স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

গণিত (Mathematics)

সহায়ক পাঠক্রম (Subsidiary-1)

প্রথম পত্র (S-1, SMT-I : **Mathematics-I**)

সময় ঃ তিন ঘণ্টা **পূর্ণমান ঃ ১০০**

Time : 3 Hours Full Marks : 100

(মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%)

(Weightage of Marks : 70%)

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

বিভাগ - ক

[পূর্ণমান : ২০]

যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন । ১০ × ২ = ২০

১। (ক) i) $(\sqrt{3}+i)^{1/6}$ নির্ণয় করুন, যেখানে $i=\sqrt{-1}$. ৫

ii) সমাধান করুন $e^z=-2$, যেখানে z একটি জটিল রাশি। ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) i) $x^3-rx^2+rx-4=0$ সমীকরণটির দুটি বীজ একে অপরের অন্যোন্যক। r-এর মান এবং সমীকরণটির বীজগুলি নির্ণয় করুন। ৫

ii) $A=\begin{pmatrix}0 & 2\beta & \gamma\\ \alpha & \beta & -\gamma\\ \alpha & -\beta & \gamma\end{pmatrix}$ লম্ব ম্যাট্রিক্স হলে α, β, γ নির্ণয় করুন। ৫

(গ) i) মনে করুন A, B, C তিনটি অশূন্য সেট। দেখান যে শুধুমাত্র $A\cap B=A\cap C$ থেকে $B=C$ হয় না, কিন্তু $A\cap B=A\cap C$ ও $A\cup B=A\cup C$ একত্রে থাকলে $B=C$ হয়। ৫

ii) একটি চিত্রণ $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ এভাবে সংজ্ঞাত আছে যে, $f(x)=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

f^{-1}-এর অস্তিত্ব পরীক্ষা করুন। ৫

(ঘ) i) একটি বলয় $(S,+,\cdot)$-এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করুন যে

A) $a.0=0.a=0$ যেখানে $a\in S$

B) $a,b\in S \Rightarrow a.(-b)=(-a).b=-(a.b)$ ৫

ii) $\begin{vmatrix}x & x^2 & 1+x^2\\ y & y^2 & 1+y^2\\ z & z^2 & 1+z^2\end{vmatrix}=0$ হলে দেখান যে $xyz=-1$ হবে। ৫

বিভাগ - খ

[পূর্ণমান : ১৮]

যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন। ৬ × ৩ = ১৮

২। i) z অশূন্য জটিল রাশি ও m ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে দেখান যে $\log z^m \neq m \log z$ এবং $\log(z^{1/m}) = \frac{1}{m}\log z$.

ii) $81x^3 - 18x^2 - 36x + 8 = 0$ সমীকরণের বীজগুলি বিপরীত প্রগতিতে আছে। সমীকরণটি সমাধান করুন।

iii) যদি $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix}$ এবং $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ হয়, তাহলে a ও b -এর মান নির্ণয় করুন।

iv) ক্রামারের নিয়মে সমাধান করুন :

$3x + y - z = 1$, $5x + 2y + 3z = 2$,

$8x + 3y + z = 3$.

v) ধরা যাক Z পূর্ণসংখ্যার সেট। যদি প্রক্রিয়া '*' নিম্নভাবে সংজ্ঞাত হয়, $u * v = u$, v-এর ল.সা.গু. হয়, তবে ঐ '*' প্রক্রিয়া সাপেক্ষে Z দল গঠন করে কিনা পরীক্ষা করুন।

 [পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

vi) ক্যালি-হামিল্টন উপপাদ্যের সাহায্যে A^{-1} নির্ধারণ করুন যেখানে, $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

বিভাগ - গ

[পূর্ণমান : ১২]

যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন। ৩ × ৪ = ১২

৩। i) z জটিল রাশি হলে, দেখান যে $\tan z = \frac{\sin 2z}{1+\cos 2z}$.

ii) $x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 1$ কে $(x-1)$-এর ঘাত বিশিষ্ট বহুপদ রাশিতে প্রকাশ করুন।

iii) α, β, γ যদি $x^3 + px + q = 0$ $(q \neq 0)$-এর তিনটি বীজ হয়, মান নির্ণয় করুন :

(A) $\sum \frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}$

(B) $\sum \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}$.

