প্রাক্‌কথন

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ের স্নাতক শ্রেণির জন্য যে পাঠক্রম প্রবর্তিত হয়েছে, তার লক্ষণীয় বৈশিষ্ট্য হ'ল প্রতিটি শিক্ষার্থীকে তাঁর পছন্দমত কোনো বিষয়ে সাম্মানিক (Honours) স্তরে শিক্ষাগ্রহণের সুযোগ করে দেওয়া। এক্ষেত্রে ব্যক্তিগতভাবে তাঁদের গ্রহণক্ষমতা আগে থেকেই অনুমান করে না নিয়ে নিয়ত মূল্যায়নের মধ্য দিয়ে সেটা স্থির করাই যুক্তিযুক্ত। সেই অনুযায়ী একাধিক বিষয়ে সাম্মানিক মানের পাঠ-উপকরণ রচিত হয়েছে ও হচ্ছে— যার মূল কাঠামো স্থিরীকৃত হয়েছে একটি সুচিন্তিত পাঠক্রমের ভিত্তিতে। কেন্দ্র ও রাজ্যের অগ্রগণ্য বিশ্ববিদ্যালয় সমূহের পাঠক্রম অনুসরণ করে তার আদর্শ উপকরণগুলির সমন্বয়ে রচিত হয়েছে এই পাঠক্রম। সেইসঙ্গে যুক্ত হয়েছে অধ্যেতব্য বিষয়ে নতুন তথ্য, মনন ও বিশ্লেষণের সমাবেশ।

দূর-সঞ্চারী শিক্ষাদানের স্বীকৃত পদ্ধতি অনুসরণ করেই এইসব পাঠ-উপকরণ লেখার কাজ চলছে। বিভিন্ন বিষয়ের অভিজ্ঞ পণ্ডিতমণ্ডলীর সাহায্য এ-কাজে অপরিহার্য এবং যাঁদের নিরলস পরিশ্রমে লেখা, সম্পাদনা তথা বিন্যাসকর্ম সুসম্পন্ন হচ্ছে তাঁরা সকলেই ধন্যবাদের পাত্র। আসলে, এঁরা সকলেই অলক্ষ্যে থেকে দূরসঞ্চারী শিক্ষাদানের কার্যক্রমে অংশ নিচ্ছেন ; যখনই কোন শিক্ষার্থীও এই পাঠ্যবস্তুনিচয়ের সাহায্য নেবেন, তখনই তিনি কার্যত একাধিক শিক্ষকমণ্ডলীর পরোক্ষ অধ্যাপনার তাবৎ সুবিধা পেয়ে যাচ্ছেন।

এইসব পাঠ-উপকরণের চর্চা ও অনুশীলনে যতটা মনোনিবেশ করবেন কোনও শিক্ষার্থী, বিষয়ের গভীরে যাওয়া তাঁর পক্ষে ততই সহজ হবে। বিষয়বস্তু যাতে নিজের চেষ্টায় অধিগত হয়, পাঠ-উপকরণের ভাষা ও উপস্থাপনা তার উপযোগী করার দিকে সর্বস্তরে নজর রাখা হয়েছে। এরপর যেখানে যতটুকু অস্পষ্টতা দেখা দেবে, বিশ্ববিদ্যালয়ের বিভিন্ন পাঠকেন্দ্রে নিযুক্ত শিক্ষা-সহায়কগণের পরামর্শে তার নিরসন অবশ্যই হ'তে পারবে। তার ওপর প্রতি পর্যায়ের শেষে প্রদত্ত অনুশীলনী ও অতিরিক্ত জ্ঞান অর্জনের জন্য গ্রন্থ-নির্দেশ শিক্ষার্থীর গ্রহণক্ষমতা ও চিন্তাশীলতা বৃদ্ধির সহায়ক হবে।

এই অভিনব আয়োজনের বেশকিছু প্রয়াসই এখনও পরীক্ষামূলক—অনেক ক্ষেত্রে একেবারে প্রথম পদক্ষেপ। স্বভাবতই ত্রুটি-বিচ্যুতি কিছু কিছু থাকতে পারে, যা অবশ্যই সংশোধন ও পরিমার্জনার অপেক্ষা রাখে। সাধারণভাবে আশা করা যায়, ব্যাপকতর ব্যবহারের মধ্য দিয়ে পাঠ-উপকরণগুলি সর্বত্র সমাদৃত হবে।

অধ্যাপক (ড.) শুভ শঙ্কর সরকার
উপাচার্য

তৃতীয় পুনর্মুদ্রণ ঃ ফেব্রুয়ারি, 2013

ভারত সরকারের দূরশিক্ষা পর্ষদের বিধি অনুযায়ী এবং অর্থানুকূল্যে মুদ্রিত।
Printed in accordance with the regulations and financial assistance of the Distance Education Council, Government of India.

