স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

দ্বাদশ পত্র (12th Paper : **Probability Theory**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

প্রতীক চিহ্নগুলি প্রচলিত অর্থবহ।

Symbols have their usual meaning.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) দুটি পাত্রে যথাক্রমে 2 টি সাদা ও 1 টি কালো এবং 1 টি সাদা ও 5 টি কালো বল আছে। একটি বল প্রথম পাত্র থেকে দ্বিতীয় পাত্রে স্থানান্তরিত করা হল এবং তারপর দ্বিতীয় পাত্র থেকে একটি বল টানা হল। টানা বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কী ? ৫

(খ) যদি n টি পরস্পর স্বাধীন ঘটনার সম্ভাবনা $p_1, p_2, \ldots, p_n$ হয়, তাহলে দেখান যে এদের মধ্যে অন্তত একটি ঘটার সম্ভাবনা হবে $1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)$. ৫

২। (ক) একটি সমস্যার সমাধান A করতে পারার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$ এবং তা B করতে পারার সম্ভাবনা $\frac{1}{3}$। যদি দুজনেই স্বাধীনভাবে চেষ্টা করে, সমস্যাটি সমাধানের সম্ভাবনা কত ? ৫

(খ) যদি X পোয়াসঁ- μ চলক হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

$$P(X \le n) = \frac{1}{n!}\int_{\mu}^{\infty} e^{-x}x^n \mathrm{d}x,$$

যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। ৫

৩। (ক) একটি অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ 1 এবং কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত। ঐ অর্ধবৃত্তের উপর একটি বিন্দু যদৃচ্ছভাবে নেওয়া হল। প্রমাণ করুন যে ব্যাসের উপর এর অভিক্ষেপ বিন্দুর কেন্দ্র থেকে দূরত্ব এই চলকটির ঘনত্ব অপেক্ষক হবে $\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$. ৫

(খ) পোয়াসঁ-μ নিবেশনের জন্য দেখান যে

$$\mu_{k+1} = \mu\left(k\mu_{k-1} + \frac{\mathrm{d}\mu_k}{\mathrm{d}\mu}\right)$$

এবং এর থেকে γ_1 ও γ_2-র মান নির্ণয় করুন। ৫

৪। (ক) একটি সরলরেখাখণ্ড AB, C বিন্দুর দ্বারা AC ও CB এই দুভাগে বিভক্ত যাদের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a ও b । দুটি বিন্দু P ও Q স্বাধীনভাবে ও যদৃচ্ছভাবে যথাক্রমে AC ও CB-র উপর নেওয়া হল। AP, PQ, QB একটি ত্রিভুজ তৈরি করতে পারার সম্ভাবনা কত ? ৫

(খ) দেখান যে লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ রেখাদুটির মধ্যে সূক্ষ্ম কোণ θ হলে $\tan\theta = \frac{1-\rho^2}{\rho} \cdot \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$.

$\rho = 0$ এবং $\rho = \pm 1$ হলে θ-এর মান ও তার ব্যাখ্যা কী ? ৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। $2a$ দৈর্ঘ্যের একটি সরলরেখাদণ্ড AB-র উপর যদৃচ্ছভাবে একটি বিন্দু P নেওয়া হল। $AP.PB$ এই আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}a^2$ অতিক্রম করার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

৬। প্রমাণ করুন যে $\{E(XY)\}^2 \le E(X^2)E(Y^2)$ শোর্য়াৎসের অসমতা এবং এর থেকে উপপাদন করুন $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$.

