয় নিম্নলিখিত পরিমাণ অনুসারে প্রতি ঘণ্টায় ঃ

	প্রথম ফ্যাকটরি	দ্বিতীয় ফ্যাকটরি
A দ্রব্য	10	20
B দ্রব্য	25	25

ফার্মটি A দ্রব্যের 300 একক এবং B দ্রব্যের 500 এককের অর্ডায় পায়। দুটি ফ্যাকটরি চালানোর ঘণ্টাপ্রতি ব্যায় 10,000 ও 8000 টাকা। এই অর্ডারটির সর্বনিম্ন ব্যয় অবলম্বনে ফ্যাকটরি দুটি কত ঘণ্টা চালানো যাবে সেই সমস্যাটি রৈখিক প্রোগ্রামিং গঠনের মাধ্যমে সমাধান করো।

সমাধান ঃ ধরা যাক x_1 ও x_2 হলো উক্ত অর্ডারটি পূরণ করার ক্ষেত্রে যত ঘণ্টা ফ্যাকটরি দুটি চালানো হবে সেই নির্দিষ্ট ঘণ্টা। সুতরাং A দ্রব্য তৈরি হবে 10x1 + 20x2 ও B দ্রব্য প্রস্তুত হবে $25x_1 + 25x_2$। যেহেতু অর্ডার হলো A দ্রব্যের ক্ষেত্রে 300 একক ও B দ্রব্যের ক্ষেত্রে 500 একক;

$\therefore$ $10x_1 + 20x_2 \geq 300$

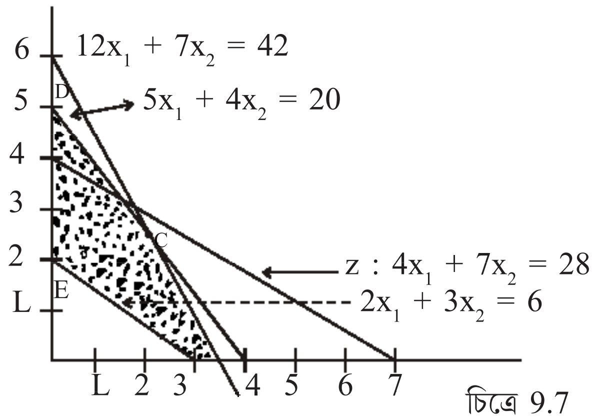
$25x_1 + 25x_2 \geq 500$

$x_1, x_2 \geq 0$

এখন x_1 ও x_2 ঘণ্টা যদি দুটি ফ্যাকটরী কাজ করে তাহলে মোট ব্যয় $10000\ x_1 + 8000\ x_2$

সুতরাং সমস্যাটি হবে ঃ

min $10000\ x_1 + 8000\ x_2$



চিত্রে 9.7

Subject to $10x_1 + 20x_2 \geq 300$

$25x_1 + 25x_2 \geq 500$

$x_1, x_2 \geq 0$

যেহেতু বাধা সমীকরণ $\geq$ ধরনের ও $x_1, x_2 \geq 0$ সুতরাং সম্ভাব্য সমাধান অঞ্চল S হবে উত্তর পূর্ব দিকে।

B বিন্দু প্রাপ্ত হয় $10x_1 + x_2 = 300$ ও $25x_1$ ও $25x_2 = 500$ এর পারস্পরিক সমাধানে।

এখন A বিন্দুতে ব্যয় ঃ $8000 \times 20 = 160000$ টাকা

B বিন্দুতে ব্যয় ঃ $10000 \times 10 + 8000 \times 10 = 180{,}000$ টাকা

C বিন্দুতে ব্যয় ঃ $10000 \times 30 = 300000$ টাকা।

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান হলো ফ্যাক্টরী 2 কে 20 ঘণ্টা চালানো যাতে ন্যূনতম খরচ = 160,000 টাকা হয়।

রৈখিক প্রোগ্রামিং-এ দ্বৈততা (Duality in Linear Programming) :

চরম ও অবম মান সংক্রান্ত প্রত্যেকটি রৈখিক প্রোগ্রামিং-এর সমস্যাকেই প্রাতিষঙ্গিক অবম ও চরম মান সংক্রান্ত রৈখিক প্রোগ্রামিং-এ রূপান্তর করা যায়। মূল সমস্যাকে (Primal) প্রাইম্যাল সমস্যা ও সহকারী রূপান্তরকে দ্বৈত (Dual) সমস্যা বলা হয়।

n সংখ্যক চলরাশির ক্ষেত্রে উভয় সমস্যাকে দেখানো হল ঃ

Maximise $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots\ldots + C_nx_n$

Subject to :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots. + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$$

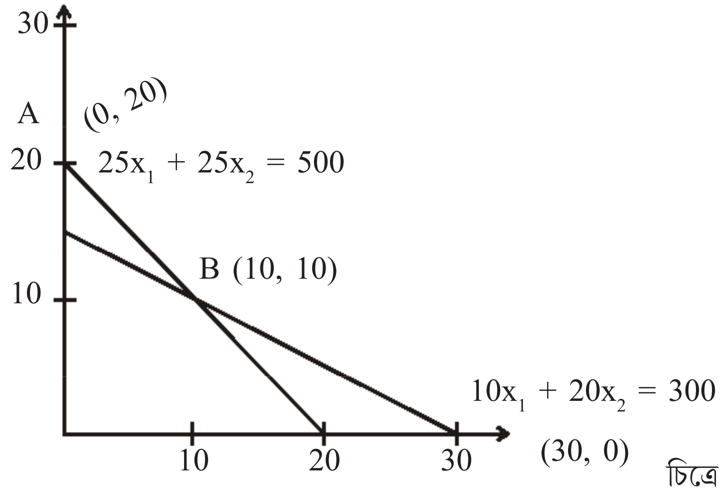
....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x1, ..., xn \geq 0$$

ম্যাট্রিক্সের গঠন অনুসারে ঃ

Max $Z = C' x$



চিত্রে 9.8

subject to : $Ax \leq b$

$X \geq 0.$

যেখানে

এর দ্বৈতরূপ হল ঃ u1, u2, ..., um এই চলরাশির মান নির্ণয় করা যেখানে

Minimize $Z^* = b_1u_1 + b_2u_2 + ... + b_mu_m$

subject to : $a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + ... + a_{m1}u_m \geq c_1$

$$a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + ... + a_{m2}u_m \geq c_2$$

....

$$a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + ... + a_{mn}u_m \geq c_m$$

$u_i \geq 0 \ \forall i = 1, 2, ..., m.$

ম্যাট্রিক্সের গঠনানুযায়ী ঃ $Z^* = b'u$

subject to $A' \underset{\sim}{U} \geq C' \quad \underset{\sim}{U} \geq 0$

$x_1, x_2, ..., x_n$ ও $u_1, u_2, ..., u_n$ হলো যথাক্রমে প্রাইম্যাল ও ডুয়াল চলরাশি।

রৈখিক প্রোগ্রামিং এর তিনটি প্রধান উপপাদ্য ঃ

(১) যদি $(x_1, x_2, ..., x_n)$; প্রাইম্যাল সমস্যার সম্ভাব্য সমাধান ও $(u_1, u_2, ..., u_n)$, দ্বৈত সমস্যায় ফিজিবল হয় তাহলে

$b_1u_1 + ... + b_mu_m > c_1x_1 + ... + c_nx_n$

অর্থাৎ দ্বৈত উদ্দেশ্য অপেক্ষকের মান সর্বদা প্রাইম্যালের অন্তত সমান বা ছোট হবে না। (Dual objective function has a value that is always at least as great as that of the primal).

(২) ধরা যাক $(x_1^*, ..., x_n^*)$ এবং $(u_1^*, ..., u_m^*)$ প্রাইম্যাল ও দ্বৈত সমস্যায় ফিজিবল; তাহলে

$$C_1x_1^* + ... + C_nx_n^* = b_1u_1^* + ... + b_mu_m^*$$

যেখানে $(x_1^*, ..., x_n^*)$ প্রাইম্যাল সমস্যার সমাধান ও $(u_1^*, ..., u_m^*)$ দ্বৈত সমস্যার সমাধান।

(৩) ডুয়ালিটি উপপাদ্য (Duality Theorem) : যদি প্রাইম্যাল সমস্যার একটি সসীম সর্বোত্তম সমাধান (finite optimal solution) তাহলে দ্বৈত সমস্যার ক্ষেত্রেও তা থাকবে। এবং উভয়ক্ষেত্রেই উদ্দেশ্য অপেক্ষকের প্রাতিষঙ্গিক মানগুলি সমান হবে। যদি প্রাইম্যালের কোনো সীমাবদ্ধ সর্বোত্তম মান (founded optimum) না থাকে তাহলে দ্বৈত সমস্যারও তা থাকবে না।

উদাহরণ 9.6.2 ঃ প্রদত্ত LPP র দ্বৈততা নির্ণয় করো।

Minimize $Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$

Subject to : $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 1$

$6x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4$

$7x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 3$

$4x_1 + 7x_2 - 2x_3 \geq 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

সমাধান ঃ প্রদত্ত LPP টি ম্যাট্রিক্সের আকারে প্রকাশ করলে হবে ঃ

Minimize Z = C'X subject to $AX \geq b$ $X \geq 0$

$$C=\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \quad A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 4\\6 & 1 & 3\\7 & 2 & 5\\4 & 7 & -2\end{bmatrix}$$