iv) $x^4 + 2x^3 + 143x^2 + 430x + 462 = 0$ সমীকরণের দ্বিতীয় পদ অপসারণ করুন।

v) যদি $(G, *)$ দল হয় ও $a \in G$, $H = \{a^n : n \in z\}$ হয়, তবে H, $(G, *)$-এর উপদল হবে প্রমাণ করুন।

vi) যে কোন চক্রজ দল $(G, *)$ বিনিময়যোগ্য কিন্তু যে কোন বিনিময়যোগ্য দল চক্রজ নয়। সত্যতা যাচাই করুন।

vii) দল $(G, *)$-এ $a \in G$ যাতে (A) $a^5 = e$,
(B) $a * b * a^{-1} = b^2$ ($b \in G$ -এর জন্য)।
$O(b)$ নির্ণয় করুন।

viii) $2x^2 + 8xy - 12xz + 2y^2 - 12yz - 15z^2$ এই দ্বিঘাত আকৃতির প্রকৃতি নির্ণয় করুন।

বিভাগ - ঘ

[পূর্ণমান : ৫০]

৪। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন : ১০ × ২ = ২০

(ক) i) দেখান যে $2x^2 + 7xy + 3y^2 = 0$ এই যুগ্ম সরলরেখার লম্ব যুগ্ম সরলরেখার সমীকরণ হল $3x^2 + 7xy + 2y^2 = 0$. ৫

ii) প্রমাণ করুন যে একটি কণিকের পরস্পর লম্ব দুটি নাভিগামী জ্যা-র দৈর্ঘ্যের অন্যোন্যকের যোগফল ধ্রুবক হবে। ৫

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(খ) i) (2, 2, 1) ও (1, –2, 3) বিন্দুগামী যে সমতল $x + y + z = 4$ সমতলের সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থান করে তার সমীকরণ কী হবে নির্ণয় করুন। ৫

ii) $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$, $\frac{x}{a\alpha} = \frac{y}{b\beta} = \frac{z}{c\gamma}$ এবং $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$, যেখানে a, b এবং c অশূন্য ধ্রুবক, এই সরলরেখাগুলি একতলীয় হওয়ার শর্ত নির্ণয় করুন। ৫

(গ) i) ত্রিভুজ ABC-তে মনে করি D, E, F যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুগুলির মধ্যবিন্দু। এখন $\vec{BC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BE}$ ও $\vec{CF}$ -এর মান $\vec{AB}$ ও $\vec{AC}$ এর রৈখিক সমবায়ে নির্ণয় করুন। ৫

ii) $1\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$, $3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ ভেক্টরগুলি রৈখিক সম্বন্ধযুক্ত হবে কি ? যুক্তিসহ প্রমাণ করুন। ৫

(ঘ) i) $2x + 3y + 1 = 0$ এবং $3x - 2y + 2 = 0$ পরস্পর লম্ব সরলরেখা দুটিকে অক্ষদ্বয় রূপে নিলে $(2x + 3y + 1)(3x - 2y + 2) = 13$ এই বক্ররেখার রূপান্তরিত সমীকরণ নির্ণয় করুন। ৫

ii) (–2, 3) বিন্দু থেকে $y^2 = 8x$ অধিবৃত্তের যুগ্ম স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করুন এবং স্পর্শকদুটির মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয় করুন।

৫

৫। যে-কোনো **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন : ৬ × ৩ = ১৮

i) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$ কণিকটি একটি অধিবৃত্ত — প্রমাণ করুন।

ii) দেখান যে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের লম্ব জ্যা-র মেরুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হয় $\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = (a^2 - b^2)^2$.

iii) প্রমাণ করুন যে (– 2, 3, 5), (1, 2, 3) ও (7, 0, – 1) ভেক্টরগুলি সমরেখ।

iv) যদি $\vec{\alpha} = \vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{\beta} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{\gamma} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ হয় তাহলে $\vec{\alpha}.(\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ এবং $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}).\vec{\gamma}$ -এর মান নির্ণয় করুন।

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

v) দেখান যে, $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ সমতলটি $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ গোলকটির স্পর্শতল এবং স্পর্শ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করুন।

vi) $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-3}{-1}$ এবং $\frac{x+3}{3} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-6}{-4}$ এই দুটি নৈকতলীয় সরলরেখার মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করুন।