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

৭। একটি অপেক্ষক $f(x)$-এর সংজ্ঞা হল :

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \ 0 < x < 1 \\ k - x & ; \ 1 < x < 2 \\ 0 & ; \ \text{অন্যত্র} \end{cases}$$

দেখান যে ধ্রুবক k-এর নির্দিষ্ট মানের জন্য $f(x)$ একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক। চলকটি $\frac{1}{2}$ ও $\frac{3}{2}$-এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা নির্ণয় করুন।

৮। যদি (X, Y)-এর নিবেশন হয় সাধারণ দ্বিচলক স্বাভাবিক নিবেশন, তাহলে দেখান যে

$$\left\{\frac{(X-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(X-m_x)(Y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(Y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right\} / (1-\rho^2)$$

এই চলকের নিবেশন হবে χ^2 যার সাতন্ত্র্য মাত্রা 2.

৯। যদি $X_n \xrightarrow[inP]{} a$ এবং $Y_n \xrightarrow[inP]{} b$ যখন $n \to \infty$, তাহলে দেখান যে $X_n / Y_n \xrightarrow[inP]{} a/b$ যখন $n \to \infty$ এবং $b \ne 0$.

১০। প্রমাণ করুন যে বারনুলির উপপাদ্য সমান অংশের জন্য বৃহৎ নিয়মের বিশেষ ফল।

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $৩ \times ৪ = ১২$

১১। যদি t চলকের নিবেশন $t\,(\,n\,)$ হয়, প্রমাণ করুন যে t^2 একটি $F\,(\,1,\,n\,)$ চলক।

১২। একটি অপেক্ষক যার মান $(-1,1)$ অন্তরে $|x|$ এবং অন্যত্র শূন্য। দেখান যে এটি একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক এবং তার প্রতিষঙ্গী সম্ভাবনা নিবেশন অপেক্ষক নির্ণয় করুন।

১৩। যদি X একটি স্বাভাবিক (m,σ) চলক হয়, প্রমাণ করুন যে

$$P(a < X < b) = \phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

এবং $P(|X-m| > a\sigma) = 2[1-\phi(a)]$,

যেখানে $\phi(x)$ আদর্শ স্বাভাবিক নিবেশন অপেক্ষক।

১৪। যদি $F(x)$ একটি যদৃচ্ছ চল X-এর নিবেশন অপেক্ষক হয়, তাহলে দেখান যে

$$P(a < X < b) = F(b-0) - F(a)$$
$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a-0).$$

১৫। ধ্রুবক k-এর মান নির্ণয় করুন যার জন্য

$$f(x,y) = kxy \quad (0 < x < 1,\, 0 < y < x)$$

একটি সম্ভাব্য দ্বিমাত্রিক ঘনত্ব অপেক্ষক হয়। প্রান্তিক ঘনত্ব অপেক্ষকগুলি নির্ণয় করুন এবং দেখান যে চলক দুটি অনপেক্ষ নয়।

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

১৬। যদি X, Y অনপেক্ষ হয়, তাহলে $a_1X + b_1Y$ ও $a_2X + b_2Y$ এই দুটি চলকের সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন।

১৭। নির্ভরণ সরলরেখাদুটি $x + 6y = 6$, $3x + 2y = 10$ হলে গড়গুলি ও সহগাঙ্ক নির্ণয় করুন।

১৮। মনে করুন $X_1, X_2, \ldots$ একটি যুগ্মভাবে অননুবন্ধী চলকের ক্রম, যাদের সসীম গড় মান যথাক্রমে $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ এবং সমক বিচ্যুতি যথাক্রমে $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$। প্রমাণ করুন যে এই চলক ক্রমের জন্য বৃহৎ সংখ্যার নিয়ম খাটে যদি $\{\sigma_n\}$ ক্রমটি সীমাবদ্ধ হয়।

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. $10 \times 2 = 20$

1. a) Two urns contain respectively 2 white and 1 black balls, and 1 white and 5 black balls. One ball is transferred from the first to the second urn, and then a ball is drawn from the second urn. What is the probability that the ball drawn is white ? 5

b) If the probabilities of n mutually independent events are $p_1, p_2, \ldots, p_n$, then show that the probability that at least one of these events will occur is $1-(1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n)$. 5

