স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

চতুর্থ পত্র (4th Paper : **Vector Algebra & Vector Calculus**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) প্রমাণ করুন যে কোনো চতুস্তলকের শীর্ষবিন্দু এবং তার বিপরীত তলের ভরকেন্দ্র সংযোগকারী সরলরেখাগুলি এক বিন্দুতে মিলিত হয়। ৫

(খ) দেখান যে $[\vec{\beta}\times\vec{\gamma}, \vec{\gamma}\times\vec{\alpha}, \vec{\alpha}\times\vec{\beta}] = [\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]^2$. ৫

২। (ক) ভেক্টর পদ্ধতির সাহায্যে প্রমাণ করুন যে

i) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

ii) $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$,

যেখানে ABC একটি ত্রিভুজ। ৫

(খ) O বিন্দুর সাপেক্ষে P, Q, R তিনটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}$, $\vec{b}$ এবং $\vec{c}$। দেখান যে, QR সরলরেখা থেকে P-এর লম্ব দূরত্ব হল

$$\frac{|\vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{c} + \vec{c}\times\vec{a}|}{|\vec{b} - \vec{a}|}.$$ ৫

৩। (ক) প্রমাণ করুন যে, ভেক্টর ফাংশন $\vec{r} = \vec{f}(t)$-এর মান ধ্রুবক থাকার প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হল $\vec{f}\cdot\dfrac{d\vec{f}}{dt} = 0$. ৫

(খ) $\int_C (x^3 y\,dx + xy^3 dy)$ সমাকলটির মান স্টোকস্-এর উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় করুন, যখন C বক্রটি xy তলে একটি আয়তক্ষেত্র যার শীর্ষ বিন্দুগুলি $(0, 0), (b, 0), (b, a), (0, a)$. ৫

৪। (ক) দেখান যে $\vec{\nabla}^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$, যখন $f(r)$ স্কেলার ফাংশনটির সন্তত অবকল সহগ আছে। ৫

(খ) ডাইভারজেন্স উপপাদ্য ব্যবহার করে $\iint_S (y^2z^2\hat{i} + z^2x^2\hat{j} + x^2y^2\hat{k}).\hat{n}\,dS$ -এর মান নির্ণয় করুন যেখানে S, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ গোলকের xy-তলের উপরের অংশ এবং xy তল দ্বারা বেষ্ঠিত। ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। $(2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ বিন্দুগামী ও 15 এককের একটি বল $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এই ভেক্টরের দিকে ক্রিয়া করে। $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ বিন্দুর চারদিকে বলটির ভ্রামক নির্ণয় করুন।

৬। $\vec{r} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$ এবং $\vec{r}.\vec{c} = 0$ সমীকরণ দুটি $\vec{r}$ -এর জন্য সমাধান করুন। এখানে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ তিনটি প্রদত্ত ভেক্টর এবং $\vec{b}$ ও $\vec{c}$ ভেক্টর পরস্পর পরস্পরের উপর লম্ব নয়।

৭। দুটি সরলরেখা L_1 এবং L_2-এর ভেক্টর সমীকরণ দুটি যথাক্রমে $\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} + t(2\hat{j} + \hat{k})$

এবং $\vec{r} = 4\hat{k} + s(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$,

যেখানে t এবং s দুটি স্কেলার। প্রমাণ করুন যে L_1 এবং L_2 পরস্পরছেদি এবং তারা যে সমতলে অবস্থিত সেই সমতলের ভেক্টর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

৮। যদি $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ অঞ্চলের আয়তন V হয় তবে $\iiint_V \vec{F}\,dV$ -এর মান নির্ণয় করুন, যেখানে $\vec{F} = xy\hat{i} + z\hat{j} + y\hat{k}$.

