## স্নাতক পাঠক্রম ( B.D.P.)

**শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা** ( Term End Examination ) :

**ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬**

# গণিত ( Mathematics )

*ঐচ্ছিক পাঠক্রম ( Elective )*

**সপ্তম পত্র** ( 7th Paper : **Mathematical Analysis-I** )

**সময় ঃ দুই ঘণ্টা** **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours Full Marks : 50

( মানের গুরুত্ব ঃ ৭০% )

( Weightage of Marks : 70% )

**পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।**

**Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.**

### বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) মনে করুন $A$, $I\!R$-এর অশূন্য সীমাবদ্ধ উপসেট। মনে করুন $F = \{|x-y| : x \in A, y \in A\}$.

$A$ সেটের সীমাদ্বয়ের সাহায্যে sup $F$ নির্ধারণ করুন। ৩



[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য



(খ) মনে করুন বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম $\{a_n\}_n$ শূন্য অভিমুখে অভিসারী এবং বাস্তব সংখ্যার অনুক্রম $\{b_n\}_n$ $I\!R$-এ সীমাবদ্ধ অনুক্রম। $\{a_n b_n\}_n$ অভিসারী কিনা পরীক্ষা করুন। ৩

(গ) $\sum_n n^{1/x}$ শ্রেণীটি প্রদত্ত, $x \in I\!R$. সঠিক বিবৃতিটি যুক্তিসহ লিখুন : ৪

i) শ্রেণীটি সর্বত্রই অভিসারী

ii) শ্রেণীটি কোনো ক্ষেত্রেই অভিসারী নয়

iii) $-1 < x < 0$-এর ক্ষেত্রে শ্রেণীটি অভিসারী

iv) $x > 1$ হলে শ্রেণীটি অভিসারী।

২। (ক) মনে করুন বাস্তব মান বিশিষ্ট অপেক্ষক $f$, $p$ বিন্দুতে সন্তত এবং $f$-এর সংজ্ঞার অঞ্চলের অন্তর্ভুক্ত $p$-এর প্রতিটি সামীপ্যে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় মানই পরিগ্রহ করে। $f(p)$-এর মান নির্ধারণ করুন। ৩

(খ) মনে করুন $S \equiv (0,1)$, ভুল থাকলে সংশোধন করুন বা সঠিক থাকলে যুক্তি দিন :

$\bigcup_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p}, 1\right)$, $S$-এর একটি মুক্ত আবরণী কিন্তু ইহার কোনো সসীম উপ-সমষ্টি সেট $S$-এর আবরণী হতে পারে না। ৩

(গ) মনে করুন $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$. দেখান যে $\{f_n(x)\}_n$, অন্তরাল [ 0, 1 ]-এ সম-অভিসারী নয় কিন্তু $0 < a < 1$-এর ক্ষেত্রে [ 0, $a$ ]-তে সম-অভিসারী হবে। ২ + ২

৩। (ক) মনে করুন $\xi$ অসীম সেট $S(\subset \mathbb{R})$-এর একটি সীমা বিন্দু। দেখান যে $\xi$-এর অন্তর্ভুক্তি সহ যে কোনো মুক্ত অন্তরাল $(\alpha, \beta)$-তে $S$-এর অসীম সংখ্যক বিন্দু অন্তর্ভুক্ত থাকবে। ৩

(খ) মনে করুন $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ সন্তত এবং সমগ্র অন্তরালে শুধুমাত্র মূলদ মান পরিগ্রহ করে। যদি $x = \dfrac{1}{3}$-এর ক্ষেত্রে $f(x) = 3$ হয়, দেখান যে [ 0, 1 ]-এর সর্বত্রই $f(x) = 3$ হবে। ৩

(গ) মনে করুন $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ একটি একান্বয়ী ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক এবং $a < c < b$. দেখান যে $f(c+0)$ ও $f(c-0)$ উভয়েরই অস্তিত্ব আছে। ২ + ২

৪। (ক) মনে করুন $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, [ $a$, $b$ ]-তে অবকলনযোগ্য এবং [ $a$, $b$ ]-তে $f'$ সীমাবদ্ধ। প্রমাণ করুন যে $f$, [ $a$, $b$ ]-তে সীমাবদ্ধ ভেদযুক্ত হবে। ৩



[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য



(খ) মনে করুন অনুক্রম $\{f_n(x)\}_n$, সেট $S(\subset \mathbb{R})$-এ সীমা অপেক্ষক $f$ অভিমুখে সমভাবে অভিসারী এবং প্রতি $f_n(x)$, $S$-এ সীমাবদ্ধ। দেখান যে $f$, $S$-এ সীমাবদ্ধ হবে। ৩

