স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

গণিত (Mathematics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

পঞ্চদশ পত্র (15th Paper : **Complex Analysis & Laplace Transformation**)

সময় ঃ দুই ঘণ্টা | পূর্ণমান ঃ ৫০

Time : 2 Hours | Full Marks : 50

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

ব্যবহৃত প্রতীকগুলি সাধারণ অর্থবহ।

Used symbols have their usual meaning.

বিভাগ — ক

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১০ × ২ = ২০

১। (ক) দেখান যে আরগঁ সমতলে z_1, z_2 এবং z_3 জটিল সংখ্যা তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ত্রয় সূচিত করে যদি

$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0$ হয়। ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) ল্যাপ্লাস রূপান্তর প্রক্রিয়ার সাহায্যে সমাধান করুন :

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t}\sin t,$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$ ৫

২। (ক) যদি $u - v = (x-y)(x^2 + 4xy + y^2)$ এবং $f(z) = u + iv$ একটি বিশ্লেষণযোগ্য অপেক্ষক হয় তাহলে $f(z)$ নির্ণয় করুন। ৫

(খ) কনভলিউশন উপপাদ্যের সাহায্যে দেখান যে

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t.$$ ৫

৩। (ক) একটি দ্বি-রৈখিক রূপান্তরের অধীনে যদি দুটি ভিন্ন ভিন্ন সসীম অবিচল বিন্দু p, q হয়, তবে দেখান যে রূপান্তরটিকে নিচের আকারে লেখা যায়

$$\frac{\omega - p}{\omega - q} = K\left(\frac{z-p}{z-q}\right),$$

যেখানে K একটি ধ্রুবক $\neq 0, 1$। ৫

(খ) মনে করুন অপেক্ষক $f(t)$ নিম্নলিখিত রূপে সংজ্ঞাত আছে :

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 3 \\ t-1, & t > 3 \end{cases}$$

$L\{f(t)\}$ নির্ণয় করুন। ৫

৪। (ক) মনে করুন

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

$z = 0$ বিন্দুতে $f(z)$ অন্তরকলনযোগ্য কিনা বিচার করুন। আবার $z = 0$ বিন্দুতে কশী-রীমান সমীকরণদ্বয় সিদ্ধ কিনা পরীক্ষা করুন। ৫

(খ) $L\{f(t)\} = \overline{f}(s)$ হলে প্রমাণ করুন যে

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\overline{f}(s),\ n = 1, 2, 3, \ldots .$$

৫

বিভাগ — খ

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৬ × ৩ = ১৮

৫। একটি দ্বি-রৈখিক রূপান্তর নির্ণয় করুন যেটি $z = \infty, 0, 1$ বিন্দুগুলিকে যথাক্রমে $\omega = 0, 1, \infty$ বিন্দুগুলিতে রূপান্তরিত করে। আরো দেখান যে, এই রূপান্তরটি

i) z-তলে বাস্তব অক্ষ $\operatorname{Im} z = 0$ কে ω-তলে $\operatorname{Im} \omega = 0$ তে রূপান্তরিত করে ;

ii) উর্ধ্ব অর্ধতল $\operatorname{Im} z > 0$ কে উর্ধ্ব অর্ধতল $\operatorname{Im} \omega > 0$ তে রূপান্তরিত করে;

iii) নিম্ন অর্ধতল $\operatorname{Im} z < 0$ কে নিম্ন অর্ধতল $\operatorname{Im} \omega < 0$ তে রূপান্তরিত করে।

৬। যদি $|\cos(x + iy)| = 1$ হয়, তবে দেখান যে $\cos 2x + \cos h\, 2y = 2$.

৭। (ক) দেখান যে $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$ -এর অস্তিত্ব নেই। ২

(খ) প্রমাণ করুন যে দুটি সন্তত অপেক্ষকের সংযোজক অপেক্ষক একটি সন্তত অপেক্ষক। ৪

৮। ল্যাপ্লাস রূপান্তরের সাহায্যে নিম্নলিখিত সমাকলটি নির্ণয় করুন :

$$\int_0^\infty \frac{\sin 5t}{t} dt$$

৯। প্রমাণ করুন যে

$$L^{-1}\left\{\frac{5s + 3}{(s-1)(s^2 + 2s + 5)}\right\} = e^t - e^{-t}\cos 2t + \frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t .$$

১০। ল্যাপ্লাস রূপান্তরের সাহায্যে সমাধান করুন :

$$y'''(t) - 2y''(t) + y(t) = \sin t ,$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 .$$

বিভাগ — গ

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $৩ \times ৪ = ১২$

১১। দেখান যে $f(z) = e^{\bar{z}}$ অপেক্ষকটি জটিল সমতলে বিশ্লেষণযোগ্য নয়।

১২। প্রদত্ত D ক্ষেত্রের উপর f একটি বিশ্লেষণযোগ্য অপেক্ষক এবং $f'(z) \equiv 0$ হলে দেখান যে ঐ ক্ষেত্রে (D) f একটি ধ্রুবক অপেক্ষক হবে।

১৩। সমাধান করুন : $(1+z)^4 = (1-z)^4$.