যেখানে

যদি u_1, u_2, u_3, u_4 ডুয়্যাল চলরাশি হয় তবে দ্বৈত সমস্যা হবে ঃ

Maximize $W = b'U$

subject to $A'U \le C,\ U \ge 0$

এখানে $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$

এবং সমস্যাটি প্রকাশ করা হবে ঃ

Maximize $W = u_1 + 4u_2 + 3u_3 + 2u_4$

subject to $3u_1 + 6u_2 + 7u_3 + 4u_4 \le 3$

$5u_1 + u_2 + 2u_3 + 7u_4 \le 2$

$4u_1 + 3u_2 + 5u_3 - 2u_4 \le 4$

$u_1, u_2, u_3, u_4 \ge 0$

9.7 কিছু অতিরিক্ত বিষয়

ধরা যাক f অপেক্ষকের পরিসরে (domain) যা একটি উত্তল সেট; u এবং v দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু নেওয়া হলো। এবার ধরা যাক uv রেখাংশ ঐ অপেক্ষকের লেখচিত্রে MN চাপ সৃষ্টি করলো এমনভাবে যাতে N বিন্দু, M বিন্দু অপেক্ষা উচ্চতায় বড় বা সমান। এই অপেক্ষকটি আধা অবতল (আধা উত্তল) হবে যদি MN চাপের উপর M ও N ব্যতীত সকল বিন্দু M বিন্দু অপেক্ষা উচ্চতায় বড় বা সমান (N বিন্দু অপেক্ষা উচ্চতায় ছোট বা সমান) হয়। অপেক্ষকটি কঠোর আধা অবতল (আধা উত্তল) হবে যদি MN চাপের উপর M ও N ব্যতীত সকল বিন্দু কঠোরভাবে M বিন্দু অপেক্ষা অধিক উচ্চ (কঠোরভাবে N বিন্দু অপেক্ষা উচ্চতায় ছোট) হয়।

নিম্নের চিত্রে ধারণাটি স্পষ্ট করা হলো।

চিত্র 9.9a তে দেখা যাচ্ছে uv এই রেখাংশ অপেক্ষকের পরিসরে এমনভাবে MN চাপের সৃষ্টি করছে যাতে N বিন্দু M বিন্দু অপেক্ষা উচ্চতায় ছোট। অর্থাৎ M ও N এর মধ্যে চাপের উপর অবস্থিত সবকটি বিন্দু M অপেক্ষা অধিক উঁচু। অর্থাৎ অপেক্ষকটি কঠোর আধা অবতল। আবার চিত্র 9.9b তে M′N′ চাপের উপর অবস্থিত সবকটি বিন্দুই N′ অপেক্ষা কম উঁচু। এই অপেক্ষকটি হবে আধা উত্তল। চিত্র 9.9c তে M″ N″ একটি অনুভূমিক রেখা আছে যেখানে M″N″ এ অবস্থিত সবকটি বিন্দুই সমান উঁচু। এই অপেক্ষকটি আধা অবতল কিন্তু কঠোর আধা অবতল নয়।

9.8 আধা অবতল অপেক্ষক

কোনো অপেক্ষক f আধাঅবতল হবে, কেবলমাত্র যদি u এবং v, f অপেক্ষকের পরিসরে দুটি যে

কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুজোড়ার, (উত্তল সেটে সংজ্ঞায়িত) সাপেক্ষে এবং $0 < \theta < 1$ র ক্ষেত্রে ঃ

$$f(v) \geq f(u) \geq f[\theta u + (1-\theta)v] \geq f(u)$$

এবং আধা উত্তল হবে যদি $f(v) \geq f(u) \geq f[\theta u + (1-\theta)v] \geq f(v)$ হয়। কঠোর আধা অবতল বা কঠোর আধা উত্তলের ক্ষেত্রে দুর্বল অসমতা > বা < এর পরিবর্তে কঠোর অসমতা (Strict inequality) > বা < যথাক্রমে ব্যবহৃত হয়।

যদি f(x) আধা অবতল বা কঠোর আধা অবতল হয় তাহলে –f(x) হবে আধা উত্তল বা কঠোর আধা উত্তল।

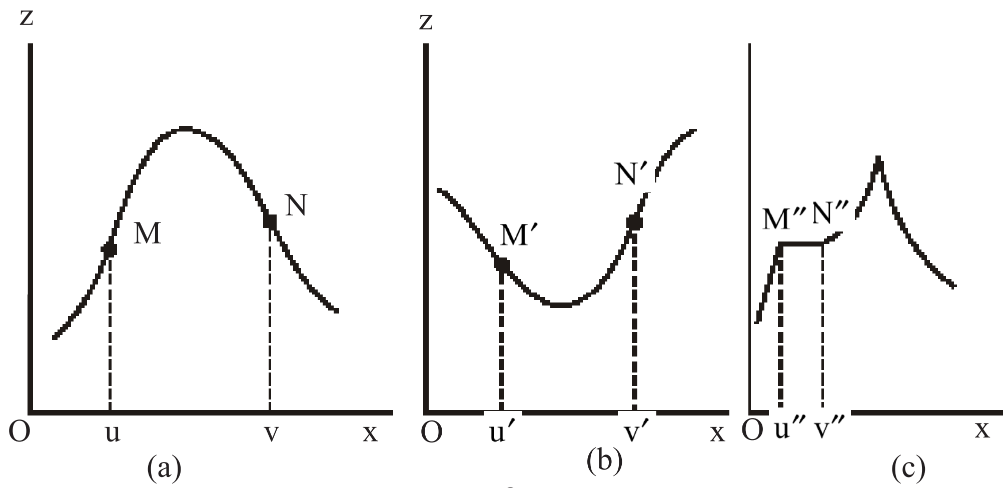
যে কোনো অবতল (উত্তল) অপেক্ষক, আধা অবতল (আধা উত্তল) হবে কিন্তু উল্টোটা সত্যি নয়। আবার যে কোনো কঠোর অবতল (কঠোর উত্তল) অপেক্ষক কঠোর আধা অবতল (কঠোর আধা উত্তল) হবে কিন্তু উল্টোটা সত্যি নয়।

যদি f(x) একটি সরলরৈখিক অপেক্ষক হয় তবে তা আধা অবতল এবং আধা উত্তল হবে।

9.9 আধা অবকলের বীজগাণিতিক সংজ্ঞা

যদি $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ একটি দুইবার ক্রমাগত অবকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় তাহলে আধাঅবতলতা বা আধা উত্তলতা তার প্রথম ও দ্বিতীয় আংশিক অবকলের মাধ্যমে নির্ধারণ করা যায়।

বর্ডারকৃত হেসিয়ান নিরাপদ ব্যবহার করে ঃ



চিত্র 9.9

$$|B| = \begin{bmatrix} 0 & f_1 & f_2 & ..... & f_n \\ f_1 & f_n & f_{12} & ..... & f_{1n} \\ \vdots \\ f_n & f_{n1} & f_{n2} & ..... & f_{nn} \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ এক্ষেত্রে |B| কেবলমাত্র f এর অবকলগুলির উপর নির্ভরশীল। $Z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ আধা অবতল হবে যদি তার আবশ্যিক শর্ত পূরণ হয় যা হলো

$$|B| \le 0,\ |B_2| \ge 0 .....\ \ |B_n| \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \end{Bmatrix} 0$$ যদি n বিজোড় জোড় হয়।

আবার f কঠোর আধা অবতল হবে যদি $|B| < 0$ $|B_2| > 0$ ...... $|B_n| < 0$ যদি n বিজোড় এবং যদি n জোড় হয় এক্ষেত্রে $|B_1|$, $|B_2|$ ...... $|B_n|$ হলো |B| এর মুখ্য মাইনর বা ঃ

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_{11} \end{vmatrix} \quad |B_2| = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} .... |B_n| = |B|$$

উদাহরণ 9.9.1 ঃ দেখাও যে $f(x_1, x_2,) = x_1x_2^2$ যা এর উপর সংজ্ঞায়িত সেটি আধা অবতল।

সমাধান ঃ এখানে $|\bar{H}_2|$ বা $|\bar{B}_2| = |\bar{B}|$

$$= \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_2^2 & 2x_1x_2 \\ x_2^2 & 0 & 2x_2 \\ 2x_1x_2 & 2x_2 & 2x_1 \end{vmatrix}$$

$$= -x_2^2(2x_1x_2^2 - 4x_1x_2^2) + 2x_1x_2(x_2^2 2x_2) = 6x_1x_2^4 > 0$$ যখন $x_1, x_2 > 0$

সুতরাং f কঠোর আধা অবতল।

উদাহরণ 9.9.2 ঃ দেখাও যে $\mathbb{R}^3_{++}$ এর উপর সংজ্ঞায়িত $y = x_1^{1/4}\ x_2^{1/3}\ x_3^{1/4}$ আধাঅবতলতার শর্তপূরণ করে।

