স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

পঞ্চম পত্র (5th Paper : **Linear Algebra & Transformation**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) i) A এবং B দুটি একই মাত্রার অরথোগোন্যাল ম্যাট্রিক্স এবং $|A|+|B|=0$ হলে দেখান যে $|A+B|=0$.

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

ii) P এবং Q দুটি একই মাত্রার অরথোগোন্যাল ম্যাট্রিক্স হলে দেখান যে QPQ^T ম্যাট্রিক্সটিও অরথোগোন্যাল হবে। ৩ + ২

(খ) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ এবং $|A|\neq 0$,

যদি $A\,adjA=|A|^m I_n$ হয় তবে m-এর মান কত ? এর থেকে অথবা অন্য উপায়ে দেখান যে,

i) $|adjA|=|A|^{n-1}$ এবং

ii) $adj(adjA)=|A|^{n-2}.A$. ১ + ২ + ২

২। (ক) a, b, c তিনটি অশূন্য বাস্তব সংখ্যা হলে দেখান যে

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

৫

(খ) একটি ম্যাট্রিক্সের মাত্রার (rank) সংজ্ঞা লিখুন।

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ ম্যাট্রিক্সটিকে সারি সমতুল্য ইখিলন (Echelon) ম্যাট্রিক্সে পরিবর্তিত করে এর মাত্রা নির্ণয় করুন। ১ + ৪

৩। (ক) প্রমাণ করুন যে কোন সসীম ভেক্টরদেশের একটি বুনিয়াদ (basis) থাকবে। ৫

(খ) একটি বাস্তব দ্বিঘাতরূপ কখন ধনাত্মক নির্দিষ্ট আকারের হবে ?

$6x^2+y^2+18z^2-4yz-12zx$ -কে স্বাভাবিক আকারে রূপান্তরিত করে এটির আকার নিরূপণ করুন। এটির মাত্রা বের করুন। ১ + ৩ + ১

৪। (ক) দেখান যে

$$\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & 2ca-b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} -a & a & a \\ c & c & -c \\ b & -b & b \end{vmatrix}$$

$$= a^3+b^3+c^3-3abc.$$

৫

(খ) $S=\{(x,y,z,t)\in I\!R^4;\ x-y+z-2t=0\}$.

দেখান যে S, $I\!R^4$-এর একটি উপদেশ হবে।

এটির একটি বুনিয়াদ ও মাত্রা বের করুন। ৩ + ১ + ১

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। একটি ম্যাট্রিক্সের আইগেন মানের সংজ্ঞা দিন।

একটি প্রতিসম ম্যাট্রিক্সের আইগেন মানগুলি বাস্তব হবে দেখান।

আরও দেখান যে এটির বিভিন্ন আইগেন মানের অনুষঙ্গী আইগেন ভেক্টরগুলিও পরস্পর লম্ব।

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মান দুটি লিখুন।

১ + ২ + ২ + ১

৬। লম্ব ম্যাট্রিক্স পদ্ধতির সহায়তায় $7x^2-2xy+7y^2+6x+6y-1=0$ -কে স্বভাবী আকারে রূপান্তরিত করে কণিকটির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

৭। $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, দেখান যে $A^2-2A-3I_4=0$ (শূন্য ম্যাট্রিক্স) হবে।

এর সাহায্যে A^4 ম্যাট্রিক্সটি বের করুন এবং দেখান যে A ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা 4 হবে। ৩ + ২ + ১

৮। উদাহরণসহ ইউক্লিডিয় ভেক্টর দেশের সংজ্ঞা দিন।

$\mathbb{R}^3$-এর দুটি ভেক্টর $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ এর অন্তরগুণন $(\vec{a}\ \vec{b}) = |a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|$ দ্বারা নির্ণীত হলে $\mathbb{R}^3$ একটি ইউক্লিডিয় দেশ হবে কি ? যুক্তিসহ উত্তর দিন। ৩ + ৩

৯। $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ এবং $T_1(x, y, z) = (xy, z^2)$;
$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T_2(x, y, z) = (x + y, 3z)$.
T_1 এবং T_2 কি রৈখিক রূপান্তর হবে ? যুক্তিসহ উত্তর দিন।

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, যেখানে $T(0,1,0) = (2,1,1)$, $T(1,1,0) = (2,2,2)$, $T(1,1,2) = (4,6,4)$, $T(x, y, z)$ টি নির্ণয় করুন। ৪ + ২

১০। $A = (a_{ij})_{n\times n}$ একটি বিপ্রতিসম ম্যাট্রিক্স। দেখান যে $|A|$-এর মান শূন্য হবে যখন n একটি অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা এবং n যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা হলে $|A|$ পূর্ণবর্গ আকারের হবে। $(0 < n \le 4)$.

