স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

তৃতীয় পত্র (3rd Paper : **Classical Algebra & Abstract Algebra**)

সময় ঃ দুই ঘন্টা — **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours — Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) যদি a, b, c, d ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয় তবে প্রমাণ করুন যে

$$\frac{3}{b+c+d}+\frac{3}{c+d+a}+\frac{3}{d+a+b} \geq \frac{16}{a+b+c+d}.$$ ৫

(খ) $(-16)^{1/4}$ -এর মানগুলি নির্ণয় করুন। ৫

২। (ক) দেকার্তের নিয়ম প্রয়োগ করে দেখান যে, $x^7+5x^4-3x+k=0$ সমীকরণটির অন্তত চারটি কাল্পনিক বীজ আছে। ৬

(খ) $x^3+qx+r=0$ সমীকরণটির বীজগুলি α, β, γ হলে প্রমাণ করুন যে $\alpha^2-\beta\gamma=-q$. ৪

৩। (ক) প্রমাণ করুন যে, $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ সমীকরণের বীজগুলি গুণোত্তর প্রগতিতে থাকলে $a_0a_2^3=a_1^3a_3$ শর্তটি সিদ্ধ হবে। ৫

(খ) দেখান যে, সকল যুগ্ম সংখ্যার সেট S, সাধারণ যোগ প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে দল (group) গঠন করে। এটি কি প্রচলিত গুণন প্রক্রিয়ার সাপেক্ষে দল গঠন করে ? যুক্তি সহকারে বোঝান। ৩ + ২

৪। (ক) প্রমাণ করুন যে, একটি অসীম চক্রীয় দলের কেবলমাত্র দুটি জনক থাকে। ৫

(খ) যদি কোন অঙ্গন (ring) R-এ $x^2=x$, $\forall x \in R$ হলে দেখান যে, অঙ্গনটি বিনিময়যোগ্য। এরূপ একটি অঙ্গনের উদাহরণ দিন। ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। দেখান যে, এক অপেক্ষা বৃহত্তর কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-কে মৌলিক (prime) সংখ্যা সমূহের গুণফল হিসেবে প্রকাশ করা যায়। (মৌলিক উৎপাদক সমূহের মধ্যে বিন্যাসের তারতম্য তুচ্ছ করে)।

৬। কার্ডনের পদ্ধতিতে সমাধান করুন : $x^3+3x^2-3=0$.

৭। বহুপদ রাশি সমীকরণ $f(x)=0$-এর বাস্তব বীজের অবস্থান সম্পর্কিত Sturm-এর উপপাদ্য বিবৃত করুন এবং এর সাহায্যে $x^3-3x+1=0$-এর বাস্তব বীজের সংখ্যা ও অবস্থান নির্ণয় করুন।

৮। স্বাভাবিক অধদল (normal subgroup)-এর সংজ্ঞা দিন। $(H,\cdot)$ যদি $(G,\cdot)$-এর অধদল হয় এবং যদি $[G:H]=2$ হয় তবে প্রমাণ করুন $(H,\cdot)$ অধদলটি $(G,\cdot)$-এর স্বাভাবিক অধদল হবে।

৯। প্রমাণ করুন কোনো পূর্ণাঙ্গ ক্ষেত্রের (Integral domain) বৈশিষ্ট্যাঙ্ক হবে শূন্য অথবা একটি মৌলিক সংখ্যা। $(z,+,\cdot)$ ও $(z_7,+,\cdot)$-এর বৈশিষ্ট্যাঙ্ক নির্ণয় করুন। ৪ + ১ + ১

১০। প্রমাণ করুন যদি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা b ও c-এর জি.সি.ডি. g হয় তাহলে দুটি পূর্ণসংখ্যা x, y থাকবে যার জন্য $g=bx+cy$ হবে।

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। S_4 দলে $(1\ 3\ 4)$ বিন্যাসটির ক্রম (order) নির্ণয় করুন।

১২। যদি $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{5, 6\}$ হয়, তাহলে $B\times A$ নির্ণয় করুন।

১৩। যদি $f: R\to R: f(x)=x^2$ এবং $g: R\to R,\ g(x)=3$ হয়, তবে দেখান যে, $f.g\neq g.f$.