সমাধান ঃ $|\bar{H}_2| = \frac{7}{144} x_1^{5/4}\ x_2^{5/4}\ x_3^{3/4} > 0$ এবং $1\bar{H}_3 = \bar{H} < 0$

$$H = -f_1 \begin{vmatrix} f_1 & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} + f_2 \begin{vmatrix} f_1 & f_{11} & f_{13} \\ f_2 & f_{21} & f_{23} \\ f_3 & f_{31} & f_{33} \end{vmatrix} - f_1 \begin{vmatrix} f_1 & f_{11} & f_{12} \\ f_2 & f_{21} & f_{22} \\ f_3 & f_{31} & f_{33} \end{vmatrix}$$

প্রথম পদ ঃ $-f_1 \frac{12}{576}\ x_1^{-1/4}\ x_2^{-1/2}\ x_3^{-5/4}$

বাকী দুই পদ যদি সরল করা যায় তাহলে $|\bar{H}|<0$ হয়। সুতরাং f আধা অবতল হয়।

9.10 এনভেলপ উপপাদ্য

ধরা যাক f হলো একটি অপেক্ষক যা একটি চলরাশির উপর ও একটি স্থিতিমাপ বা প্যারামিটারের উপর নির্ভর করে, যে দুটি হলো যথাক্রমে x ও α। এবার যদি f(x, a) কে চরম বা অবম করা হয় x এর সাপেক্ষে, α কে স্থির রেখে অর্থাৎ max(min)xf(x, α) করা হয় তাহলে x এর যে মান f কে সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন করে তা α এর উপর নির্ভর করে। ধরা যাক সেই মান হলো x*(α)। এই x*(α) যদি f(x, α) তে বসানো হয় তাহলে f*(α) = f(x*(α), α) পাওয়া যাবে যাকে বলা হয় মূল্য অপেক্ষক (value function) যদি f*(r) অবকলনযোগ্য হয়, তাহলে চেইন নিয়মের (chain rule) ফলে

$$\frac{df^*(\alpha)}{d\alpha}=f_1'(x^{\forall}(\alpha),\alpha)\frac{d(x^*(\alpha))}{d\alpha}+f_2'(x^*(\alpha),\alpha)$$

প্রাপ্ত হবে। এখন যদি x পরিবর্তনের পরিসরে, x*(α) এই বিন্দুতে f(x, α) এর চূড়ান্ত মান হয় (extreme point) তাহলে হবে।

$$\therefore\ \frac{df^{\forall}(\alpha)}{d\alpha}=r$$ এর পরিবর্তনের ফলে মূল্য অপেক্ষকের পরিবর্তন $=f_2'(x^*(\alpha),\alpha)$

α পরিবর্তনের ফলে f*(α) এই মান অপেক্ষক দুটি কারণে পরিবর্তিত হয়। প্রথমতঃ যেহেতু f(x, α) মধ্যে দ্বিতীয় চলরাশি α তাই α যখন পরিবর্তিত হয় তখন f* সরাসরি পরিবর্তিত হয়। আবার দ্বিতীয়তঃ a র পরিবর্তনের ফলে x*(α) অর্থাৎ অপেক্ষকটির মূল্য পরিবর্তিত হয় এবং ফলস্বরূপ f(x*(α), α) ও পরোক্ষভাবে পরিবর্তিত হয়। উপরিল্লিখিত ফর্মূলা (1) থেকে দেখা যাচ্ছে যে সম্পূর্ণ ফলাফল f(x* (α), α) কে α র সাপেক্ষে আংশিক অবকলন করলেই পাওয়া যাবে এবং x* এর α র উপর নির্ভরশীলতার পরোক্ষ প্রভাবটি ধরা হচ্ছে না।

এনভেলপ উপপাদ্য টি হলো ঃ যদি f(α) = $\max_x$f(x, α) এবং যদি x*(α) ; x এর সেই মান যা f(x, α) কে সর্বাধিক করে হয়, তাহলে

$$\frac{\partial f^*(\alpha)}{\partial r_j}=\left[\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial r_j}\right]_{x=x^*(\alpha)}\quad j=1,\ldots,k$$

যদি আংশিক অবকলের অস্তিত্ব থাকে।

এবার vector notation ব্যবহার করে x= (x1, ..., xn) এবং a = (a1, ..., ak) হয় এবং বাধাযুক্ত অপ্টিমাইজেশন সমস্যা যদি হয় max(min)x f(x, a) subject to g ; (x, r) = 0 j = 1, ..., m তাহলে এনভেলপ উপপাদ্য অনুযায়ী ঃ

$$\frac{\partial f^*(\alpha)}{\partial \alpha_i}=\left[\frac{\partial L(x,\alpha)}{\partial \alpha_i}\right]_{x=x^*(\alpha)}\quad i=1,\ldots,k$$

9.11 ল্যাগ্রাঞ্জ গুণাঙ্কের ব্যাখ্যা

একটি বাধাযুক্ত চরম সমস্যা গণ্য কার যাক ঃ

maximize $f(x_1, x_2) = y$ subject to $g(x_1, x_2) = k$ ল্যাগ্রাঞ্জিয়ান অপেক্ষক ঃ

$$L = f(x_1, x_2) + \lambda[k - g(x_1, x_2)]$$

প্রথম বর্গীয় সমীকরণ ঃ $L_1 = f_1(x_1, x_2) - \lambda g(x_1, x_2) = 0$

$$L_2 = f_2(x_1, x_2) - \lambda g_2(x_1, x_2) = 0$$

$$L_\lambda = k - g(x_1, x_2) = 0$$

তিনটি সমীকরণ থেকে পাওয়া যাবে ঃ

$$\lambda = \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$$

এখন খাম উপপাদ্যের মাধ্যমে λ কে আরও বিশদভাবে ব্যাখ্যা করা যাবে। যদি প্রথম বর্গীয় তিনটি সমীকরণ থেকে x_1, x_2, λ এর মান নির্ণয় করা যায় তাহলে তিনটি পছন্দ অপেক্ষক (explicit choice function) পাওয়া যাবে যা হলো ঃ $x_1*(k)$, $x_2*(k)$ ও $\lambda*(k)$ এবং এর উপর ভিত্তি করে উদ্দেশ্য অপেক্ষক হবে ঃ $\phi(k) = f(x_1*(k), x_2*(k))$ বাধাযুক্ত চরম অবস্থার মডেলে এনভেলপ উপপাদ্য প্রয়োগ করল ঃ

$$\phi_k(k) = \frac{\partial L}{\partial K} = \lambda*(k)$$

অর্থাৎ ল্যাগ্রাঞ্জ গুণাঙ্ক হলো ঃ যে হারে বাধা বা constraint এর প্যারামিটার পরিবর্তনের ফলে উদ্দেশ্য অপেক্ষকের চরম (বা অবমের ক্ষেত্রে ন্যূনতম) মানের পরিবর্তন হয় সেই নির্দিষ্ট হারই হলো ল্যাংগ্রাঞ্জ গুণাঙ্ক।

উদ্দেশ্য অপেক্ষক যদি $U = U(x_1, x_2)$ এই উপযোগিতা অপেক্ষক হয় এবং বাধা সমীকরণ হয় $M = p_1x_1 + p_2x_2$ এই বাজেট সমীকরণ;

$L = U(x_1, x_2) + \lambda\ [M - p_1x_1 - p_2x_2]$

$L_1 = U_1 - \lambda p_1 = 0$ $\qquad$ $L_2 = U_2 - \lambda p_2 = 0$

$L_\lambda = N - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$ হলো প্রথম বর্গীয় অবস্থা, যেখানে U কে চরম মানে উত্তীর্ণ করা হলো নির্ধারিত অপ্টিমাইজেশন সমস্যা।

এক্ষেত্রে যথেষ্ট শর্ত হলো বর্ডারযুক্ত হেসিয়ান নির্ণায়ক অর্থাৎ

প্রথম বর্গীয় শর্ত সমাধান করলে পাওয়া যায়

$x_1* = x_1^M\ (p_1, p_2, M)$

$x_2^* = x_2^M\ (p_1, p_2, M)$

$\lambda^* = \lambda^M\ (p_1, p_2, M)$

এখানে x_1^* ও x_2^* কে বলা হয় স্থির আর্থিক আয় ভিত্তিক চাহিদা অপেক্ষক (Money income held constant demand curves) বা মার্শেলীয় চাহিদা অপেক্ষক।

যদি এই চাহিদা অপেক্ষক দুটি উপযোগিতা অপেক্ষকে বসানো হয় তাহলে ঃ

$U^*\ (p_1, p_2, M) = U[x_1^M\ (p_1, p_2, M), x_2^M\ (p_1, p_2, M)]$ কে বলে পরোক্ষ উপযোগিতা অপেক্ষক বা Indirect utility function.

$$\frac{\partial U^*}{\partial M} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial x_1^M}{\partial M} + \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial x_2^M}{\partial M} = U_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M} + U_2\frac{\partial x_2^M}{\partial M}$$