৯। xy সমতলে (0, 0), (1, 0), (1, 2) কৌণিক বিন্দু বিশিষ্ট ত্রিভুজকে C ধরে $\int_C (ye^x dx + xe^y dy)$ সমাকলটি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে গ্রীনের উপপাদ্যটি যাচাই করুন।

১০। $\vec{F}(x,y,z) = 2y\hat{i} - z\hat{j} + x^2\hat{k}$ এবং S তলটি প্রথম অষ্টমাংশে $y^2 = 8x$, $y = 4$, $z = 6$ তলগুলি দ্বারা পরিবেষ্টিত হলে $\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,dS$ -এর মান কত ?

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। প্রমাণ করুন যে A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ, যাদের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $-2\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}$, $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$ এবং $7\vec{a}-\vec{c}$.

১২। এমন একটি ভেক্টর $\vec{\delta}$ নির্ণয় করুন যা $\vec{\alpha}=4\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$ এবং $\vec{\beta}=\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$ প্রত্যেকের উপর লম্ব এবং $\vec{\delta}.\vec{\gamma}=21$, যেখানে $\vec{\gamma}=3\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k}$.

১৩। একটি কণার ওপর দুটি বল $(4\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ ও $(3\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$ প্রয়োগের ফলে কণাটি $(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ বিন্দু থেকে $(5\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k})$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হল। বলগুলির দ্বারা মোট কৃতকার্যের পরিমাণ নির্ণয় করুন।

১৪। $\vec{r}=\vec{\alpha}+t\vec{\beta}$ এবং $\vec{r}=\vec{\beta}+s\vec{\alpha}$ সরলরেখাদ্বয় যে সমতলে অবস্থিত তার সমীকরণ নির্ণয় করুন।

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

১৫। যদি $\vec{\alpha}=t^2\hat{i}-t\hat{j}+(2t+1)\hat{k}$ এবং $\vec{\beta}=(2t-3)\hat{i}+\hat{j}-t\hat{k}$ হয় তবে $t=2$-তে $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\alpha}\times\dfrac{d\vec{\beta}}{dt}\right)$-এর মান নির্ণয় করুন।

১৬। প্রমাণ করুন যে $div(curl\,\vec{f})=0$, যেখানে $\vec{f}(x,y,z)$ একটি ভেক্টর পয়েন্ট ফাংশন।

১৭। $\vec{\nabla}^2\phi=0$ হলে দেখান যে $\mathrm{grad}\,\phi$ ভেক্টরটি একই সাথে সোলেনয়ডাল ও অনাবর্তনশীল, যেখানে $\phi(x,y,z)$ একটি স্কেলার পয়েন্ট ফাংশন।

১৮। যদি $\vec{F}=(x^2+2y^2)\hat{i}+5y^2z\hat{j}-6yz^2\hat{k}$ হয়, তাহলে $(0, 0, 0)$ থেকে $(1, 1, 1)$ পর্যন্ত $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$-এর মান বের করুন যেখানে C বক্ররেখার সমীকরণ হল $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$.

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) Prove that the straight lines joining the vertices to the centroids of opposite faces of a tetrahedron are concurrent. 5

   b) Show that $[\vec{\beta}\times\vec{\gamma}, \vec{\gamma}\times\vec{\alpha}, \vec{\alpha}\times\vec{\beta}] = [\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}]^2$. 5

2. a) Prove by vector method :

   i) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

   ii) $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

   where ABC is a triangle. 5

   b) The position vectors of three points P, Q, R from a fixed point O are respectively $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$. Show that the perpendicular distance of the point P from the straight line QR is $\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|}{|\vec{b}-\vec{a}|}$. 5

3. a) Prove that the necessary and sufficient condition for a vector function $\vec{r} = \vec{f}(t)$ to have constant magnitude is $\vec{f}\cdot\dfrac{d\vec{f}}{dt} = 0$. 5

   b) Evaluate the integral $\int_C (x^3 y\,dx + xy^3 dy)$ using Stokes' theorem, where the curve C is a rectangle having vertices (0, 0), (b, 0), (b, a) and (0, a) in the xy-plane. 5