১৪। প্রমাণ করুন যে $x^9-1=0$ সমীকরণটির বিশেষ বীজগুলি হল $x^6+x^3+1=0$ সমীকরণটির বীজগুলি।

১৫। ধরা যাক Z, পূর্ণসংখ্যার সেট। একটি সম্পর্ক ρ যখন $x\rho y$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় যদি এবং কেবলমাত্র যদি $xy\geq 1$ হয়, তবে এই সম্পর্কটি কি তুল্যতা সম্পর্ক হবে ? $(x,y\in Z)$.

১৬। $\frac{3}{2+}\frac{3}{2+}\frac{3}{2+}\ldots$ এই অসীম ক্রমিক ভগ্নাংশের মান কত ?

১৭। $f: Z\to Z: f(z)=|z|$ হলে f চিত্রণটি কি সমরূপ হবে ? ($Z=$ পূর্ণসংখ্যার সেট)

১৮। প্রমাণ করুন, কোন একটি প্রাঙ্গন F-এ $a=1$ হবে যদি $(ab)^2=ab^2+bab-b^2$ ($a,b\in F$ এবং $b\neq 0$).

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) If *a, b, c, d* be positive real numbers, then prove that
$$\frac{3}{b+c+d}+\frac{3}{c+d+a}+\frac{3}{d+a+b}\geq\frac{16}{a+b+c+d}.$$
5

   b) Find the values of $(-16)^{1/4}$. 5

2. a) Apply Descartes' rule of sign to show that the equation $x^7+5x^4-3x+k=0$ has at least four imaginary roots. 6

   b) If α,β,γ be the roots of the equation $x^3+qx+r=0$, then prove that $\alpha^2-\beta\gamma=-q$. 4

3. a) Prove that the condition $a_0a_2^3=a_1^3a_3$ is satisfied if the roots of the equation $a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3=0$ are in G.P. 5

   b) Show that the set S of all even integers, forms a group with respect to usual addition. Does it form a group with respect to usual multiplication ? Justify your answer. 3 + 2

4. a) Prove that an infinite cyclic group has only two generators. 5

   b) If in a ring R, $x^2=x$, $\forall x\in R$, then prove that the ring is commutative. Give an example of such a ring. 5

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Prove that any positive integer $n>1$, can be expressed uniquely as the product of prime numbers. (Order of the prime factors in the expression is ignored)

6. Solve by Cardan's method : $x^3+3x^2-3=0$.

7. State Sturm's theorem for locating the position of real roots of an equation $f(x)=0$, and with the help of this theorem find the number and positions of real roots of the equation $x^3-3x+1=0$.

8. Define normal subgroup of a group. If $(H,\cdot)$ be a subgroup of a group $(G,\cdot)$ and $[G:H]=2$, then prove that $(H,\cdot)$ is normal subgroup of $(G,\cdot)$.

9. Prove that the characteristic of an Integral Domain is either zero or a prime number. Determine the characteristics of $(z,+,\cdot)$ and $(z_z,+,\cdot)$. 4 + 1 + 1

10. If g be the G.C.D. of two positive integers b and c, then prove that there will be two integers x and y having $g=bx+cy$.

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Find the order of the permutation (1 3 4) in the group S_4.

12. Determine $B\times A$, if A = { 1, 2, 3, 4 } and $B=\{5, 6\}$.

13. If $f: R \to R: f(x) = x^2$ and $g: R \to R, \ g(x) = 3$ then show that $f.g \neq g.f$.

14. Prove that the special roots of the equation $x^9 - 1 = 0$ are the roots of the equation $x^6 + x^3 + 1 = 0$.

15. Let Z be the set of all integers. A relation ρ is defined by $x \rho y$ if and only if $xy \geq 1$. Is the relation an equivalence relation ? $(x, y \in Z)$.

16. What is the value of the continued fraction $\frac{3}{2+}\frac{3}{2+}\frac{3}{2+}\ldots$?

17. Is the mapping $f: Z \to Z: f(z) = |z|$ bijective ? (Z = the set of all integers)

18. Prove that in a field F, $a = 1$ if $(ab)^2 = ab^2 + bab - b^2$ $(a, b \in F$ and $b \neq 0$).