৬। যে-কোনো **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ ৩ × ৪ = ১২

i) দেখান যে

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})|.\vec{d} = (\vec{a}.\vec{d})[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}].$$

ii) $3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ ভেক্টরের উপর লম্ব এবং (2, 3, –1) বিন্দুগামী সমতলের সমীকরণ নির্ণয় করুন।

iii) মূলবিন্দু শীর্ষবিন্দু এবং নিয়ামক রেখা $z = k$ সমতলে একটি বৃত্ত $x^2 + y^2 = a^2$ হলে, শঙ্কুর সমীকরণ নির্ণয় করুন।

iv) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 25 = 0$ গোলকটির সাপেক্ষে (2, 3, 4) বিন্দুটি কোথায় অবস্থান করে তা নির্ণয় করুন।

v) $2x-3y-8z-7=0=x-2y+3z$ এই সরলরেখার দিক্ নির্দেশক অনুপাত ও দিক্ নির্দেশক কোসাইন নির্ণয় করুন।

vi) $x+y+z+1=0$ এবং $2x-y+4z+2=0$ সমতলদুটির মধ্যবর্তী কোণের মান নির্ণয় করুন।

vii) $r^{1/2}=a^{1/2}\cos\frac{\theta}{2}$-কে কার্তেজীয় স্থানাঙ্কে পরিবর্তন করুন।

viii) যদি $x^2-2pxy-y^2=0$ ও $x^2-2qxy-y^2=0$ সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত যুগ্ম সরলরেখার কোন একটি যুগ্ম সরলরেখা অপর যুগ্ম সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণের সমদ্বিখণ্ডক হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে $pq+1=0$.

[পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

(English Version)

Group – A

[Full Marks : 20]

Answer any *two* questions. 10 × 2 = 20

1. a) i) Determine $(\sqrt{3}+i)^{1/6}$, where $i=\sqrt{-1}$. 5

ii) Solve $e^z=-2$, where z is a complex number. 5

b) i) Two roots of the equation $x^3-rx^2+rx-4=0$ are reciprocal to each other. Find the value of r and determine the roots of the equation. 5

ii) $A=\begin{pmatrix}0 & 2\beta & \gamma\\ \alpha & \beta & -\gamma\\ \alpha & -\beta & \gamma\end{pmatrix}$ is an orthogonal matrix. Determine α,β and γ. 5

c) i) Let *A*, *B*, *C* be three non-empty sets. Show that only $A\cap B=A\cap C$ does not imply $B=C$ but $A\cap B=A\cap C$ and $A\cup B=A\cup C$ imply $B=C$. 5

ii) A mapping $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ is defined as $f(x)=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Determine the existence of f^{-1}. 5

d) i) In a ring $(S,+,\cdot)$, prove that

A) $a.0=0.a=0$ where $a\in S$

B) $a,b\in S\Rightarrow a.(-b)=(-a).b=-(a.b)$ 5

ii) If $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^2 \\ y & y^2 & 1+y^2 \\ z & z^2 & 1+z^2 \end{vmatrix} = 0$, show that $xyz = -1$. 5

Group – B

[Full Marks : 18]

Answer any *three* questions. 6 × 3 = 18

2. i) If z is a non-zero complex number and m is a positive integer, show that $\log z^m \neq m \log z$ and $\log(z^{1/m}) = \frac{1}{m}\log z$.

ii) Solve the equation $81x^3 - 18x^2 - 36x + 8 = 0$ whose roots are in H.P.

iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{pmatrix}$ and $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Determine the values of a and b.

iv) Solve the following equations

$3x + y - z = 1$, $5x + 2y + 3z = 2$,

$8x + 3y + z = 3$

by Cramer's rule.

v) Let Z be a set of integers. If '*' is defined by $u * v$ = L.C.M. of u and v, examine whether Z is a group w.r.t. '*'.

vi) Using Cayley-Hamilton theorem, find A^{-1}, where $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 6

Group – C

[Full Marks : 12]

Answer any *four* questions. 3 × 4 = 12

3. i) If z is a complex number, show that $\tan z = \frac{\sin 2z}{1 + \cos 2z}$.

ii) Express $x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 1$ as a polynomial in $(x-1)$.

iii) If α, β, γ are three roots of the equation $x^3 + px + q = 0$ $(q \neq 0)$, find the values of