প্রথম বর্গীয় শর্তভিত্তিক সমীকরণ থেকে ঃ $U_1 = \lambda^M p_1$ ও $U_2 = \lambda^M p_2$

$$\therefore\ \frac{\partial U^*}{\partial M} \equiv \lambda^M\left(p_1\frac{\partial x_1^M}{\partial M} + p_2\frac{\partial x_2^M}{\partial M}\right) \quad .....(1)$$

বাজেট সীমা ঃ $M = p_1x_1 + p_2x_2$

$$\frac{\partial M}{\partial M} = p_1\frac{\partial x_1}{\partial M} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial M} \qquad 1 = p_1\frac{\partial x_1}{\partial M} + p_2\frac{\partial x_2}{\partial M}$$

(1) এ প্রতিস্থাপন করে $\dfrac{\partial U^*}{\partial M} = \lambda^M$

এনভেলপ উপপাদ্য অনুসারে ঃ $\dfrac{\partial U^*}{\partial M} = \dfrac{\partial L}{\partial M} = \lambda^M$

λ^M হলো আর্থিক আয়ের প্রান্তিক উপপাদ্য।

উদাহরণ 9.11.1 ঃ ধরা যাক $f(x, y, \alpha) = \alpha x^2 - 2x + y^2 - 4\alpha y$

যেখানে α হলো একটি প্যারামিটার। প্রত্যেকটি স্থির α এর জন্য $[x^*(\alpha), y^*(\alpha)]$ এর মান নির্ণয় করো যা f অপেক্ষককে (x, y) এর সাপেক্ষে স্থিতাবস্থায় (stationary) আসবে। $f^*(\alpha) = f[x^*(\alpha), y^*(\alpha), \alpha]$ এই মান অপেক্ষক (value function) নির্ণয় করো এবং এই ক্ষেত্রে এনভেলপ উপপাদ্যটি পরীক্ষা করো।

সমাধান ঃ $f(x, y, \alpha) = \alpha x^2 - 2x + y - 4\alpha y$

প্রথম বর্গীয় শর্তানুসারে ঃ $f'x(x, y, \alpha) = 2\alpha x - 2 = 0$

$$f'y(x, y, \alpha) = 2y - 4\alpha = 0$$

সমাধান করলে $x = x^*(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$

$$y = y^*(\alpha) = 2\alpha$$

সুতরাং মান অপেক্ষক হল ঃ

$$f^*(\alpha) = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\alpha}\right) + (2\alpha)^2 - 4\alpha(2\alpha) = -\left(\frac{1}{\alpha}\right) - 4\alpha^2$$

$$\frac{d}{d\alpha}f^*(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} - 8\alpha$$

আবার $\dfrac{\partial}{\partial\alpha}[f(x, y, \alpha)] = x^2 - 4\alpha = \dfrac{1}{\alpha^2} - 8\alpha$; হয় $[x^*(\alpha), y^*(\alpha)]$ বিন্দুতে।

সুতরাং $\dfrac{d}{d\alpha}f^*(\alpha) = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}[f(x, y, \alpha)] = \dfrac{1}{\alpha^2} - 8\alpha$ এনভেলপ উপপাদ্য প্রমাণ করে।

9.12 সংক্ষিপ্তসার

সমগ্র অধ্যায়টিতে বহুচলক বিশিষ্ট অপেক্ষকের উত্তলতার ধারণা, অপ্টোমাইজেশনের ধারণা ও শর্ত, আধা অবকল অপেক্ষক, রৈখিক প্রোগ্রামিং ইত্যাদি বিষয়ক আলোচনা করা হয়েছে।

9.13 প্রশ্নবলী

১। নীচের প্রশ্নগুলির প্রতিটির মান 10

(ক) যদি উপযোগীতা অপেক্ষক হয় $u = x^{0.6}\ y^{0.25}$ এবং $P_x = 8$, $P_o = 5$ আর ব্যক্তির আয় $M = 680$ হয় তাহলে প্রদত্ত বাজেট রেখার সাপেক্ষে উপযোগীতা অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করো এবং যে সংকটবিন্দু গুলির মানের জন্য অপেক্ষকটি সর্বোচ্চ হয়, সেই মানগুলি কি কি?

(২) একজন একচেটিয়া কারবারী দুটি সম্পর্কিত দ্রব্য প্রস্তুত করে যাদের চাহিদা অপেক্ষক হলো $P1 = 80 - 5Q_1 - 2Q_2$, $P_2 = 50 - Q_1 - 3Q_2$ এবং মোট ব্যয় $C = 3Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$. কারবারী মুনাফা সর্বোচ্চকারী দ্রব্যগুলির পরিমাণ এবং দামগুলি নির্ণয় করো।

(৩) নিচের সমস্যাটির লেখচিত্রভিত্তিক সমাধান নির্ণয় করো।

Maximize $R = q_1 + 2q_2$
subject to : $q_1 + q_2 \leq 8$

$2q_1 + q_2 \leq 14$

$q_1, q_2 \geq 0$

(৪) নিচের সমস্যাটি বিবেচনা করো ঃ

Maximize $3x_1 + 4x_2$

subject to : $x_1 + x_2 \leq 10$

$2x_1 + 3x_2 \leq 18$

$x_1 \leq 8$

$x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

যদি $y_1^* = 0$, $y_2^* = 4/3$, $y_3^* = 1/3$ ও $y_4^* = 0$ এর দ্বৈত সমস্যায় সমাধান হয় তাহলে প্রাথমিক বা primal সমস্যার সমাধান নির্ণয় করো ও দ্বৈততা উপপাদ্য (Quality theorem) পরীক্ষা করো।

(৫) যদি মুনাফা $p = 64x - 2x^2 + 96y - 4y^2 - 13$ হয় তাহলে $x + y = 36$ এই অসমতাভিত্তিক উৎপাদন সীমার সাপেক্ষে মুনাফা সর্বোচ্চকারী x, y এর মান নির্ণয় করো।

9.14 গ্রন্থপঞ্জি

1. Simon and Bluue
2. Renshaw
3. Chaing
4. Tekayana
5. Intrilligator M D (1971) : Mathematical optimisatiri and Economic Theory, Preutice Hall, Inc.

একক 10 ❑ সমাকলন ও তার অর্থনৈতিক প্রয়োগ

গঠন

10.1 উদ্দেশ্য

10.2 প্রস্তাবনা

10.3 সমাকলন

10.3.1 সংজ্ঞা

10.3.2 বিপরীত অবকল বা অন্তরকলন হিসেবে সমাকলন

10.3.3 সমাকলনীয় ধ্রুবক

10.3.4 সমাকলনের নিয়মাবলী

10.3.5 পরিবর্ত বা প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাকলন

10.3.6 অংশভিত্তিক সমাকলন

10.3.7 আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন

10.4 নির্দিষ্ট সমাকল

10.4.1 সংজ্ঞা

10.4.2 যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা

10.4.3 সমাকলের মৌলিক উপপাদ্য

10.4.4 নির্দিষ্ট সমাকলের ধর্মসমূহ

10.4.5 বক্ররেখাগুলির অন্তবর্তী ক্ষেত্রফলের পরিমাপ

10.4.6 সঙ্গতিবিহীন বা অসংগত সমাকল

10.4.7 লাইপিটালের নিয়ম

10.5 সারাংশ

10.6 অনুশীলনী

10.7 গ্রন্থপঞ্জি

10.1 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করলে ছাত্রছাত্রীরা জানতে পারবেন

- সমাকলনের তাৎপর্য ও নিয়মাবলী
- সমাকলের ধর্মসমূহ
- অর্থনীতিতে সমাকলনের ব্যবহার।

10.2 প্রস্তাবনা

অন্তরকলনের বিপরীত প্রক্রিয়াকে সমাকলন বলে। অর্থাৎ অন্তরকলনের মাধ্যমে প্রাপ্ত ফলাফল থেকে মূল অপেক্ষক নির্ণয় করা হয় সমাকলনের মাধ্যমে। সমাকলন মৌলিকভাবে পদার্থ বিজ্ঞান ও অর্থনীতির ক্ষেত্রে গুরুত্বপূর্ণ। অর্থনীতির বিভিন্ন প্রান্তিক ধারণাসমূহ যেমন প্রান্তিক আয়, প্রান্তিক ব্যয় ইত্যাদি থেকে মোট ধারণা যেমন মোট আয়, মোট ব্যয় ইত্যাদি নির্ণয় করা হয় সমাকলনের মাধ্যমে।

10.3 সমাকলন

10.3.1 সংজ্ঞা

x চলের একটি প্রদত্ত আপেক্ষক f(x) এর জন্য যদি x চলের অপর একটি অপেক্ষক F(x) এমনভাবে নির্ণয় করা যায় যে, x এর সাপেক্ষে F(x) এর অন্তরকলজ f(x) এর সমান বা F(x) এর অবকল f(x)dx এর সমান, তাহলে F(x) কে (x) এর সাপেক্ষে f(x) এর একটি অনির্দিষ্ট সমাকল (indefinite integral) বলা হয় এবং তাকে $\int f(x)dx=F(x)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এক্ষেত্রে, F(x) নির্ণয় করার পদ্ধতিকে সমাকলন (integration) এবং f(x) কে সমাকল্য (integrand) বলা হয়। সমাকলন প্রকাশ করার জন্য '$\int$' প্রতীককে সমাকলনের চিহ্ন এবং dx অবকল দ্বারা বোঝানো হয় যে, সমাকলনের চলরাশি হলো x; $\int f(x)dx$ প্রতীকটিকে f(x)dx এর সমাকল—এভাবে পড়া হয়।

10.3.2 বিপরীত অবকলন বা অন্তরকলন হিসেবে সমাকলন

স্যার আইজাক নিউটনসহ আরও ককেজন গণিতজ্ঞ একটি প্রশ্নের উত্তর দিয়েছিলেন—"কোনও মধ্যান্তর (interval) [a, b] -তে একটি অপেক্ষক f সংজ্ঞত হলে ওই অপেক্ষকের সকল বিন্দু x এর জন্য কি ওই মধ্যান্তরে এমন অপেক্ষক f-এর অস্তিত্ব থাকবে যেখানে $F'(x) = f(x)$ হবে? এবং যদি এমন অপেক্ষক F এর অস্তিত্ব থাকে তবে F কি অদ্বিতীয় হবে?

