স্নাতক পাঠক্রম (B.D.P.)

শিক্ষাবর্ষান্ত পরীক্ষা (Term End Examination) :

ডিসেম্বর, ২০১৫ ও জুন, ২০১৬

পদার্থবিদ্যা (Physics)

ঐচ্ছিক পাঠক্রম (Elective)

প্রথম পত্র (1st Paper : Mathematical Methods in Physics)

সময় ঃ দুই ঘন্টা | **পূর্ণমান ঃ ৫০**

Time : 2 Hours | Full Marks : 50

মানের গুরুত্ব ঃ ৭০%

Weightage of Marks : 70%

পরিমিত ও যথাযথ উত্তরের জন্য বিশেষ মূল্য দেওয়া হবে। অশুদ্ধ বানান, অপরিচ্ছন্নতা এবং অপরিষ্কার হস্তাক্ষরের ক্ষেত্রে নম্বর কেটে নেওয়া হবে। উপান্তে প্রশ্নের মূল্যমান সূচিত আছে।

Special credit will be given for accuracy and relevance in the answer. Marks will be deducted for incorrect spelling, untidy work and illegible handwriting. The weightage for each question has been indicated in the margin.

১। যে-কোনো **দুটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $10 \times 2 = 20$

ক) i) একটি বস্তুকণার স্থান ভেক্টর হল

$$\vec{r} = a\cos 2\omega t\,\hat{i} + a\sin 2\omega t\,\hat{j}$$

বস্তুকণার গতিপথটি কিরকম ? 5

ii) গোলীয় নির্দেশতন্ত্র ব্যবহার করে প্রমাণ করুন যে,

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0\,.$$ 5

খ) i) গোলীয় নির্দেশতন্ত্রে $\frac{\partial}{\partial x}$ -এর মান নির্ণয় করুন ।

ii) নীচের অবকল রাশিটি যথার্থ কিনা বিচার করুন ঃ

$$d\varphi = (x^2 - y)\,dx + x\,dy.$$

iii) $x = 0$ বিন্দুতে নীচের অবকল সমীকরণটি বিশিষ্ট (singular) কিনা দেখুন এবং যদি বিশিষ্ট হয় তবে তার বিশিষ্টতা কি ধরনের তা নির্ণয় করুন ।

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2} - 6y = 0\,.$$ 3 + 3 + (3 + 1)

গ) i) u চররাশিটি যদি কেবলমাত্র r-এর ওপর নির্ভর করে তবে দেখান যে

$$\nabla^2 u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr}\,.$$ 5

ii) নীচের অবকল সমীকরণটি চররাশির প্রতিস্থাপনীয় পদ্ধতিতে সমাধান করুন ঃ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

দেওয়া আছে

$v = 0$, যখন $y = 0$ এবং $y = 5$

$v = v_0$, যখন $x = 1$ এবং

$v(-x,\ y) = v(x,\ y)$. 5

ঘ) i) $f(x)$ অপেক্ষকটিকে Fourier শ্রেণীর সাহায্যে বিস্তৃত করুন ।

$f(x) = x^2$ যখন $-\pi \le x \le \pi$

এই বিস্তৃতির সাহায্যে দেখান যে

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$ 4 + 2

ii) একটি বস্তুকণা $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$ এবং $z = 3t - 5$ পথ বরাবর চলছে ।

$\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $t = 1$-এ বস্তুকণার গতিবেগের উপাংশ নির্ণয় করুন । 4

ঙ) i) $x^2 + y^2 = 9$ বেলন এবং $z = 0$ এবং $z = 2$ সমতলদ্বয় দ্বারা যে আবদ্ধ তল হয় তার মধ্যে দিয়ে $\vec{A} = xy^2\hat{i} + y^3\hat{j} + y^2z\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্রের ফ্লাক্স নির্ণয় করুন । 6

ii) দেখান যে $2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \ldots$

শ্রেণীটি একটি oscillating শ্রেণী । 4

চ) i) সন্তত এবং অসন্তত আবন্টনের জন্য $E(X)$-এর সংজ্ঞা দিন ।

ii) দেখান যে

$var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

iii) Maxwell's-এর গতি আবন্টন সূত্রের ক্ষেত্রে $var(x)$ নির্ণয় করুন । 2 + 4 + 4

2. যে কোন **তিনটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $6 \times 3 = 18$

ক) চররাশির প্রতিস্থাপনীয় পদ্ধতির সাহায্যে নীচের অবকল সমীকরণটির সমাধান করুন ঃ

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h^2 \frac{\partial u}{\partial t}$, $u = u(x, t)$ এবং h = ধ্রুবক।

দেওয়া আছে $x = 0$ এবং $x = L$ হলে $u = 0$ । 6

খ) প্রমাণ করুন যে

$$\vec{A} = (y + \sin z)\hat{i} + x\hat{j} + x\cos z\,\hat{k}$$

একটি সংরক্ষী ভেক্টর । এই ভেক্টরের বিভব নির্ণয় করুন। 3 + 3

গ) i) প্রমাণ করুন যে সাধারণ ঘূর্ণন ভেক্টর নয় কিন্তু অণুপরিমাণ (infinitesimal) ঘূর্ণন একটি ভেক্টর। 4

ii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$ হলে সর্বদাই কি $\vec{A} = \vec{B}$ হবে ? 2

ঘ) সমাকল গুণকের সাহায্যে নীচের অবকল সমীকরণটির সমাধান করুন :