(গ) দেখান যে $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$ শ্রেণীটি অভিসারী কিন্তু $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2n}$ শ্রেণীটি অপসারী। ২ + ২

## বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। মনে করুন $f: S \to \mathbb{R}$ যেখানে $S \subset \mathbb{R}^2$ এবং $(a,b) \in S$. মনে করুন $f_x(a,b)$-এর অস্তিত্ব আছে এবং $f_y$, ( $a$, $b$ ) বিন্দুতে সন্তত। প্রমাণ করুন যে $f$, ( $a$, $b$ )-তে অবকলনযোগ্য।

৬। মনে করুন অসীম শ্রেণী $\sum\limits_{n} f_n(x)$ সেট $x \in S\ (\subset \mathbb{R})$-এ অপেক্ষক $f(x)$ অভিমুখে সমভাবে অভিসারী। মনে করুন $p$, $S$-এর সীমাবিন্দু এবং $\lim\limits_{x \to p} f_n(x) = a_n$, সকল $n \in \mathbb{N}$-এর জন্য। দেখান যে (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ অভিসারী, (ii) $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. ৩ + ৩

৭। (ক) প্রমাণ করুন যে একই অন্তরালে ও একই অপেক্ষক-মান বিশিষ্ট দুটি পৃথক ঘাত শ্রেণীর অস্তিত্ব নেই। ২

(খ) $e^x$ -এর ঘাত শ্রেণী ব্যবহার করে কারণসহ মান নির্ণয় করুন :

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ (ii) $\lim_{x \to \infty} e^{-x} x^n$. ২ + ২

৮। মনে করুন

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\log(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

দেখান যে $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ কিন্তু $f_{xy}$, $f_{yx}$ কেউই Schwarz উপপাদ্যের শর্তাবলী পূরণ করে না। ৩ + ৩

৯। প্রমাণ করুন যে $I\!R$-এ প্রতিটি সীমাবদ্ধ ক্রমের অন্তত একটি অভিসারী অনুক্রম আছে।

১০। প্রমাণ করুন যে $I\!R$-এ প্রতিটি পরম অভিসারী শ্রেণীকে দুটি ধনাত্মক অভিসারী শ্রেণীর অন্তরফল হিসেবে প্রকাশ করা যায় এবং শর্তাধীন অভিসারী শ্রেণীকে দুটি অপসারী শ্রেণীর অন্তরফল হিসেবে প্রকাশ করা যায়। ৩ + ৩

## বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। অন্তর্নিহিত অপেক্ষকের অস্তিত্ব ও অনন্যতা সম্পর্কিত উপপাদ্যটি নিম্ন ক্ষেত্রে উল্লিখিত বিন্দুতে প্রযুক্ত হতে পারে কিনা পরীক্ষা করুন :

$(x^2 + y^2)^2 - 8(x^2 - y^2) = 0$, $(\sqrt{3}, 1)$.



[ পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য



১২। জ্যাকবীয় পদ্ধতি প্রয়োগ করে দেখান যে, $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2fyz + 2gzx$ -কে দুটি $x, y, z$ -এর একমাত্রিক উৎপাদকের গুণফল হিসেবে প্রকাশ করা গেলে $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$ হবে।

১৩। প্রমাণ করুন যে সসীম সংখ্যক বদ্ধ সেটের ($\subset I\!R$) সংযোগ বদ্ধ সেট।

১৪। প্রমাণ করুন যে সেট $E = \{x : 0 < x < 1\}$ গণনযোগ্য নয়।

১৫। প্রমাণ করুন যে $\sin\frac{1}{x}$, $(0, \infty)$-তে সমসন্তত নয়।

১৬। দেখান যে, যে-কোনো $\alpha \geq 1$-এর জন্য $1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots$ এই শ্রেণীটি অভিসারী এবং এর যোগফল $\frac{1}{2}$ এবং 1-এর মধ্যে অবস্থিত।

১৭। মনে করুন $f : [a, b] \to I\!R$ ($0 < a < b$ অথবা $a < b < 0$) এরূপ সংজ্ঞাত আছে যে $f(x) = x\cos\frac{\pi}{2x}$ হবে। $f$, $[a, b]$ তে সীমিত ভেদযুক্ত কিনা পরীক্ষা করুন।

১৮। দেখান যে, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n.2^n}$ শ্রেণীটি $-3 \leq x < 1$-এ সম-অভিসারী হবে।

**( English Version )**

**Group – A**

Answer any *two* questions. $10 \times 2 = 20$

1. a) Let $A$ be a non-void bounded subset of $\mathbb{R}$. Let $F = \{|x-y| : x \in A, y \in A\}$. Obtain an expression of sup $F$ in terms of bounds of $A$. 3

b) Let the sequence of real numbers $\{a_n\}_n$ converges to zero and the sequence of real numbers $\{b_n\}_n$ be bounded in $\mathbb{R}$. Examine the convergence of $\{a_n b_n\}_n$. 3

c) Given a series $\sum_n n^{1/x}$ where $x \in \mathbb{R}$. Choose the correct statement from the following with reason : 4

i) The series is everywhere convergent

ii) The series is nowhere convergent

iii) The series is convergent when $-1 < x < 0$

iv) the series is convergent for $x > 1$.

