স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

গণিত (Mathematics)

সহায়ক পাঠক্রম (Subsidiary-2)

দ্বিতীয় পত্র (S-2, SMT-II : **Mathematics-II**)

সময় ঃ তিন ঘণ্টা | পূর্ণমান ঃ ১০০

Time : 3 Hours | Full Marks : 100

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ – ক (পূর্ণমান : ৪০)

১। 'ক' অথবা 'খ' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ২০ × ১ = ২০

(ক) i) দেখান যে $x - \frac{x^2}{2} < \log_e(1+x) < x$, $\forall x > 0$. ৫

ii) দেখান যে $\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$, $x \in \mathbb{R}$. ৫

iii) যদি $x^y + y^x = a^9$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$-এর মান কত ? ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

iv) $S = P(x,y)$ অপেক্ষকের $x = e^u \cos\theta$, $y = e^u \sin\theta$ হলে, দেখান যে

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 = (x^2+y^2)\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right\}.$$

৫

(খ) i) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ সমীকরণটিকে $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$ এবং $W = W(u,v)$ প্রতিস্থাপনের দ্বারা $\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u}\frac{\partial W}{\partial v}$ তে রূপান্তরিত করুন। ৫

ii) Lagrange-এর মধ্যমমান উপপাদ্যটি বিবৃত করে প্রমাণ করুন। ৫

iii) প্রমান করুন যে যদি কোন অপেক্ষক $f(x)$, $x = c$ বিন্দুতে সন্তত হয় এবং $f(c) \neq 0$ হয় তাহলে একটি নির্দিষ্ট $\delta > 0$ এবং সমস্ত $x \in (c-\delta, c+\delta)$-এর জন্য $f(x)$ ও $f(c)$-এর একই চিহ্ন হবে। ৫

iv) Raabe's test-এর সাহায্যে $1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \ldots$ শ্রেণীর অভিসারিত্ব যাচাই করুন। ৫

২। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ২০ × ১ = ২০

(ক) i) নির্দিষ্ট সমাকলের সংজ্ঞা থেকে $\int_4^6 \sqrt{x}\,dx$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৫

ii) দেখান যে $\int_0^{\pi/2} \log\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)$. ৫

iii) মান নির্ণয় করুন : $\int_0^{\log 2}\{\int_{-1}^{1} ye^{xy}dy\}dx$. ৫

iv) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ বক্রটি দ্বারা x-অক্ষের চারদিকে আবর্তিত ঘন বস্তুর আয়তন নির্ণয় করুন। ৫

(খ) i) মান নির্ণয় করুন : $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$. ৫

ii) $I_n=\int \sec^n x\,dx$ লঘুকরণ করে I_7 নির্ণয় করুন। ৫

iii) $r=a(1+\cos\theta)$ বক্রটির পরিসীমা নির্ণয় করুন। ৫

iv) সমাকলন করুন : $\int\frac{3\sin x+4\cos x}{4\sin x+3\cos x}dx$. ৫

বিভাগ – খ (পূর্ণমান : ৩৬)

৩। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১২ × ১ = ১২

(ক) i) $y=\cos(10\cos^{-1}x)$ হলে দেখান যে $(1-x^2)y_{12}-21xy_{11}=0$. ৬

ii) Taylor's theorem টি n-সংখ্যক পদের পরে Lagrange অবশেষটি বিবৃত করে প্রমাণ করুন। ৬

(খ) i) যে কোনো একটি নাভির সাপেক্ষে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের পাদ-সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৬

ii) Fermat's theorem টি বিবৃত করে প্রমাণ করুন। এর বিপরীতটি সত্য কিনা যাচাই করুন। ৪ + ২

৪। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১২ × ১ = ১২

(ক) i) সমাধান করুন :

$(2x+y-3)dy=(x+2y-3)dx$. ৬

ii) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ কি শর্তে অভিসারী ও চরম অভিসারী হবে ? এখান থেকে দেখান যে $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ অভিসারী। ৬

(খ) i) সমাধান করুন :

$x^3y^3(2y\,dx + x\,dy) = (5y\,dx + 7x\,dy)$. ৬

ii) সমাকলন করুন : $\int (\sqrt{\tan x} + \sqrt{\cot x})\,dx$.৬

৫। '**ক**' অথবা '**খ**' প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ১২ × ১ = ১২

