স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৪ ও জুন, ২০১৫

গণিত (Mathematics)

সহায়ক পাঠক্রম (Subsidiary-1)

প্রথম পত্র (S-1, SMT-I : **Mathematics-I**)

সময় ঃ তিন ঘণ্টা **পূর্ণমান ঃ ১০০**

Time : 3 Hours Full Marks : 100

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে।

অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ - ক

[পূর্ণমান : 20]

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন । $10 \times 2 = 20$

১। ক) i) $\cos^{-1} 2$-এর মানগুলি নির্ণয় করুন। 5

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

ii) $x^2 - 2x + 2 = 0$ সমীকরণটির দুটি বীজ α, β হলে দ্য ময়ভারের উপপাদ্যের সাহায্যে দেখান যে $\alpha^n + \beta^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4}$, n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। 5

খ) i) যদি $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ $2 + 3i$ হয়, অন্য বীজগুলি নির্ণয় করুন। 5

ii) যদি $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ এবং $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ হয়, প্রমাণ করুন যে $(2I + 3B)^2 = 8I + 36B$. 5

গ) i) প্রমাণ করুন যে যদি $A \setminus B = A$ হয়, তাহলে $A \cap B = \phi$. 5

ii) গ্রুপ G-এর যে কোনো উপাদান a, b, c-এর জন্য দেখান যে $aob = aoc \Rightarrow b = c$. 5

ঘ) i) দেখান যে,

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2(b+c)(c+a)(a+b)$$ 5

ii) কার্ডন-এর পদ্ধতিতে $x^3 - 3x + 1 = 0$ সমীকরণটি সমাধান করুন। 5

বিভাগ - খ

[পূর্ণমান : 18]

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন। $6 \times 3 = 18$

২। i) $(1+i)^i$ -এর মুখ্য মান নির্ণয় করুন। 6

ii) ম্যাট্রিক্স $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$-কে একটি প্রতিসম ও একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স-এর যোগফল রূপে প্রকাশ করুন। 6

iii) যদি দল G-এর একটি অধদল H হয় এবং k , H-এর একটি অধদল হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে k, G-এর একটি অধদল। 6

iv) যদি $s = (1,2,3,4)$ এবং $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ এবং $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ হয় তবে দেখান যে $f(gh) = (fg)h$. 6

v) দে-কার্তের উপপাদ্যের সাহায্যে দেখান যে $x^7 - 2x^4 + 3x^3 - 1 = 0$ সমীকরণটির অন্ততঃ চারটি কাল্পনিক বীজ থাকবে। 6

vi) $A = \{a,b,c,d\}$ এবং $B = \{a,b,c\}$ দুটি সেট। $(A \times B) \cap (B \times A)$ এবং $(A \times B) \setminus (B \times A)$ নির্ণয় করুন। 6

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

বিভাগ - গ

[পূর্ণমান : 12]

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন। $3 \times 4 = 12$

৩। i) প্রমাণ করুন যে $\sin\left(i \log \frac{a-ib}{a+ib}\right) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, a, b বাস্তব সংখ্যা। 3

ii) যুক্তিসহ একটি তুল্যতা সম্পর্কের উদাহরণ দিন। 3

iii) যদি একটি সসীম সেটের উপাদান সংখ্যা n হয়, তাহলে ঐ সেটের উপসেটের সংখ্যা 2^n । এটি প্রমাণ করুন। 3

iv) ম্যাট্রিক্স $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$-এর জন্য কেইলি-হ্যামিলটন প্রতিপাদ্যের সত্যতা যাচাই করুন। 3

v) বিস্তার না করে $\begin{vmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 9 & 14 & -1 \\ 8 & 13 & -2 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান নির্ণয় করুন। 3

vi) প্রমাণ করুন যে দুটি সাবরিং-এর ছেদ একটি সাবরিং। 3

vii) $f : R \to R$, যেখানে $f(x) = x^2 + x - 2$. এই চিত্রণটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন। [R – বাস্তব সংখ্যার সেট]. 3

viii) একটি একক সহ বিনিময়ী রিং, R ইনট্রিগাল ক্ষেত্র হবে, যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\forall a \neq 0 \in R$, $au = av \Rightarrow u = v$, $u,v \in R$, এটি প্রমাণ করুন। 3

বিভাগ - ঘ

[পূর্ণমান : 50]

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন । $10 \times 2 = 20$

৪। ক) i) প্রমাণ করুন যে $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ এবং $lx + my = 1$ সরলরেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হবে যদি $(a+b)(al^2 + 2hlm + bm^2) = 0$ হয়। 5

ii) $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y + 6 = 0$

সমীকরণটিকে আদর্শাকারে প্রকাশ করুন এবং কণিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন। 5