(A) $\sum \frac{1}{\alpha + \beta - \gamma}$, (B) $\sum \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}$.

iv) Remove second term of the equation $x^4 + 2x^3 + 143x^2 + 430x + 462 = 0$.

v) Let (G, *) be a group and $a \in G$. If $H = \{a^n : n \in z\}$, prove that H is a sub-group of G.

vi) Every cyclic group (G, *) is commutative but any commutative group is not cyclic. Justify.

vii) In a group $(G, *)$, $a \in G$ such that

(A) $a^5 = e$, (B) $a * b * a^{-1} = b^2 (b \in G)$,

determine $O(b)$.

viii) Find the nature of the quadratic form $2x^2 + 8xy - 12xz + 2y^2 - 12yz - 15z^2$.

Group – D

[Full Marks : 50]

4. Answer any *two* questions. $10 \times 2 = 20$

a) i) Show that the equation of the pair of straight lines perpendicular to the pair of straight lines $2x^2 + 7xy + 3y^2 = 0$ is $3x^2 + 7xy + 2y^2 = 0$. 5

ii) Show that the sum of the reciprocals of two perpendicular focal chords of a conic is constant. 5

b) i) Find the equation of the plane which passes through the points (2, 2, 1), (1, –2, 3) and is perpendicular to the plane $x + y + z = 4$. 5

ii) Find the condition to show that the lines $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$, $\frac{x}{a\alpha} = \frac{y}{b\beta} = \frac{z}{c\gamma}$ and $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$, where *a, b* and *c* are non-zero constants will lie on a plane. 5

c) i) In a triangle *ABC*, let *D, E, F* be the mid-points of the sides *BC, CA* and *AB* respectively. Now express $\vec{BC}$, $\vec{AD}$, $\vec{BE}$ and $\vec{CF}$ as the linear combination of $\vec{AB}$ and $\vec{AC}$. 5

 [পরের পৃষ্ঠায় দ্রষ্টব্য

ii) Are the vectors $1\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $2\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$ and $3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ linearly dependent ? Prove it with proper justification. 5

d) i) Find the transformed equation of the curve $(2x + 3y + 1)(3x - 2y + 2) = 13$, when the axes are taken as the perpendicular lines $2x + 3y + 1 = 0$ and $3x - 2y + 2 = 0$. 5

ii) Find the equation of the pair of tangents from the point (–2, 3) to the parabola $y^2 = 8x$ and the angle between the tangents. 5

5. Answer any *three* questions : $6 \times 3 = 18$

i) Prove that the conic
$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 12x - 6y - 39 = 0$$
is a parabola.

ii) Show that the locus of the poles of the normal chords of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is
$$\frac{a^6}{x^2} + \frac{b^6}{y^2} = (a^2 - b^2)^2.$$

iii) Prove that the vectors $(-2, 3, 5)$, $(1, 2, 3)$ and $(7, 0, -1)$ are collinear.

iv) If $\vec{\alpha} = \vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{\beta} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{\gamma} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$, then find the values of $\vec{\alpha}.(\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$ and $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}).\vec{\gamma}$.

v) Show that the plane $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ and find the point of contact.

vi) Find the shortest distance between two skew lines $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-8}{1} = \frac{z-3}{-1}$ and $\frac{x+3}{3} = \frac{y+7}{-2} = \frac{z-6}{-4}$.

6. Answer any *four* questions : $3 \times 4 = 12$

i) Show that

$|(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})|.\vec{d} = (\vec{a}.\vec{d})[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$.

ii) Find the equation of a plane passing through the point (2, 3, −1) and is perpendicular to the vector $3\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$.

iii) Find the equation of the cone whose vertex is the origin and base is the circle $x^2 + y^2 = a^2$, $z = k$.

iv) Discuss the position of the point (2, 3, 4) with respect to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 25 = 0$.

v) Determine the direction ratios and direction cosines of the straight line $2x - 3y - 8z - 7 = 0 = x - 2y + 3z$.

vi) Find the angle between the planes $x + y + z + 1 = 0$ and $2x - y + 4z + 2 = 0$.

vii) Transform $r^{1/2} = a^{1/2} \cos\frac{\theta}{2}$ to Cartesian equation.

viii) If the pair of straight lines $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ and $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ be such that each pair bisects the angles between the other pair, then prove that $pq + 1 = 0$.