4. a) Show that $\vec{\nabla}^2 f(r) = f''(r) + \frac{2}{r} f'(r)$, where the scalar function $f(r)$ has continuous differential coefficient. 5

   b) Using divergence theorem, evaluate

   $$\iint_S (y^2z^2\hat{i} + z^2x^2\hat{j} + x^2y^2\hat{k}).\hat{n}\,dS$$

   where S is the surface bounded by the part of the sphere $x^2+y^2+z^2=1$ lying above the xy-plane and the xy-plane. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. A force of 15 units acts in the direction of the vector $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and passes through a point $(2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$. Find the moment of the force about the point $(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$.

6. Solve the simultaneous equations $\vec{r}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}$ and $\vec{r}\cdot\vec{c} = 0$ for $\vec{r}$. Here $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are three given vectors and $\vec{b}$ and $\vec{c}$ are not perpendicular to each other.

7. The vector equations of two straight lines L_1 and L_2 are respectively

$$\vec{r} = 3\hat{i} + \hat{j} + t(2\hat{j} + \hat{k})$$

and $\vec{r} = 4\hat{k} + s(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$, where t and s are two scalars. Prove that L_1 and L_2 intersect each other and find the vector equation of the plane in which they lie.

8. If V be the volume bounded by $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ and $z = 2$, then evaluate $\iiint_V \vec{F}\,dV$, where $\vec{F} = xy\hat{i} + z\hat{j} + y\hat{k}$.

9. Taking C as the triangle formed by the points (0, 0), (1, 0) and (1, 2) as vertices in the xy-plane, verify Green's theorem in evaluation of the integral $\int_C (ye^x dx + xe^y dy)$.

10. If $\vec{F}(x,y,z) = 2y\hat{i} - z\hat{j} + x^2\hat{k}$ and S is the surface in the first octant bounded by the parabolic cylinder $y^2 = 8x$ and the planes $y = 4$, $z = 6$, what is the value of $\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,dS$?

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Prove that the three points A, B, C are collinear whose position vectors are respectively $-2\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{c}$, $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$ and $7\vec{a} - \vec{c}$.

12. Find a vector $\vec{\delta}$ which is perpendicular to each of the vectors $\vec{\alpha} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{\beta} = \hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ and $\vec{\delta}.\vec{\gamma} = 21$, where $\vec{\gamma} = 3\hat{i} + 7\hat{j} - 4\hat{k}$.

13. A particle, acted on by forces $(4\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ and $(3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$, is displaced from the point $(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ to the point $(5\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$. Find the total work done by the forces.

14. Find the equation of the plane that contains the straight lines $\vec{r} = \vec{\alpha} + t\vec{\beta}$ and $\vec{r} = \vec{\beta} + s\vec{\alpha}$.

15. If $\vec{\alpha} = t^2\hat{i} - t\hat{j} + (2t+1)\hat{k}$ and $\vec{\beta} = (2t-3)\hat{i} + \hat{j} - t\hat{k}$, then find the value of $\frac{d}{dt}\left(\vec{\alpha} \times \frac{d\vec{\beta}}{dt}\right)$ at $t = 2$.

16. Prove that $div(curl\,\vec{f}\,) = 0$, where $\vec{f}\,(x, y, z)$ is a vector point function.

17. If $\vec{\nabla}^2 \phi = 0$, then show that the vector grad ϕ is both solenoidal and irrotational, where $\phi(x, y, z)$ is a scalar point function.

18. If $\vec{F} = (x^2 + 2y^2)\,\hat{i} + 5y^2 z\,\hat{j} - 6yz^2\,\hat{k}$, then find the value of $\int_C \vec{F}.\mathrm{d}\vec{r}$ from (0, 0, 0) to (1, 1, 1) when the curve C has the equation $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.