খ) i) প্রমাণ করুন যে $y^2 = 4ax$-এর স্পর্শকের $x^2 + y^2 = 2ax$ বৃত্তের সাপেক্ষে মেরুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হয় একটি বৃত্ত $x^2 + y^2 = ax$. 5

ii) (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করুন। 5

গ) i) (1, 1, 2) ও (2, 4, 3) বিন্দুগামী যে সমতল $x - 3y + 7z + 5 = 0$ সমতলের সাথে লম্বভাবে অবস্থান করে, তার সমীকরণ নির্ণয় করুন। 5

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

ii) $2x + 3y - 8z - 7 = 0 = x - 2y + 3z$ এই সরলরেখার সমীকরণটি প্রতিসম আকারে নির্ণয় করুন। 5

ঘ) i) দেখান যে $3\vec{a} - 7\vec{b} - 4\vec{c}$, $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ ভেক্টরগুলি সমতলীয়, যেখানে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ যে কোনো তিনটি ভেক্টর। 5

ii) একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং দুটি প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন। 5

৫। যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন : $6 \times 3 = 18$

i) মূলবিন্দুকে অপরিবর্তিত রেখে লম্ব রূপান্তরের ফলে দ্বিঘাত রাশিমালা $(ax^2 + 2hxy + by^2)$ নতুন দ্বিঘাত রাশিমালা $(a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2)$-এ রূপান্তরিত হলে দেখান যে

(a) $a' + b' = a + b$

(b) $a'b' - h'^2 = ab - h^2$. 6

ii) দেখান যে, $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ সরলরেখাটি $r = 2a\cos\theta$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে যদি $a^2B^2 + 2Aa = 1$ হয়। 6

iii) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ সমতলটি অক্ষত্রয়কে A, B, C বিন্দুতে ছেদ করে। যে শঙ্কুর শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু এবং ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত নিয়ামক রেখা তার সমীকরণ নির্ণয় করুন। 6

iv) (1,0,0), (0,1,0) এবং (0,0,1) বিন্দুগামী এবং $2x+2y-z=15$ সমতল স্পর্শকারী গোলকের সমীকরণ নির্ণয় করুন। 6

v) প্রমাণ করুন যে A,B,C বিন্দু তিনটি সমরেখীয় যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $-2\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}$, $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$, $7\vec{a}-\vec{c}$. 6

vi) (2, 0, 4) এবং (–4, –2, –6) এই বিন্দু দুটির সংযোগকারী সরলরেখা xy সমতলে যে অনুপাতে বিভক্ত হয় তা নির্ণয় করুন এবং ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন। 6

৬। যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $3 \times 4 = 12$

i) $ax^2+2hxy+by^2=0$ -এর একটি সরলরেখার প্রবণতা অপরটির তিনগুণ হলে দেখান যে $3h^2=4ab$. 3

ii) প্রমাণ করুন যে,
$15x^2+16xy-15y^2+7x-11y+12=0$
সমীকরণটি একটি যুগ্ম লম্ব সরলরেখা নির্দেশ করে। 3

iii) একটি সরলরেখার মেরু সমীকরণ নির্ণয় করুন। 3

iv) যে ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় যথাক্রমে $A\equiv(x_1,y_1,z_1)$, $B\equiv(x_2,y_2,z_2)$ এবং $C\equiv(x_3,y_3,z_3)$ তার ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন। 3

v) $x+y+z=4$, $x-2y-z=4$ সরলরেখাটির দিগ নির্দেশক কোসাইন নির্ণয় করুন। 3

vi) দেখান যে, $[\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a}]=2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$. 3

vii) $\vec{i}+\vec{k}$, $-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ এই ভেক্টর তিনটি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু দ্বারা নির্দেশিত করা যায়। এটি কি সত্য ? যুক্তি দিন। 3

viii) $\vec{A}=2\vec{i}+b\vec{j}+\vec{k}$ এবং $\vec{B}=4\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$ ভেক্টর দুটি পরস্পরের উপর লম্ব হলে b-এর মান কত হবে ? 3

(English Version)

Group – A

[Full Marks : 20]

Answer any *two* questions. $10 \times 2 = 20$

1. a) i) Find the value of $\cos^{-1} 2$. 5

ii) α, β are the two roots of the equation $x^2 - 2x + 2 = 0$. Using De Moivre's theorem, show that $\alpha^n + \beta^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4}$, n is a positive integer. 5

b) i) $2 + 3i$ is a root of the equation $x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13 = 0$. Find the other roots. 5

ii) If $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, show that $(2I + 3B)^2 = 8I + 36B$. 5

c) i) Prove that, if $A \setminus B = A$, then $A \cap B = \phi$. 5

ii) For a,b,c in a group G, prove that $a \circ b = a \circ c \Rightarrow b = c$. 5

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

d) i) Show that,

$$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2(b+c)(c+a)(a+b)$$ 5

ii) Solve the equation $x^3 - 3x + 1 = 0$ by Cardon's method. 5

Group – B

[Full Marks : 18]