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

১১। $'a'$-এর কোন্ বাস্তব মানের জন্য $(1, 2, 1)$ এবং $(1, a, a^2)$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে ? এই ভেক্টরগুলি নিয়ে $\mathbb{R}^3$-এর একটি লম্ব বনিয়াদ নির্ণয় করুন।

১২। a, b, c বাস্তব সংখ্যাত্রয় গুণোত্তর প্রগতিতে থাকলে $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা তিন হবে দেখান।

১৩। দেখান যে অরথোগোন্যাল ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান সর্বদা 1 অথবা -1 হবে।

১৪। $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ এবং $T(x, y, z) = \{x - 2y + z, 2x - y - z, x + y - 2z\}$ হলে $Ker(T)$ বের করুন।

১৫। $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 3 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ হলে $adj\,\Delta$-এর মান নির্ণয় করুন।

১৬। $'a'$-এর কোন্ বাস্তব মানের জন্য $\begin{bmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা (i) এক হবে, (ii) দুই হবে, (iii) তিন হবে ?

১৭। $'a'$-এর কোন্ মানের জন্য $x+ay+az=1$, $ax+y+2az=4$, $ax-ay-2z=4$ সমীকরণত্রয়ের অসীম সংখ্যক সমাধান থাকবে ?

১৮। ইউক্লিডিয় ভেক্টর দেশ V-তে, $\alpha, \beta \in V$ -এর জন্য দেখান যে $\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\|+\|\beta\|$, চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত।

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) i) A and B are two orthogonal matrices of same order and $|A|+|B|=0$. Show that $|A+B|=0$.

ii) P and Q are two orthogonal matrices of same order. Show that QPQ^T is also orthogonal. 3 + 2

b) $A=(a_{ij})_{n\times n}$ and $|A| \neq 0$.

If $A\,adjA = |A|^m I_n$ then what is value of m? With the help of this or otherwise prove that

i) $|adjA| = |A|^{n-1}$

ii) $adj(adjA) = |A|^{n-2}.A$. 1 + 2 + 2

2. a) a, b, c are three non-zero real numbers. Show that

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$$

5

b) Define rank of a matrix.

Transform the matrix $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ to row reduced echelon form and find its rank. 1 + 4

3. a) Prove that a finite dimensional vector space has a basis. 5

b) When a quadratic form will be positive definite ?

Reduce the quadratic

$6x^2 + y^2 + 18z^2 - 4yz - 12zx$ to normal form and find its nature.

What is rank of this quadratic form ?

1 + 3 +1

4. a) Show that

$$\begin{vmatrix} 2bc - a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & 2ca - b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & 2ab - c^2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} -a & a & a \\ c & c & -c \\ b & -b & b \end{vmatrix}$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc .$$

5

b) $S = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ;\ x - y + z - 2t = 0 \}$.

Show that S is a sub-space of $\mathbb{R}^4$.

Find its rank and a basis. 3 + 1 + 1

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Define eigenvalue of a matrix.

Show that eigenvalues of a symmetric matrix are all real and eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues are orthogonal.

Write down the eigenvalues of $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1 + 2 + 2 + 1

6. Apply method of orthogonal matrices to reduce $7x^2 - 2xy + 7y^2 + 6x + 6y - 1 = 0$ to canonical form and find the nature of the conic.

7. For $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, show that

$A^2 - 2A - 3I_4 = 0$ (null matrix). Use this to show that rank of A is 4. Also find A^4. 3 + 2 + 1

8. Define Euclidean space with an example. Inner product of two vectors $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ in $\mathbb{R}^3$ is defined by $(\vec{a}\ \vec{b}) = | a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 |$. Check whether $\mathbb{R}^3$ will be Euclidean space or not. Give reason for your answer. 3 + 3

9. $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ and $T_1(x, y, z) = (xy, z^2)$;

$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T_2(x, y, z) = (x + y, 3z)$.

Are T_1 and T_2 linear transformations ?

Answer with reason. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ and $T(0,1,0) = (2,1,1)$, $T(1,1,0) = (2,2,2)$, $T(1,1,2) = (4,6,4)$. Find $T(x, y, z)$. 4 + 2

10. $A = (a_{ij})_{n \times n}$ is a skew-symmetric matrix. Show that $|A| = 0$ if n is odd integer and $|A|$ is a perfect square if n is even integer, $0 < n \le 4$.

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. For what real values of *'a'* the vectors (1, 2, 1) and $(1, a, a^2)$ are orthogonal ? Form an orthogonal basis of $\mathbb{R}^3$ with these vectors.

12. If *a, b, c* are three real numbers in Geometric progression then show that rank of $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ is three.

13. Show that the eigenvalues of an orthogonal matrix are 1 or –1.

14. If $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ and $T(x, y, z) = \{x - 2y + z, 2x - y - z, x + y - 2z\}$, then find $Ker(T)$.

15. If $\Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 3 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, then find the value of $adj\,\Delta$.

16. For what real values of *'a'* the rank of the matrix $\begin{bmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$ will be (i) one (ii) two (iii) three ?

17. For what values of *'a'* the equations $x + ay + az = 1$, $ax + y + 2az = 4$, $ax - ay - 2z = 4$ will have infinite number of solutions ?

18. For any two vectors $\alpha, \beta \in V$, in Euclidean space, show that $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$, symbols have their usual meaning.