(ক) i) $x + y = p$ হলে $x^m y^n$ -এর চরম মান নির্ণয় করুন ($m, n, p > 0$) । এর থেকে দেখান যে

$$a^m b^n < \left(\frac{ma+nb}{m+n}\right)^{m+n},\ a, b(\neq a) > 0\ .$$

৬

ii) মান নির্ণয় করুন : $\iint_R y^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,dy$

যখন $R : \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2\}$. ৬

(খ) i) প্রথম পাদে $x = 0,\ x + y = 3,\ y^2 = 4x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্র R-এর উপর

$\iint_R (2 + x)y\,dx\,dy$ -এর মান নির্ণয় করুন। ৬

ii) সমঘাতী অপেক্ষক-এর ক্ষেত্রে Euler-এর বিপরীত উপপাদ্য বিবৃত করে প্রমাণ করুন। ৬

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

বিভাগ – গ (পূর্ণমান : ২৪)

৬। যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

i) দেখান যে $\left\{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}_n$ একটি Cauchy ক্রম।

ii) $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots$ শ্রেণীটির অভিসারিতা যাচাই করুন।

iii) $\sqrt{7}$ সংখ্যাটি মূলদ কিনা যাচাই করুন।

iv) $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,\ldots,9,10\}$, $C = \{2,3,5,7,9\}$, $D = \mathbb{R}$ এবং $f : A \to B$ যাতে $f(x) = 2x + 1$, $\forall x \in A$; $g : C \to D$ যাতে $g(x) = x^2$, $\forall x \in C$; $h : A \to D$ হলে $h(A)$ নির্ণয় করুন যেখানে $h(x) = g(f(x))$.

v) $\underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

vi) $1° = 0\cdot0175$ রেডিয়ান ও $1' = 0\cdot00029$ রেডিয়ান হলে $\tan 45°58'$ -এর আসন্ন মান তিন দশমিকে নির্ণয় করুন।

vii) $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ বক্রের $\theta = 0$ বিন্দুতে বক্রতা নির্ণয় করুন।

viii) $y = be^{\frac{x}{a}}$ বক্রের উপস্পর্শক-এর দৈর্ঘ্য ও উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য (0, b) বিন্দুতে নির্ণয় করুন।

৭। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ২ = ৬

i) দেখান যে

$$\frac{1}{2}B(m,n)=\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta\,d\theta.$$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

iii) $y=a\log x+b$ -এর অবকল সমীকরণ নির্ণয় করুন।

iv) সমাকলন করুন : $\int\frac{dx}{2+\cos x+2\sin x}$.

৮। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ২ = ৬

i) সমাধান করুন :

$y(2x^2-xy+1)dx+(x-y)dy=0$.

ii) সমাধান করুন : $(D^2+4)y=\sin 4x$, $D\equiv\frac{d}{dx}$.

iii) সমাধান করুন : $p^2-2px+1=0$, $p\equiv\frac{dy}{dx}$.

iv) $x^2+y^2=2gx$ (g প্রচল) বৃত্ত গোষ্ঠীর লম্ব প্রক্ষেপ নির্ণয় করুন।

(English Version)

Group – A (Marks : 40)

1. Answer **(a)** or **(b)** : 20 × 1 = 20

a) i) Show that $x-\frac{x^2}{2}<\log_e(1+x)<x$, $\forall x>0$. 5

ii) Show that $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, $x\in\mathbb{R}$. 5

iii) If $x^y+y^x=a^9$, then find $\frac{dy}{dx}$. 5

iv) If $S=P(x,y)$ where $x=e^u\cos\theta$, $y=e^u\sin\theta$, then show that

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2=(x^2+y^2)\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right\}.$$

5

b) i) Convert $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ into $\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial v}=\frac{1}{2u}\frac{\partial W}{\partial v}$ by substituting $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$ and $W=W(u,v)$. 5

ii) State and prove the Lagrange's Mean Value theorem. 5

iii) If a function $f(x)$ is continuous at $x=c$ and $f(c)\neq 0$, then prove that for a fixed $\delta>0$ and $\forall x\in(c-\delta,c+\delta)$, $f(x)$ and $f(c)$ have the same sign. 5

iv) Test the convergency, by Raabe's test, of series $1+\frac{1}{2.3}+\frac{1.3}{2.4.5}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}+\ldots.$ 5

