স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

অষ্টম পত্র (8th Paper : **Mathematical Analysis-II**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা — **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours — Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) ফুরিয়ার (Fourier) শ্রেণী অভিসারী হওয়ার ডিরিচলেটের শর্তাবলী (Dirichlet's conditions) বিবৃত করুন।

2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{যখন } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ +1 & \text{যখন } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

হলে প্রমাণ করুন যে

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\infty\right).$$

$x = I\pi$ বিন্দুতে শ্রেণীটির মান নির্ণয় করুন। ২ + ২ + ১

(খ) প্রমাণ করুন যে,

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(a+bx)^{m+n}}\,dx = \frac{1}{a^n b^m} B(m,n),\ m, n, a, b > 0.$$

৫

২। (ক) যদি $f(x)$, $a \le x \le b$ একটি সন্তত অপেক্ষক হয় এবং $f(x) \ge 0\ \forall x \in [a,b]$ এবং যদি $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, প্রমাণ করুন যে $f(x) = 0$ $\forall x \in [a,b]$. ৫

(খ) দেখান যে, $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 + x^3}} < \frac{\pi}{6}$. ৫

৩। (ক) প্রমাণ করুন যে, $\iint_S y^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,dy = \frac{32}{45}a^5$,

যেখানে $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$. ৫

(খ) প্রমাণ করুন যে, $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \ldots \infty$.

৫

৪। (ক) সমাকলনটি অভিসারী ধরে নিয়ে, প্রমাণ করুন যে,

$$\int_0^{\pi/2} \log(\tan x + \cot x) dx = \pi \log 2 .$$

৫

(খ) প্রমাণ করুন যে, $\int_0^1 x^3 (1-x^2)^{5/2} dx = \frac{2}{63}$. ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। দেখান যে $\lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{1}{e}$.

৬। প্রমাণ করুন যে,

$$\iiint_S (lx + my + nz)^2 dx\, dy\, dz = \frac{4}{15} \pi (l^2 + m^2 + n^2),$$

যেখানে $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

৭। প্রমাণ করুন যে $\int_0^1 \log \Gamma(x) dx$ সমাকলনটি অভিসারী এবং এর মান নির্ণয় করুন। ২ + ৪

৮। প্রমাণ করুন যে $f : [0, 1] \to I\!R$ অপেক্ষকটি $[0, 1]$ বদ্ধ অন্তরালে রিমান সমাকলনযোগ্য হবে, যেখানে

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ যখন } x \text{ হল মূলদ সংখ্যা } \frac{p}{q} \text{ এবং } p \text{ ও } q\text{-এর গ.সা.গু. হল } 1 \\ 0 \text{ যখন } x \text{ হল অমূলদ সংখ্যা।} \end{cases}$$

সমাকলনটির মান নির্ণয় করুন। ৫ + ১

৯। মনে করুন

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ \cos x, & \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

এবং $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$.

$f(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী নির্ণয় করুন।

১০। ‘সমাকলন চিহ্নের ভিতর অন্তরকলন’ পদ্ধতি ব্যবহার করে, সঠিক যুক্তিসহ দেখান যে

$$\int_0^\infty e^{\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|} \qquad -\infty < x < \infty .$$

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। চলের পরিবর্তন করে সমাকলটির মান নির্ণয় করুন :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}.$$

১২। দেওয়া আছে $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a-\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, $a > 1$, তাহলে

$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(a-\cos x)^2}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

১৩। প্রমাণ করুন যে, $\int_0^{\infty} \frac{e^{-pt}-e^{qt}}{t}dt = \log\frac{q}{p}$, $0 < p < q$.

১৪। প্রমাণ করুন যে, $\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}dx = e-1$.

১৫। প্রমাণ করুন যে $f(x) = x$ অপেক্ষকটির $0 \le x \le 2$ অন্তরালে অর্ধ-পাল্লার কোসাইন শ্রেণীটি হবে

$$1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}x}{2n-1}.$$

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

১৬। প্রমাণ করুন যে, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3/2}}$ শ্রেণীটি $[-1, 1]$ অন্তরালে সম-অভিসারী হবে।

১৭। সমাকলনবিদ্যার প্রথম মধ্যমমান উপপাদ্যটি বিবৃত করুন এবং প্রমাণ করুন। ১ + ২

১৮। 'সমালকনের ক্রম পরিবর্তন করে' সমাকলটির মান নির্ণয় করুন : $\int_{-1}^{1} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy$.

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) State Dirichlet's conditions for convergence of a Fourier series.

Prove that if f is the periodic function with period 2π, where

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ +1 & \text{for } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

then $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\infty\right)$.

What is the value of the series for $x = I\pi$?

2 + 2 + 1

b) Prove that $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(a+bx)^{m+n}}\,dx = \frac{1}{a^n b^m} B(m,n)$,

$m, n, a, b > 0$.

5

2. a) If $f(x)$ is continuous on $[a, b]$ and $f(x) \geq 0$ for all $x \in [a,b]$ and if $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, prove that $f(x) = 0 \;\forall x \in [a,b]$.

5

b) Show that $\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 + x^3}} < \frac{\pi}{6}$. 5

3. a) Show that $\iint_S y^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,dy = \frac{32}{45}a^5$, where $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$. 5

b) Show that $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x - \frac{x^3}{3.3!} + \frac{x^5}{5.5!} - \ldots\infty$. 5

4. a) Assuming the convergence of integral, prove that $\int_0^{\pi/2} \log(\tan x + \cot x)\,dx = \pi \log 2$. 5

b) Prove that $\int_0^1 x^3 (1 - x^2)^{5/2}\,dx = \frac{2}{63}$. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Verify : $\lim_{n \to \infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{1}{e}$.

6. Prove that

$$\iiint_S (lx + my + nz)^2\,dx\,dy\,dz = \frac{4}{15}\pi\,(l^2 + m^2 + n^2),$$

where $S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

7. Discuss the convergence of $\int_0^1 \log\Gamma(x)\,dx$ and find its value. 2 + 4

8. Show that f defined on [0, 1] :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{if } x = \text{rational of the form } \dfrac{p}{q} \text{ in its lowest term} \\ 0 & \text{if } x = \text{irrational} \end{cases}$$

is integrable on [0, 1] and evaluate the integral. 5 + 1

9. Suppose

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ \cos x, & \dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

and $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = f(x)$. Find the Fourier series of $f(x)$.

10. Using the differentiation under the sign of integration, prove that

$$\int_0^\infty e^{\left(-t^2-\frac{x^2}{t^2}\right)}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|x|} \qquad -\infty < x < \infty.$$

Give proper justification.

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Evaluate, by the method of substitution, $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$.

12. Given that $\int_0^\pi \frac{dx}{a-\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, $a > 1$.

Evaluate $\int_0^\pi \frac{dx}{(a-\cos x)^2}$.

13. Prove that $\int_0^\infty \frac{e^{-pt}-e^{qt}}{t}\,dt = \log\frac{q}{p}$, $0 < p < q$.

14. Prove that $\int_0^1 \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}\,dx = e-1$.

15. Prove that half-range cosine series of $f(x) = x$ on [0, 2] is $1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(2n-1)\frac{\pi}{2}x}{2n-1}$.

16. Prove that $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^{3/2}}$ converges uniformly on [−1, 1].

17. State and prove First Mean-value theorem for integrals. 1 + 2

18. Evaluate by changing the order of integration $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x\,\mathrm{d}y$.