$L\frac{dI}{dt} + RI = E_0 \sin pt$ (L, R, E_0, p ধ্রুবক) 6

ঙ) Gauss-এর উপপাদ্যের সাহায্যে অথবা অন্যভাবে প্রমাণ করুন ঃ

$$\int_v \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dv = -4\pi.$$ 6

চ) পরীক্ষাগারে কোন ছাত্র একটি কাচের ফলকের নিম্নলিখিত দৈর্ঘ্যগুলি নির্ণয় করেছে (cm এককে) :

7·0, 6·9, 7·4, 7·0, 6·9, 7·2, 7·1, 6·7, 7·0, 6·8

পরীক্ষা নিরূপণের প্রমাণ ত্রুটি নির্ণয় করুন । 6

3. যে কোন **চারটি** প্রশ্নের উত্তর দিন ঃ $3 \times 4 = 12$

ক) দেখান যে,

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$ 3

খ) $\vec{a} . (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} . (\vec{c} \times \vec{a})$ রাশিটির মান নির্ণয় করুন । 3

গ) $\vec{A}$ পোলার ভেক্টর এবং $\vec{B}$ অক্ষীয় ভেক্টর হলে $\vec{A} \times \vec{B}$ কি ধরনের ভেক্টর ? 3

ঘ) $f(x)$ একটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক যার পর্যায়কাল T । দেখান যে

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx .$$ 3

ঙ) $f(x) = \tan x$ কে কি Fourier শ্রেণীর সাহায্যে লেখা যায় ? 3

চ) যদি $\vec{\nabla} . \vec{A} = 3$ হয় তবে $\vec{A}$ -এর মান নির্দিষ্ট নয় । 3

ছ) নীচের অবকল সমীকরণটির সমাধান করুন ঃ

$$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0 .$$ 3

জ) তিনটি এক টাকার কয়েনকে একসঙ্গে টস করা হল । সবগুলিই হেড পড়ার সম্ভাব্যতা কত ? 3

(English Version)

1. Answer any *two* questions : $10 \times 2 = 20$

a) i) The position vector of a particle is given by

$$\vec{r} = a\cos 2\omega t\,\hat{i} + a\sin 2\omega t\,\hat{j}$$

What is the trajectory of the particle ? 5

ii) Using spherical polar co-ordinates show that

$$\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0.$$ 5

b) i) Calculate $\frac{\partial}{\partial x}$ in spherical polar co-ordinate system.

ii) Find whether the following $d\varphi$ is an exact differential.

$d\varphi = (x^2 - y)\,dx + x\,dy.$

iii) Check the singularity of the following equation at $x = 0$ and state the type of the singularity.

$$x^3\frac{d^2y}{dx^2} - 6y = 0.$$ 3 + 3 + (3 + 1)

c) i) If u is a function of r only then show that

$$\nabla^2 u = \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du}{dr}.$$ 5

ii) Solve the following equation by separation of variable method :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Given that

$v = 0$, when $y = 0$ and $y = 5$

$v = v_0$ when $x = 1$ and

$v(-x, y) = v(x, y).$ 5

d) i) Find the Fourier series expansion for the function $f(x)$ defined by

$f(x) = x^2$, $-\pi \le x \le \pi$ and hence show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$ 4 + 2

ii) A particle moves along a curve

$x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$ and $z = 3t - 5$. Find the velocity component at $t = 1$ in the direction $\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$. 4

e) i) Find the flux of a vector field $\vec{A} = xy^2\,\hat{i} + y^3\,\hat{j} + y^2z\,\hat{k}$ through the closed surface formed by the cyllinder $x^2 + y^2 = 9$ and planes $z = 0$ and $z = 2$. 6

ii) Show that

$$2 - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \ldots$$

is an oscillating series. 4

f) i) Define $E(X)$ both for continuous and discrete distribution.

ii) Show that

$var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

iii) Calculate $var(x)$ for Maxwell's velocity distribution. 2 + 4 + 4

2. Answer any *three* questions : $6 \times 3 = 18$

a) Solve the following differential equation using separation of variables technique :

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h^2 \frac{\partial u}{\partial t}$, where $u = u(x, t)$ and h is a constant. Given that $u = 0$ at $x = 0$ and $x = L$. 6

b) Prove that

$$\vec{A} = (y + \sin z)\,\hat{i} + x\,\hat{j} + x\cos z\,\hat{k}$$

is a conservative vector. Find the corresponding potential. 3 + 3

c) i) Prove that finite rotation cannot be represented as a vector but infinitesimal rotation can be represented as a vector. 4

ii) If $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$, does it mean that $\vec{A}$ always equal to $\vec{B}$? 2

d) Solve the following differential equation by finding a suitable integrating factor.

$L\frac{dI}{dt} + RI = E_0 \sin pt$

(L, R, E_0 & p are all constants) 6

e) Prove by Gauss' theorem or otherwise

$$\int_v \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) dv = -4\pi.$$ 6

f) In a Laboratory a student measures following lengths of a glass slab (in cm).

7·0, 6·9, 7·4, 7·0, 6·9, 7·2, 7·1, 6·7, 7·0, 6·8

Find the standard error of the measurement. 6

3. Answer any *four* questions : $3 \times 4 = 12$

a) Show that

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. 3

b) Evaluate $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$. 3

c) $\vec{A}$ is a polar vector and $\vec{B}$ is an axial vector. What is the nature of $\vec{A} \times \vec{B}$? 3

d) $f(x)$ is a periodic function with time period T. Show that

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx \; . \quad 3$$

e) Can $f(x) = \tan x$ be expanded in Fourier series ? 3

f) Show that if $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 3$ then the vector $\vec{A}$ is not unique. 3

g) Solve the following differential equation :

$x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$. 3

h) Three one rupee coins have been tossed up simultaneously. What is the probability that all the results show heads ? 3