2. a) Let the real-valued function $f$ be continuous at $p$ and in every neighbourhood of $p$, contained in the domain of $f$, $f(x)$ assumes both positive and negative values. Find the value of $f(p)$. 3





b) Let $S \equiv (0,1)$. Correct or justify : $\bigcup_{p=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p}, 1\right)$ is an open cover of $S$ but no finite sub-collection of it covers $S$. 3

c) Let $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$. Prove that $\{f_n(x)\}_n$ is not uniformly convergent in [ 0, 1 ] but is uniformly convergent in [ 0, $a$ ] where $0 < a < 1$. 2 + 2

3. a) Let $\xi$ be an accumulation point of an infinite set $S (\subset \mathbb{R})$. Show that every open interval $(\alpha, \beta)$ containing $\xi$, contains infinitely many elements of $S$. 3

b) Let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be continuous and assumes only rational values in the entire interval. If $f(x) = 3$ at $x = \frac{1}{3}$, show that $f(x) = 3$ everywhere in [ 0, 1 ]. 3

c) Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be monotonic increasing. Let $a < c < b$. Show that both $f(c+0)$ and $f(c-0)$ exist. 2 + 2

4. a) Let $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ be derivable in [ $a$, $b$ ] and let $f'$ be bounded in [ $a$, $b$ ]. Prove that $f$ is of bounded variation in [ $a$, $b$ ]. 3

b) Let $\{f_n(x)\}_n$ converge uniformly to the limit function $f(x)$ on set $S(\subset \mathbb{R})$ and let each $f_n(x)$ be bounded on $S$. Show that $f$ is bounded on $S$. 3

c) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ is convergent but the series $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n}$ is divergent. 2 + 2

**Group – B**

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Let $f: S \to \mathbb{R}$, where $S \subset \mathbb{R}^2$ and $(a,b) \in S$. Let $f_x(a,b)$ exist and $f_y$ be continuous at $(a, b)$. Prove that $f$ is differentiable at $(a, b)$.

6. Let $\sum_n f_n(x)$ converge uniformly to $f(x)$ for all $x \in S$ $(\subset \mathbb{R})$. Let $p$ be an accumulation point of $S$ and let $\lim_{x \to p} f_n(x) = a_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. Show that

   (i) $\sum_{n=1} a_n$ is convergent, (ii) $\lim_{x \to p} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

   3 + 3





7. a) Prove that there cannot be two different power series with the same interval of convergence and having the same sum function in the interval. 2

   b) Using the power series representation of $e^x$, evaluate with reasons :

   (i) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ (ii) $\lim_{x \to \infty} e^{-x}x^n$. 2 + 2

8. Let

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2), & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Show that $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ but neither $f_{xy}$ nor $f_{yx}$ obeys the conditions of Schwarz's theorem. 3 + 3

9. Prove that every bounded sequence in $\mathbb{R}$ has at least one convergent sub-sequence.

10. Prove that every absolutely convergent series in $\mathbb{R}$ can be expressed as the difference of two convergent series of positive terms and a conditionally convergent series in $\mathbb{R}$ can be expressed as the difference of two divergent series. 3 + 3

## Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Examine the applicability of the theorem on existence and uniqueness of implicit function near the point indicated :

$(x^2+y^2)^2-8(x^2-y^2)=0\ ,\ (\sqrt{3},1)$

12. Use the method of Jacobian to show that if $ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2fyz+2gzx$ be resolved into linear factors of *x, y* and *z,* then

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}=0\ .$$

13. Prove that the union of finite number of closed sets in $\mathbb{R}$ is a closed set.

14. Prove that the set $E=\{x:0<x<1\}$ is not enumerable.

15. Prove that $\sin\frac{1}{x}$ is not uniformly continuous in $(0,\infty)$.

16. Show that the series $1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\ldots$ is convergent for any $\alpha\geq 1$ and its sum lies between $\frac{1}{2}$ and 1.





17. Let $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ $(0<a<b$ or $a<b<0)$ be defined by $f(x)=x\cos\frac{\pi}{2x}$. Examine whether *f* is of bounded variation over [ *a, b* ].

18. Show that the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n.2^n}$ is uniformly convergent in $-3\leq x<1$.