গণিতজ্ঞরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছিলেন যে [a, b] এই সীমা ও মধ্যান্তরে f অপেক্ষক সংজ্ঞত হলে ওই সীমার সকল বিন্দু x এর জন্য সবসময় একটি অপেক্ষক f পাওয়া যাবে না যেখানে $F'(x)=f(x)$ হবে। কিন্তু যদি f অপেক্ষকটি [a, b] মধ্যান্তর বা সীমায় সন্তত হয়, তবে সেক্ষেত্রে [a, b] মধ্যান্তরের সকল বিন্দু x এর জন্য F অপেক্ষকের অস্তিত্ব থাকবে যেখানে $F'(x)=f(x)$ হবে।

যখন [a, b] মধ্যাঞ্চলে এরূপ একটি অপেক্ষক F এর অস্তিত্ব থাকবে তখন আমরা f অপেক্ষক থেকে F অপেক্ষক নির্ণয় করার পদ্ধতিকেই অবকলনের বিপরীত পদ্ধতি হিসাবে গণ্য করতে পারি। অবকলনের এই বিপরীত পদ্ধতি থেকেই সমাকলন পদ্ধতির সূত্রপাত হয়। [a, b] মধ্যান্তরে সংজ্ঞাত কোনও অপেক্ষক f এর জন্য যদি এমন একটি অপেক্ষক F-এর অস্তিত্ব থাকে যেখানে [a, b] অন্তরালের সকল বিন্দু x-এর জন্য $F'(x)=f(x)$ হয়, তবে F কে [a, b] অন্তরালে f এর অনির্দিষ্ট সমাকল বা বিপরীত অন্তরকলজ (anti derivative) বলা হল এবং লেখা হয় $F(x) = \int f(x)dx,\ x\in[a, b]$। অর্থাৎ, $F(x) = \int dF(x)$। তাহলে দেখা গেল যে f অপেক্ষক থেকে F অপেক্ষক নির্ণয়ের পদ্ধতিই হোলো সমাকলন যেখানে f অপেক্ষক হোলো সমাকল্য। '∫' এই চিহ্নটি ইংরাজি বর্ণমালার S অক্ষর থেকে এসেছে কারণ সমাকলনের তত্ত্বের প্রাথমিক বর্ণনায় যোগফল (Summation) বোঝাতে S অক্ষরটি ব্যবহৃত হয়েছিল। সমাকলনের এই চিহ্নটি ইংরাজি S অক্ষরের দীর্ঘায়িত রূপ (elongated form)। বিপরীত অবকলন হিসাবে সমাকলনের ধারণাটি বর্ণনা করতে কিছু উদাহরণ দেওয়া হোলো

উদাহরণ 10.3.1 : যেহেতু

এখানে $f(x) = x^{n-1}$; $(n\geq1)$ কে সমাকল্য এবং কে x^{n-1}, $(n\geq1)$ এর অনির্দিষ্ট সমাকল বলা হয়।

উদাহরণ 10.3.2 : যেহেতু $\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$ এবং

সুতরাং

এখানে সমাকল্য এবং এর $(x\neq0)$ অনির্দিষ্ট সমাকল $F(x) = \log_e|x|$

10.3.3 সমাকলনীয় ধ্রুবক

দ্বিতীয় যে প্রশ্নটি পূর্বোক্ত আলোচনায় ছিল অর্থাৎ [a, b] মধ্যাঞ্চলে f অপেক্ষকের অনির্দিষ্ট সমাকল থাকলে তা অদ্বিতীয় হবে কিনা, তার উত্তরে দেখা যাবে যে [a, b] মধ্যাঞ্চলে f অপেক্ষকের অনির্দিষ্ট সমাকল F হলে

ওই অন্তরালে (x) = f(x) হবে এবং যে কোনও বাস্তব ধ্রুবক c এর জন্য

= f(x) ; $x \in [a, b]$

স্পষ্টতই, c এর যে কোনও বাস্তব মানের জন্য f(x) এর অনির্দিষ্ট সমাকল হবে F(x)+c। সুতরাং, f অপেক্ষকের যদি একটি অনির্দিষ্ট সমাকল পাওয়া যায় তবে তার অসংখ্য অনির্দিষ্ট সমাকল থাকবে, অর্তাৎ কোনও অপেক্ষকের যদি অনির্দিষ্ট সমাকলের অস্তিত্ব থাকে, তবে তা কখনই অদ্বিতীয় (unique) নয়।

উদাহরণস্বরূপ

$\therefore \int 3x^2 dx = x^3 + c$

(ii)

অতএব প্রতিটি অপেক্ষকের অনির্দিষ্ট সমাকলে যে ধ্রুবক c থাকছে, তাকে সমাকলন ধ্রুবক বলা হয়।

তাহলে দেখা গেল যে c যদি x নিরপেক্ষ একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক (arbitrary constant) হয়, তবে

হলে

হবে।

সমাকলনের সংজ্ঞানুসারে $\int f(x)\, dx = F(x) + c$

এক্ষেত্রে $\int f(x)\, dx$ এর সাধারণ সমাধান [F(x) + c] হোলো একটি অনির্দিষ্ট সমাকল এবং x নিরপেক্ষ অনির্দিষ্ট ধ্রুবক c কে সমাকলন ধ্রুবক বলা হয়।

যেহেতু সুতরাং বোঝা গেল যে যখন F(x) অপেক্ষককে x এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করা হয়, তখন কেবল একটি নির্দিষ্ট সমাধান পাওয়া যায়; কিন্তু $\int f(x)\, dx = F(x) + c$ বলে f(x) অপেক্ষকের x এর সাপেক্ষে সমাকলন করা হলে F(x)+c আকারে অসংখ্য সমাধান পাওয়া সম্ভব (অনির্দিষ্ট ধ্রুবক c এর বিভিন্ন মান নিয়ে)। এজন্য, $\int f(x)\, dx$ কে x এর সাপেক্ষে f(x) এর অনির্দিষ্ট সমাকল বলা হয়। অবশ্য কোনো প্রদত্ত শর্তের পরিপ্রেক্ষিতে যদি c এর একটি নির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়, তবে সেক্ষেত্রে সমাকলের একটি নির্দিষ্ট

মান পাওয়া যাবে।

অর্থাৎ লক্ষণীয় যে c যদি x নিরপেক্ষ অনির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং হয় তবে সংজ্ঞানুসারে, $\int f(x)\, dx = F(x) + c$

কিন্তু

$= f(x) +$ একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক

সুতরাং সহজেই বোঝা যায় যে, এবং এই দুটির মান সাধারণভাবে সমান নাও হতে পারে।

$f(x)$ ও $\phi(x)$ অপেক্ষক দুটি এমন হয় যে তাহলে, $f(x) - \phi(x) = c$ হবে যেখানে c একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক।

প্রমাণ যেহেতু,

or, $f(x) + c_1 = \phi(x) + c_2$ [c_1 ও c_2 অনির্দিষ্ট ধ্রুবক]

or, $f(x) - \phi(x) = c_2 - c_1 = c$

(যেখানে $c = c_2 - c_1$ হলো অনির্দিষ্ট ধ্রুবক)

এই ফল থেকে বোঝা যায় যে, একটি অপেক্ষকের সমাকল বিভিন্ন আকারে প্রকাশিত হতে পারে, কিন্তু যে কোনো দুটি আকারের বিয়োগফল সর্বদাই একটি অনির্দিষ্ট ধ্রুবক হবে।

10.3.4 সমাকলনের নিয়মাবলি

প্রথম নিয়ম K ধ্রুবকের সমাকল হবে $\int K dx = Kx + c$

দ্বিতীয় নিয়ম '1' এর সমাকল লেখা হবে dx হিসাবে 1dx হিসেবে নয় অর্থাৎ $\int dx = x+c$

তৃতীয় নিয়ম শক্তি অপেক্ষক x^n এর সমাকল, যেখানে $n \neq -1$ প্রকাশিত হবে শক্তির নিয়মানুসারে