Answer any *three* questions. $6 \times 3 = 18$

2. i) Find the principal value of $(1+i)^i$. 6

ii) Express $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ as a sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix. 6

iii) If H be a subgroup of a group G and k be a subgroup of H, then show that k is a subgroup of G. 6

iv) If $s = (1,2,3,4)$ and $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ then show that $f(gh) = (fg)h$. 6

v) Apply Descartes' rule of signs to show that the equation $x^7 - 2x^4 + 3x^3 - 1 = 0$ has at least four imaginary roots. 6

vi) $A = \{a, b, c, d\}$ and $B = \{a, b, c\}$. Find $(A \times B) \cap (B \times A)$ and $(A \times B) \setminus (B \times A)$. 6

Group – C

[Full Marks : 12]

Answer any *four* questions. $3 \times 4 = 12$

3. i) Prove that $\sin\left(i \log \frac{a - ib}{a + ib}\right) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$, a, b real numbers. 3

ii) Give an example of an equivalence relation with justification. 3

iii) If a finite set has n number of elements, then prove that the number of subsets of that set is 2^n. 3

iv) Verify Cayley-Hamilton theorem for the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. 3

v) Without expanding, find the value of the determinant $\begin{vmatrix} 7 & 12 & -3 \\ 9 & 14 & -1 \\ 8 & 13 & -2 \end{vmatrix}$. 3

vi) Prove that intersection of two subrings is a subring. 3

vii) $f : R \to R$, where $f(x) = x^2 + x - 2$. Find the nature of the mapping. [$R \to$ set of real numbers]. 3

viii) Prove that a commutative ring R with unity is an integral domain iff $\forall a \neq 0 \in R$, $au = av \Rightarrow u = v$, $u, v \in R$. 3

Group – D

[Full Marks : 50]

Answer any *two* questions. $10 \times 2 = 20$

4. a) i) Show that the triangle formed by the straight lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ and the straight line $lx + my = 1$ is right angled, if $(a + b)(al^2 + 2hlm + bm^2) = 0$. 5

ii) Reduce the equation $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y + 6 = 0$ to the canonical form and determine the nature of the conic represented by it. 5

b) i) Prove that the locus of the poles of the tangents to the parabola $y^2 = 4ax$ with respect to the circle $x^2 + y^2 = 2ax$ is the circle $x^2 + y^2 = ax$. 5

ii) Find the equation of the normal to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ at the point (x_1, y_1). 5

c) i) Find the equation of the plane passing through the points (1, 1, 2) and (2, 4, 3) and perpendicular to the plane $x - 3y + 7z + 5 = 0$. 5

ii) Find the equation of the straight line in the symmetrical form as given by $2x + 3y - 8z - 7 = 0 = x - 2y + 3z$. 5

d) i) Show that the vectors $3\vec{a} - 7\vec{b} - 4\vec{c}$, $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ are coplanar where $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are any three vectors. 5

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

ii) Find the equation (vector) of a plane through a given point and parallel to the given straight lines. 5

5. Answer any *three* questions : $6 \times 3 = 18$

i) If, by the orthogonal transformation without change of origin, the expression $ax^2 + 2hxy + by^2$ be changed into $a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$ then show that

(a) $a' + b' = a + b$,

(b) $a'b' - h'^2 = ab - h^2$. 6

ii) Show that the straight line $\frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ touches the circle $r = 2a\cos\theta$ if $a^2B^2 + 2Aa = 1$. 6

iii) The plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ meets the coordinate axes at *A, B, C.* Find equation of the cone generated by the straight lines drawn from *O* to meet the circle *ABC.* 6

iv) Find the equation of the sphere which passes through the points (1,0,0), (0,1,0) and (0,0,1) and which touches the plane $2x + 2y - z = 15$. 6

v) Prove that the three points A,B,C whose position vectors are $-2\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}$, $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$, $7\vec{a}-\vec{c}$ are collinear. 6

vi) Find the ratio in which the straight line joining the points (2, 0, 4) and (–4, –2, –6) is divided by the xy-plane. Also find the coordinates of the point of interaction. 6

6. Answer any *four* questions : $3 \times 4 = 12$

i) Slope of one of the straight lines $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ is three times the slope of the other line, show that $3h^2 = 4ab$. 3

ii) Prove that

$$15x^2 + 16xy - 15y^2 + 7x - 11y + 12 = 0$$

represents a pair of perpendicular straight lines. 3

iii) Find the polar equation of a straight line. 3

iv) Three vertices of a triangle ABC are $A \equiv (x_1, y_1, z_1)$, $B \equiv (x_2, y_2, z_2)$, $C \equiv (x_3, y_3, z_3)$. Find the coordinates of its centroid. 3

v) Find the direction cosines of the straight line $x + y + z = 4$, $x - 2y - z = 4$. 3

vi) Show that $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}] = 2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$. 3

vii) Three vectors $\vec{i}+\vec{k}$, $-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $3\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ will be presented by the three sides of a triangle. Is it true ? Justify. 3

viii) Find the value of b so that the vectors $\vec{A} = 2\vec{i} + b\vec{j} + \vec{k}$ and $\vec{B} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ are perpendicular to each other. 3