2. a) The probability that A can solve a certain problem is $\frac{2}{5}$ and that B can solve it is $\frac{1}{3}$. If both try it independently, what is the probability that it is solved ? 5

b) If X is Poisson distribution with parameter μ, then prove that $P(X \le n) = \frac{1}{n!}\int_{\mu}^{\infty} e^{-x} x^n \mathrm{d}x$, where n is any positive integer. 5

3. a) A point is chosen at random on a semi-circle having centre at the origin and radius unity and projected at a point on the diameter. Prove that the distance of the point of projection from the centre has probability density $\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ for $-1 < x < 1$. 5

b) For the Poisson distribution with parameter μ, prove that $\mu_{k+1} = \mu\left(k\mu_{k-1} + \frac{\mathrm{d}\mu_k}{\mathrm{d}\mu}\right)$. Hence calculate γ_1 and γ_2. 5

4. a) A straight line AB is divided by a point C into two parts AC and CB whose lengths are a and b respectively. If points P and Q are independently chosen at random on AC and CB respectively, find the probability that AP, PQ, QB can form the sides of a triangle. 5

b) Show that acute angle θ between the least square regression lines is given by

$$\tan\theta = \frac{1-\rho^2}{\rho} \cdot \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Find the values of θ and discuss the cases when $\rho = 0$ and $\rho = \pm 1$. 5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. A point P is taken at random on a line segment AB of length $2a$. Find the probability that the area of the rectangle $AP.PB$ will exceed $\frac{1}{2}a^2$.

6. Prove Schwartz's inequality for expectations that $\{E(XY)\}^2 \le E(X^2)E(Y^2)$, and hence deduce that $-1 \le \rho\,(X,Y) \le 1$.

7. Show that a function $f(x)$ given by

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < 1 \\ k - x ; & \quad 1 < x < 2 \\ 0 & ; \quad \text{elsewhere} \end{cases}$$

is a probability density function for a suitable value of the constant k. Calculate the probability that the random variable lies between $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{2}$.

8. If (X, Y) has the general bivariate normal distribution, show that

$$\left\{\frac{(X-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho\frac{(X-m_x)(Y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(Y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right\}/(1-\rho^2)$$

has a χ^2-distribution with 2 degree of freedom.

9. Let $X_n \xrightarrow[inP]{} a$ and $Y_n \xrightarrow[inP]{} b$ as $n \to \infty$. Then show that $X_n / Y_n \xrightarrow[inP]{} a/b$ as $n \to \infty$, provided $b \ne 0$.

10. Obtain Bernoulli's theorem as a particular case of the law of large numbers for equal components.

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. If t has t-distribution with n degrees of freedom, then show that t^2 is an $F(1, n)$ variate.

12. Show that a function which is $|x|$ in $(-1,1)$ and zero elsewhere is possible probability density function, and find the corresponding distribution function.

13. If X is a normal (m,σ) variate, prove that

$P(a < X < b) = \phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$ and

$P(|X-m| > a\sigma) = 2[1-\phi(a)]$, where $\phi(x)$ denotes the standard normal distribution function.

14. If $F(x)$ denotes the distribution function of a random variable X, then show that

$P(a < X < b) = F(b-0) - F(a)$

$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a-0)$.

15. Determine the value of the constant k which makes $f(x,y) = kxy \quad (0 < x < 1, 0 < y < x)$ a joint probability density function. Calculate the marginal density functions, and show that the variates are dependent.

16. If X and Y are uncorrelated, find the correlation coefficient between the linear combinations $a_1X + b_1Y$ and $a_2X + b_2Y$.

17. If the regression lines are $x + 6y = 6$ and $3x + 2y = 10$, find the means and correlation coefficient.

18. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ be a sequence of pairwise uncorrelated random variables having finite means $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ and standard deviations $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ respectively. Show that the law of large numbers holds if the sequence $\{\sigma_n\}$ is bounded.