2. Answer **(a)** or **(b)** : 20 × 1 = 20

a) i) From the definition of definite integral, find $\int_4^6 \sqrt{x}\,dx$. 5

ii) Show that $\int_0^{\pi/2} \log\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)$. 5

iii) Evaluate : $\int_0^{\log 2} \{ \int_{-1}^{1} ye^{xy}dy \}dx$. 5

iv) Find the volume of solid by revolution of the curve $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ about x-axis. 5

b) i) Evaluate : $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$. 5

ii) Find I_7 by reduction formula of $I_n = \int \sec^n x\,dx$. 5

iii) For the curve $r=a(1+\cos\theta)$, find its perimeter. 5

iv) Evaluate : $\int \frac{3\sin x+4\cos x}{4\sin x+3\cos x}dx$. 5

Group – B (Marks : 36)

3. Answer **(a)** or **(b)** : 12 × 1 = 12

a) i) If $y=\cos(10\cos^{-1}x)$, then show that $(1-x^2)y_{12}-21xy_{11}=0$. 6

ii) State and prove the Taylor's theorem with Lagrange's form of remainder after n terms. 6

b) i) Find pedal equation of the conic $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ w.r.t. any focus. 6

ii) State and prove Fermat's theorem. Is the converse of the theorem true ? Justify. 4 + 2

4. Answer **(a)** or **(b)** : 12 × 1 = 12

a) i) Solve : $(2x+y-3)dy=(x+2y-3)dx$. 6

ii) For what conditions, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ to be convergent and absolutely convergent ? Hence show that $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ is convergent. 6

b) i) Solve : $x^3y^3(2y\,dx+x\,dy)=(5y\,dx+7x\,dy)$. 6

ii) Evaluate : $\int (\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x})\,dx$. 6

5. Answer **(a)** or **(b)** : 12 × 1 = 12

a) i) If $x + y = p$ then find the extreme value of $x^m y^n$, ($m, n, p > 0$). Hence show that $a^m b^n < \left(\frac{ma+nb}{m+n}\right)^{m+n}$, $a, b (\neq a) > 0$. 6

ii) Evaluate : $\iint_R y^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx\,dy$, where $R : \{(x,y) : x^2 + y^2 \le a^2\}$. 6

b) i) Evaluate : $\iint_R (2+x)y\,dx\,dy$ where R is the region on first quadrant enclosed by $x = 0$, $x + y = 3$, $y^2 = 4x$. 6

ii) State and prove converse of Euler's theorem for homogeneous function. 6

Group – C (Marks : 24)

6. Answer any *four* questions : 3 × 4 = 12

i) Show that $\left\{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right\}_n$ is a Cauchy sequence.

ii) Test the convergence of $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots$.

iii) Test whether $\sqrt{7}$ is rational or not.

iv) If $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,\ldots,9,10\}$, $C = \{2,3,5,7,9\}$, $D = \mathbb{R}$ and $f : A \to B$, such that $f(x) = 2x + 1$, $\forall x \in A$; $g : C \to D$ such that $g(x) = x^2$, $\forall x \in C$. If $h : A \to D$, then find $h(A)$ where $h(x) = g(f(x))$.

v) Evaluate : $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

vi) If $1° = 0\cdot0175$ rad. and $1' = 0\cdot00029$ rad. then find the approximate value (up to 3 decimal) of $\tan 45°58'$.

vii) Find the curvature of the conic $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ at $\theta = 0$.

viii) Find the length of sub-tangent and sub-normal to the conic $y = be^{\frac{x}{a}}$ at (0, b) point.

7. Answer any *two* questions : 3 × 2 = 6

i) Show that $\frac{1}{2}B(m,n) = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$.

ii) Evaluate : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

iii) Find the differential equation of the conic $y = a\log x + b$.

iv) Integrate : $\int \frac{dx}{2+\cos x+2\sin x}$.

8. Answer any *two* questions : 3 × 2 = 6

i) Solve : $y(2x^2 - xy + 1)dx + (x - y)dy = 0$.

ii) Solve : $(D^2 + 4)y = \sin 4x$, where $D \equiv \frac{d}{dx}$.

iii) Solve : $p^2 - 2px + 1 = 0$, where $p \equiv \frac{dy}{dx}$.

iv) Find the orthogonal trajectory of the family of circles $x^2 + y^2 = 2gx$, g is a parameter.