১৪। দেখান যে $u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ একটি হরাত্মক অপেক্ষক।

১৫। Milne-Thomson পদ্ধতিতে একটি বিশ্লেষণযোগ্য অপেক্ষক $f(z)$ নির্ণয় করুন যখন $\text{Re}\, f(z) = u(x,y) = 2x(1-y)$.

১৬। $L\{f(t)\}$ নির্ণয় করুন যখন $f(t) = (t^2-1)^3$.

১৭। ল্যাপ্লাস রূপান্তরের প্রাথমিক চলন ধর্ম এবং স্কেল পরিবর্তনের ধর্মটি বিবৃত করুন।

১৮। $L\{f(t)\}$ নির্ণয় করুন যখন $f(t) = \dfrac{e^{at}-1}{a}$.

(English Version)

Group – A

Answer any *two* questions. $10 \times 2 = 20$

1. a) Prove that the complex numbers z_1, z_2 and z_3 represent vertices of an equilateral triangle in Argand plane if $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0$. 5

   b) Solve by Laplace transformation : $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t}\sin t$, given that $y(0) = 0$ and $y'(0) = 1$. 5

2. a) Find an analytic function $f(z) = u + iv$ where $u - v = (x-y)(x^2 + 4xy + y^2)$. 5

   b) Using convolution theorem, show that $L^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\} = \dfrac{1}{2}t\cos 2t + \dfrac{1}{4}\sin 2t$. 5

3. a) If p, q are two distinct finite fixed points of a bilinear transformation then show that the transformation can be written as $\dfrac{\omega - p}{\omega - q} = K\left(\dfrac{z-p}{z-q}\right)$, where $K(\neq 0,1)$ is a constant. 5

   b) The function $f(t)$ is defined as follows :

   $$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 3 \\ t-1, & t > 3 \end{cases}$$

   Find $L\{f(t)\}$. 5

4. a) Let

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}+i\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

Verify whether $f(z)$ is differentiable at $z=0$. Examine whether Cauchy-Riemann equations are satisfied at $z=0$. 5

b) If $L\{f(t)\}=\overline{f}(s)$, then prove that

$$L\{t^n f(t)\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\overline{f}(s),\ n=1,2,3,\ldots.$$

5

Group – B

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

5. Find a bilinear transformation which transforms the points $z=\infty,0,1$ into the points $\omega=0,1,\infty$. Show also that it transforms
   i) the real axis $\operatorname{Im} z=0$ into $\operatorname{Im}\omega=0$;
   ii) the upper half plane $\operatorname{Im} z>0$ into the upper half plane $\operatorname{Im}\omega>0$;
   iii) the lower half plane $\operatorname{Im} z<0$ into the lower half plane $\operatorname{Im}\omega<0$.

6. If $|\cos(x+iy)|=1$, then show that $\cos 2x+\cosh 2y=2$.

7. a) Prove that $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{\overline{z}}$ does not exist. 2

   b) Prove that the composition of two continuous functions is continuous. 4

8. Find the following integral by Laplace transformation :

$$\int_0^\infty \frac{\sin 5t}{t}\,dt$$

9. Prove that

$$L^{-1}\left\{\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right\}=e^t-e^{-t}\cos 2t+\frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

10. Solve the following by Laplace transformation :
    $y'''(t)-2y''(t)+y(t)=\sin t$,
    given that $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

Group – C

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

11. Show that the function $f(z)=e^{\overline{z}}$ is nowhere analytic in the complex plane.

12. Let f be analytic in a domain D and $f'(z)\equiv 0$ in D. Then show that f is a constant function.

13. Solve : $(1+z)^4=(1-z)^4$.

14. Show that the function
    $u(x,y)=e^{-x}(x\sin y-y\cos y)$ is harmonic.

15. Find an analytic function $f(z)$ by Milne-Thomson method, given that
    $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)=2x(1-y)$.

16. Find $L\{f(t)\}$ if $f(t)=(t^2-1)^3$.

17. State First shifting property and change of scale property of Laplace transformation.

18. Find $L\{f(t)\}$ when $f(t)=\dfrac{e^{at}-1}{a}$.