চতুর্থ নিয়ম x^{-1} বা এর সমাকল হবে

এখানে $x > 0$ এই শর্তটি আরোপ করা হয়েছে তার কারণ কেবলমাত্র ধনাত্মক সংখ্যারই লগারিদম্ হয়। সংখ্যা যদি ঋণাত্মক হয় তখন

$\int x^1 dx = \ln |x| + c; x \neq 0$

পঞ্চম নিয়ম সূচকীয় অপেক্ষক এর সমাকল হলো

ষষ্ঠ নিয়ম স্বাভাবিক সূচকীয় সংখ্যার সমাকল হোলো

সপ্তম নিয়ম যদি কোনো উপেক্ষককে ধ্রুবক দিয়ে গুণ করা হয় তখন তার সমাকল হবে, সেই অপেক্ষকের সমাকল গুণিত ধ্রুবক। অর্থাৎ

$\int Kf(x)\ dx = K\int f(x)\ dx$

অষ্টম নিয়ম দুটি বা তার অধিক অপেক্ষকের যোগফল বা অন্তরের সমাকল, তাদের সমাকলের যোগফল বা অন্তর হয়।

অর্থাৎ; $\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)dx$

নবম নিয়ম কোনো অপেক্ষকের ঋণাত্মক মানের সমাকল, সেই অপেক্ষকের সমাকলের ঋণাত্মক হবে।

অর্থাৎ, $\int - f(x)\ dx = -\int f(x)\ dx$

এই নিয়মগুলির প্রয়োগ হিসাবে কিছু উদাহরণ নেওয়া হলো।

উদাহরণ 10.3.3 : $\int 3\ dx = 3x + c$ [নিয়ম 1]

উদাহরণ 10.3.4 : [নিয়ম 3]

উদাহরণ 10.3.5 :

[নিয়ম 7 ও নিয়ম 3]

যেখানে c_1 ও c হোলো অনির্দিষ্ট ধ্রুবক এবং $5c_1 = c_1$ যেহেতু c হোলো অনির্দিষ্ট ধ্রুবক, সুতরাং প্রাথমিক গণনায় একে না ব্যবহার করে কেবলমাত্র সর্বশেষ সমাধানেও একে দেখানো যাবে।

উদাহরণ 10.3.6 : $\int(3x^3 - x + 1)\, dx$

$= 3\int x^3 dx - \int x\, dx + \int dx$ [নিয়ম 7, 8, 9]

[নিয়ম 2, 3]

উদাহরণ 10.3.7 : $\int 3x^{-1}\, dx = f 3x^{-1}\, dx$ [নিয়ম 7]

$= 3 \ln |x| + c$ [নিয়ম 4]

উদাহরণ 10.3.8 : [নিয়ম 1]

উদাহরণ 10.3.9 : [নিয়ম 1]

$= -3e^{-3x} + c$

10.3.5 পরিবর্ত বা প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাকলন

মনে করা যাক $\int f(x)\, dx$ নির্ণয় করতে হবে, যেখানে f(x) অর্তাৎ সমাকল্য আদর্শ আকারে প্রদত্ত নয়। পরিবর্ত পদ্ধতির সাহায্যে চলের পরিবর্তনের মাধ্যমে সমাকল্যকে আদর্শ সমাকল্যে পরিণত করা যায়।

মনে করা যাক, $\int f(x)\, dx = I$

তাহলে সংজ্ঞানুসারে,

এখন $x = \phi(Z)$ হলে

বা,

সংজ্ঞানুসারে, $I = \int f\{\phi(Z)\}\, \phi'(Z)\, dZ$

বা, $\int f(x)dx = \int f\{\phi(Z)\}\, \phi'(Z)\, dZ$

অপেক্ষকের কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ আকার এবং তাদের সমালোচনা

(i) $\int f(ax+b)\, dx$ এর সমাকল প্রতিস্থাপন প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করা যায়; এক্ষেত্রে চলের প্রতিস্থাপন সমীকরণ হয় $ax + b = Z$

উদাহরণ 10.3.10 : সমাকলন করো $\int (ax+b)^7\, dx$

ধরা যাক $ax + b = Z \quad \therefore\ adx = dZ$

(ii) $\int [f(x)^n\, f'(x)\, dx]$ এর সমাকল পরিবর্তন প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করা যায়; এক্ষেত্রে লের প্রতিস্থাপন সমীকরণ, $f(x)=Z$ ধরা হয়।

$f(x) = Z$ ধরলে, $f'(x)\, dx = dZ$ হয়।

$\therefore\ \int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \int Z^n dZ$ [$f(x) = Z$ ও $f'(x)dx = dz$]

[যখন $n \neq -1$]

এবং $\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \log|Z| + K$ [যখন $n = -1$] $=\log|f(x)|+K$

অর্থাৎ [যখন $n \neq -1$]

এবং [যখন $n = -1$]

উদাহরণ 10.3.11 : সমাকলন করো

ধরা যাক $2 + x^3 = Z \Rightarrow 3x^2dx = dZ$

[ও $2 + x^3 = Z$]

পরিবর্ত পদ্ধতিতে সমাকলনের বিবিধ উদাহরণ

উদাহরণ 10.3.12 : সমাকল করো

(i) (ii)

(iii) (iv)

(i)

ধরা যাক

প্রতিস্থাপন করে পাই

সমাকলনে পাই

(ii)

ধরা যাক

প্রতিস্থাপন করে

(iii)

ধরা যাক

ধরা যাক

(iv)

ধরা যাক

প্রতিস্থাপন করে

সমাকলন করে

10.3.6 অংশভিত্তিক সমাকলন

প্রথম পদ্ধতি সমাকলনের ক্ষেত্রে দুটি অপেক্ষক গুণন আকারে উপস্থিত থাকলে এ পদ্ধতিতে তার সমাকলিত মান নির্ণয় করা হয়। গুণনকৃত দুটো অপেক্ষকের সমাকলিত মান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত সূত্রটি ব্যবহৃত হয়। যদি u এবং v দুটি অপেক্ষক হয় তবে,

অথবা প্রথম অপেক্ষক $\times\int$ দ্বিতীয় অপেক্ষক $dx -$ প্রথম অপেক্ষক $\times\int$ দ্বিতীয় অপেক্ষক

উদাহরণ 10.3.13 : $\int x^2e^x\, dx$

সমাধান

$= x^2e^x - \int 2xe^x\, dx$

$= x^2e^x - 2\ [xe^x - e^x] + c$

$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$

$= e^x\ (x^2 - 2x + 2) + c$

দ্বিতীয় পদ্ধতি u এর সম্পর্কে v এর সমাকলন পাওয়া যায়, uv থেকে v এর সম্পর্ক u এর সমাকলিত মান বিয়োগ করে অর্থাৎ $\int vdx = uv - \int udv$.

উদাহরণ 10.3.14

সমাধান উল্লেখ্য যে এক্ষেত্রে প্রতিস্থাপন বা অন্য কোনো নিয়মে সমাকলিত মান নির্ণয় করা যায় না। এ কারণে উপরিউক্ত দ্বিতীয় পদ্ধতি অনুসারে উক্ত সমস্যাকে $\int vdu$ আকারে সাজিয়ে সমস্ত সমাকলন পদ্ধতিতে মান বের করার চেষ্টা করা হয়।

মনে করি $v = x$, ফলে $dv = dx$ এবং

মনে করি

যাতে হয়।

উদাহরণ 10.3.15 : $\int xe^x\ dx$

সমাধান এক্ষেত্রে মনে করি $v=x$ এবং $u=e^x$ যাতে $dv = dx$ এবং $du = e^2dx$। সুতরাং

$\int xe^x\ dx = \int vdu = uv = \int u\ dv$

$= e^x \cdot x - \int e^x\, dx$

$= e^x \cdot x - e^x + c = e^x(x-1) + c$

সমাকলিত মান সঠিক হয়েছে কিনা যাচাই করার জন্য উক্ত ফলাফলের অন্তরকলন মান নির্ণয় করে দেখতে হবে যে সেটা Integrand বা সমাকল্যের সমান কিনা।

10.3.7 আংশিক ভগ্নাংশের সাহায্যে সমাকলন

যখন হর উচ্চতর ক্রমের হয় এবং তার উৎপাদক নির্ণয় সম্ভব হয় তখন সাধারণতঃ আংশিক ভগ্নাংশ প্রয়োগ করা হয়। প্রদত্ত ভগ্নাংশের হরের উৎপাদকগুলির প্রকৃতি বিবেচনা করে আংশিক ভগ্নাংশের বিভিন্ন পদ্ধতি আলোচনা করা হলো।

প্রথম পদ্ধতি যখন হরে বাস্তব এবং এক ঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু কোনো উৎপাদকেরই পুনরাবৃত্তি হয় না, এই পদ্ধতিটি নিম্নোক্ত উদাহরণে দেখানো হলো।

উদাহরণ 10.3.16 :

সমাধান

এরূপ সমস্যার ক্ষেত্রে হর অংশকে একঘাত বিশিষ্ট কয়েকটি উৎপাদকে প্রকাশ করতে হয়। যেমন,

$$x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6)$$

$$= x(x-2)(x+3)$$

মনে করি

উভয় পক্ষকে x(x–2) (x+3) দ্বারা গুণ করে পাই

$$x^2+x-1 = A(x-2)(0+3) + B\cdot x\ (x+3) + C\cdot x\ (x-2) \ ...(1)$$

(1) নং অভেদে পর্যায়ক্রমে $x = 0, 2, -3$ বসিয়ে পাই

দ্বিতীয় পদ্ধতি

যখন লবের ঘাত হরের ঘাত অপেক্ষা বৃহত্তর বা সমান, তখন লবকে হর দ্বারা ভাগ করে লবের ঘাতকে হরের ঘাত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করে নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে সমাকলন করা হয়।

উদাহরণ 10.3.17 :

মনে করি

তৃতীয় পদ্ধতি

যখন হরে বাস্তব এবং একঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং এদের মধ্যে পুনরাবৃত্তি থাকে।

উদাহরণ 10.3.18 :

সমাধান মনে করি,

উভয় পক্ষকে $(x-1)^2$ $(x+2)$ দিয়ে গুণ করে পাই

$x = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$....(1)

(1) নং অভেদে পর্যায়ক্রমে $x = 1, -2$ বসিয়ে পাই

আবার 1 নং অভেদে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই

চতুর্থ পদ্ধতি

যখন হরে বাস্তব ও দ্বিঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু কোনো উৎপাদকেরই পুনরাবৃত্তি হয় না।

উদাহরণ 10.3.19 :

সমাধান মনে করি

উভয় পক্ষকে $(x-1)(x^2+4)$ দিয়ে গুণ করে পাই

$x = A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x - 1)$ ...(1)

(1) নং অভেদে x^2 এবং x এর সহগ সমীকৃত করে পাই

$A + B = 0$....(2) $C - B = 1$ ....(3)

(1) নং অভেদে $x = 1$ বসালে   হবে

$\therefore$ (2) ও (3) থেকে   বসালে   ও   হবে।

পঞ্চম পদ্ধতি

যখন হর বাস্তব এবং পুনরাবৃত্তিসহ দ্বিঘাত বিশিষ্ট উৎপাদক থাকে তখন নিম্নোক্ত নিয়মে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করে সমাকলন করা হয়। যেমন—

উদাহরণ 10.3.20 :

সমাধান

$\Rightarrow 2x = A(x^2+1)^2 + (Bx + C)(x + 1)(x^2+1) + (Dx + E)(x + 1)$ ...(1)

$\Rightarrow A(x^4+2x^2+1) + (Bx + C)(x^3+x^2+x+1) + (Dx^2+Dx+Ex+E)x$

$(A + B)x^4 + (B + C)x^3 + (2A + B + C + D)x^2 + (B + C + D + E)x + (A + C + E)$...(1)

উপরোক্ত (1) নং অভেদে $x = -1$ বসিয়ে পাওয়া যায়। আবার x^4, x^3, x^2, x এর সহগ সমীকৃত করে

$A + B = 0$ . . . (2)

$B + C = 0$ . . . (3)

$2A + B + C + D = 0$ . . . (4)

$B+C+D+E = 2$ . . . (5)

(2) নং এ বসিয়ে পাই (3) এ বসালে; পাওয়া যায়; (5) এ

বসালে D = 1 ও (5) এ B = y_2, C = y_2, D = 1 বসালে E = 1 পাওয়া যায়।

10.4 নির্দিষ্ট সমাকল

10.4.1 সংজ্ঞা

গাণিতিক সমস্যার অন্তর্গত কোনো রাশিকে যদি বিশেষ নিয়মে কতগুলি অংশে ভাগ করা হয়, এবং এমন একটি শ্রেণির আকারে প্রকাশ করা যায় যে, শ্রেণিটির পদসংখ্যা যথেচ্ছভাবে বৃদ্ধি করা যায় এবং একই সঙ্গে প্রতিটি পদের মান ক্রমশঃ ক্ষুদ্র থেকে ক্ষুদ্রতর করা সম্ভব হয়, তবে এই জাতীয় শ্রেণির যোগফলের সীমাকে নির্দিষ্ট সমাকল বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ মনে করা যাক, $y=x^2$ সন্তত অপেক্ষক, x অক্ষ এবং x = 1 ও x = 4 বিন্দু দুটিতে অঙ্কিত কোটি দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে। (চিত্র 1) এক্ষেত্রে $1 \leq x \leq 4$

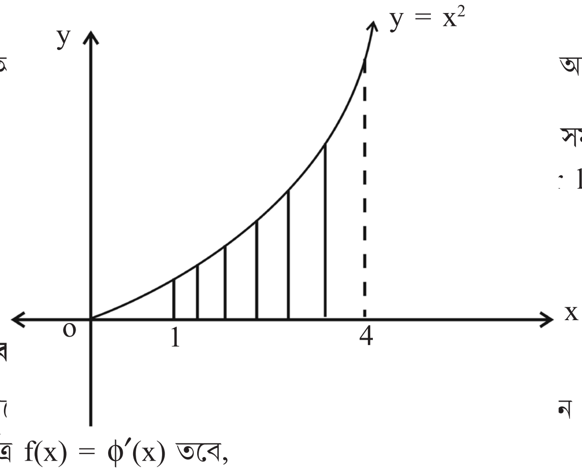
চিত্র 10.1

বিস্তারকে $x = 1, 1{\cdot}3, 1{\cdot}6$ ইত্যাদি বিন্দুসমূহ দ্বারা 10 টি সমান ভাগে ভাগ করে প্রত্যেক বিন্দুতে কোটিগুলি অঙ্কন করা হলে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফলটি 10টি অংশে বিভক্ত হবে এবং তার ফলে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফলকে 10টি পদের একটি শ্রেণির আকারে প্রকাশ করা যাবে। এইভাবে $1 \leq x \leq 4$ বিস্তারকে $x = 1, 1{\cdot}03, 1{\cdot}06...$ ইত্যাদি বিন্দুসমূহ দ্বারা 100টি সমান ভাগে ভাগ করা এবং প্রত্যেক বিন্দুতে কোটিসমূহ অঙ্কন করা হলে সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রফল 100টি অংশে বিভক্ত হবে এবং তার ফলে ক্ষেত্রফলকে 100টি পদের একটি শ্রেণির আকারে প্রকাশ করা সম্ভব হবে। স্পষ্টতই বিস্তারের অন্তর্গত বিন্দুসমূহের সংখ্যা যথেচ্ছভাবে বৃদ্ধি করে উক্ত ক্ষেত্রফল প্রকাশক শ্রেণির পদসংখ্যার মানও ক্রমশ ক্ষুদ্র থেকে আরও ক্ষুদ্রতর হয়। এক্ষেত্রে এই প্রকার শ্রেণির যোগফলের সীমাকে নির্দিষ্ট সমাকল বলা হয়।

10.4.2 যোগফলের সীমারূপে নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা

মনে করা যাক, $a \leq x \leq b$ সসীম বিস্তারে $f(x)$ একটি সংজ্ঞাত, এক মানবিশিষ্ট ও সীমাবদ্ধ অপেক্ষক। এখন $a, a + h, a + 2h, ..., \{a + (n - 1) h\}, a + nh$ বিন্দুগুলি দ্বারা $a \leq x \leq b$ বিস্তারকে প্রত্যেকটি h দৈর্ঘ্যের n সংখ্যক উপবিস্তার (sub-interval) এ বিভক্ত করা হলে $a + nh = b$ বা $nh = b - a$ হবে। তাহলে,

অথবা সংক্ষেপে



সীমাকে (যখন সীমার অ ... অপেক্ষকের নির্দিষ্ট সমাকল

বলা হয় এবং তাকে ... সমাকলের ঊর্ধ্বসীমা (up-
per or superior limit) ... limit) বলা হয়। সুতরাং

10.4.3 সমাকলের মৌলিব

যদি $a \leq x \leq b$ বিস্তা ... ন একটি অপেক্ষক হয় যে, $a \leq x \leq b$ বিস্তারের সর্বত্র $f(x) = \phi'(x)$ তবে,

হবে।

একেই বলে সমাকলনবিদ্যার মৌলিক উপাপাদ্য।

10.4.4 নির্দিষ্ট সমাকলের ধর্মসমূহ :

1. যদি নির্দিষ্ট সমাকলের সীমা পরিবর্তন করা হয় তাহলে তার চিহ্ন পরিবর্তন হবে।

অর্থাৎ

2. যদি নির্দিষ্ট সমাকলের ঊর্ধ্ব ও নিম্নসীমার মান একই হয় তবে সমাকল্যের মান শূন্য হবে।

অর্থাৎ

3. নির্দিষ্ট সমাকলকে তার উপসমাকলগুলির ভাগগুলির যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা হয়।

4. দুটি সমান সীমা (ঊর্ধ্ব ও নিম্ন) সহ নির্দিষ্ট সমাকলের যোগফল বা অন্তর হোলো সেই দুই অপেক্ষকের যোগফল বা অন্তরের নির্দিষ্ট সমাকল।

অর্থাৎ

5. যদি কোনো অপেক্ষককে ধ্রুবক দিয়ে গুণ করে তার নির্দিষ্ট সমাকল নেওয়া হয় তাহলে তা হবে সেই ধ্রুবক গুণিত সেই অপেক্ষকের নির্দিষ্ট সমাকল।

উদাহরণ 10.4.1 :

উদাহরণ 10.4.2 :

ধরা যাক

$= 3\ln|u| = 3\ln\ [x^2+1]$

$= 3\ln |3^2+1| - 3\ \ln|\ 0^2+1$

$= 3\ln 10 - 3\ \ln 1$

$= 3\ln 10 = 6{\cdot}9078$

আবার u-র সীমা $u = 0^2 + 1 = 1$ এবং

$u = 3^2 + 1 = 10$

u-এর সাপেক্ষে সমাকল করে পাই

$= 3\ln 10 - 3\ln 1$

$= 3\ln 10 = 6{\cdot}9078$

উদাহরণ 10.4.3 : মান নির্ণয় করো

ধরা যাক $f(x) = 5x$, $f'(x) = 5$, $g'(x)=e^{x+2}$

$g(x) = \int e^{x+2} dx = e^{x+2}$

$\therefore \int 5xe^{x+2}dx = 5xe^{x+2} - \int e^{x+2} 5\ dx$

$= 5xe^{x+2} - 5 \int e^{x+2}\ dx$

$= 5xe^{x+2} - 5e^{x+2}$

[অখণ্ড সমাকলন পদ্ধতি অনুসরণ করে]

$= (15e^5 - 5e^5) - (5e^3 - 5e^3)$

$= 10e^5 = 10\times148{\cdot}4 = 1484$

10.4.5 বক্ররেখাগুলির অন্তর্বর্তী ক্ষেত্রফলের পরিমাপ

দুই বা তার বেশি বক্ররেখার মধ্যবর্তী ক্ষেত্রফল নির্দিষ্ট সমাকলের মাধ্যমে নির্ধারণ করা সম্ভব। এটি একটি উদাহরণের মাধ্যমে দেখানো যাক।

উদাহরণ 10.4.4 : $y_1 = 7 - x$ এবং $y_2 = 4x - x^2$ এই দুই অপেক্ষকের $x = 1$ থেকে $x = 4$ এর মধ্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান

যেখানে A হোলো অপেক্ষকদ্বয়ের অন্তর্বর্তী এলাকা।

চিত্র : 10.2

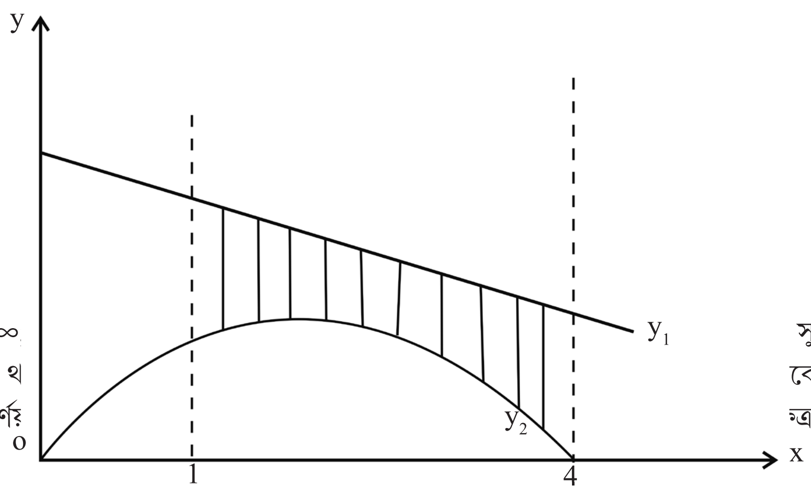
$= 4{\cdot}5$

10.4.6 সঙ্গতিবিহীন বা অসংগত সমাকল

কিছু কিছু বক্ররেখার সংলগ্ন ক্ষেত্র x অক্ষে অসীম ভাবে বাড়তে থাকে। এসব ক্ষেত্রে তাদের সঙ্গতিবিহীন সমাকল পদ্ধতিতে মান নির্ণয় করা হয়। যে নির্দিষ্ট সমাকলে একটি সীমা সসীম ও অপরটি অসীম তাদেরই বলা হয় সঙ্গতিবিহীন সমাকল, যেমন এবং '∞' কোনো সংখ্যা যেহেতু নয় তাদের, x এর জন্য F(x) এ প্রতিস্থাপন করা যাবে না। কিন্তু তাদের অপর সকলের সীমায়িত রূপ হিসাবে প্রকাশ করা যাবে।

যেমন এবং

উদাহরণ 10.4.5 :



যেহেতু b →∞ সুতরাং এর
কোনো নির্দিষ্ট মান থ বে না। কিন্তু
যদি সীমার মান নির্ণয় ন্ত্রফল নির্ণয়
সম্ভব হয়।

10.4.7 লা'হপিটালের নিয়ম

যখন f(x) = g(x) / h(x) এর x→a এ সীমায়িত মান নির্ণয় করা যাবে না যদি (1) লব ও হর শূন্যের দিকে সীমায়িত হয় এবং অনির্ণেয় গঠন (indeterminate form) হয় (2) যখন লব ও হর অসীমের দিকে সীমায়িত হয় এবং অনির্ণেয় গঠন হয়; তখন লা'পিটালের নিয়মে মান নির্ণয় করা হয়। সূত্রটি হোলো

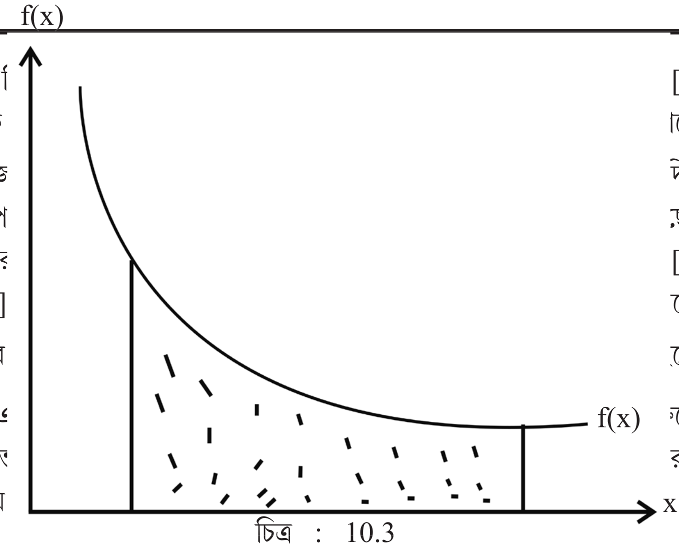
উদাহরণ 10.4.6 : মান নির্ণয় করো

সমাধান যত x→4 হবে, তত x – 4; 16 – x^2→0 হবে।

(লা'পিটাল সূত্রের সাহায্যে)

10.5 সংক্ষিপ্তসার

আলোচনা থেকে বিপরীত অবকলন … [a,
b] অন্তরালে সংজ্ঞাত কোনও অপেক্ষক … ানে
[a, b] অন্তরালের সকল বিন্দু x এর … র্দিষ্ট
সমাকল বলা হয়। সমাকলনের বিভিন্ন প … ছে।
সমাকলনের মৌলিক উপপাদ্য ব্যাখ্যা ক … [a,
b] অন্তরালে যদি অপেক্ষক f : [a, b] … লে
এমন একটি অপেক্ষক F পাওয়া যাবে … লে
$_a^b\int f(x)dx = F(b) - F(a) - F(a)$ । … মে
নিম্নসীমা ও উচ্চসীমা এবং [a, b] অ … রই
অর্থনীতির ক্ষেত্রে প্রায়োগিক বিষয় নিয়ে …



চিত্র : 10.3

10.6 অনুশীলনী

1. প্রতিস্থাপন পদ্ধতিতে সমাধান করুন

2. সখণ্ড সমাকলন পদ্ধতিতে এর সমাধান করুন।

3. যদি প্রান্তিক ব্যয় MC = 25 + 30Q – 9Q^2 ও স্থির ব্যয় 55 হয় তাহলে গড় ব্যয় নির্ণয় করুন।

4. এর অভিসৃত মান (convergence) কত হবে?

5. যদি যোগান অপেক্ষক হয় P = $(Q + 3)^2$ তাহলে P_0 = 81 এর উৎপাদনকারীর উদ্বৃত্ত নির্ণয় করুন।

10.7 গ্রন্থপঞ্জি

1. Carl Simon and Lawrence Blune : 1994) : Mathematics for Economists, W.W.Norton and Company.
2. Sydsaeter K, Hammond P, and Strom A (2015) : Essential Mathematics for Economic Analysis, Pearson.
3. Takayama, A. (1974) : Mathematical Economics, Dryden Press.
4. Yamane, T. (1968) : Mathematics for Economists, Prentice Hall.
5. Bhukta, Anindya and Seikh Salim (2013) : Mathematics for Undergraduate Economics,

Progressive Publishers.

6. Zameeruddin, Qazi and V.K. Khanna (1983): Mathematics in Commerce and Economics, Vikas Publishing House Pvt. Ltd.