পরিচিতি

বিষয় : গণিতবিদ্যা **সাম্মানিক স্তর**

পাঠক্রম : পর্যায় : EMT 08 : 1 & 2

পর্যায়

1	**রচনা**	**সম্পাদনা**
একক 1-7	ড. ইভা বসু	ড. কনক কান্তি দাশ

পর্যায়

2	**রচনা**	**সম্পাদনা**
একক 8-13	ড. সব্যসাচী চক্রবর্তী	ড. রণজিৎ ধর

নেতাজি সুভাষ মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

EMT – 08

রিমান সমাকলনবিদ্যা ও গাণিতিক বিশ্লেষণবিদ্যা-II

(স্নাতক পাঠক্রম)

পর্যায়

1

রিমান সমাকলন বিদ্যা

পর্যায়
2

গাণিতিক বিশ্লেষণবিদ্যা-II

একক 1 ❑ একচল সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের রিমান সমাকলন তত্ত্ব

গঠন

1.1 প্রস্তাবনা

আপনারা সকলেই কমবেশী একচল সমাকলনের সাথে পরিচিত আছেন। এখানে আমরা মূলত একচল সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের সমাকলনের বিভিন্ন ধর্ম নিয়ে আলোচনা করব। তার আগে বিভিন্ন সংজ্ঞা ও চিহ্নগুলোর সাথে আপনাদের পরিচিতি ঘটানো হবে।

1.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করে আপনি রিমান সমাকলন তত্ত্ব বোঝবার উপযোগী কিছু ধর্ম ও সংজ্ঞা জানতে পারবেন। এছাড়াও ঊর্ধ ও নিম্ন রিমান সমাকলের বিভিন্ন ধর্ম ও রিমান সমাকলের অস্তিত্ব-এর সংজ্ঞা জানতে পারবেন।

॥ একচল সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের রিমান সমাকলন তত্ত্ব ॥

(যেখানে $f : [a, b] \to R$) $a, b \in R, a \le b$

1.3 সংজ্ঞাসমূহ

এই প্রসঙ্গে আলোচনার শুরুতেই কয়েকটি সংজ্ঞা জানা প্রয়োজন, যথা—

1. বদ্ধ অন্তরের বিভাজন ও উপঅন্তর, (interval–অন্তরাল)

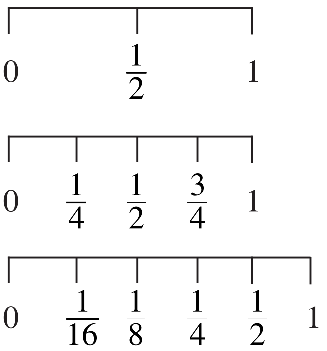
2. লঘিষ্ঠ ঊর্ধসীমা ও গরিষ্ঠ নিম্নসীমা, (L.U.B, G.L.B)

3. সূক্ষ্ম বিভাজন

4. নর্ম

1. বদ্ধ অন্তরের বিভাজন ও উপঅন্তর ($a, b \in R, a \le b$)।

মনে করি $[a, b]$ একটি বদ্ধ অন্তর। এই অন্তরে $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ বিন্দুগুলিকে (সসীম সংখ্যক এমনভাবে নেওয়া হলো যে $a = x_0, \le x_1 \le x_2 \ldots\ldots \le x_n = b$ হয়। তাহলে $[x_0, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n]$ এই সেটটিকে $[a, b]$ অন্তরের বিভাজন বলে এবং $[x_0, x_1]$; $[x_1, x_2]$; ....., $[x_{n-1}, x_n]$ এদের প্রত্যেকটিকে $[a, b]$ অন্তরের এক একটি উপঅন্তর বলে। যেমন $[x_{r-1}, x_r]$ হলো 'r' তম উপঅন্তর। স্পষ্টতই বোঝা যাচ্ছে যে একটি বদ্ধ অন্তরের একাধিক বিভাজন প্রক্রিয়া সম্ভব। বস্তুতঃ যে কোনো বদ্ধ অন্তরের অসংখ্য বিভাজন আছে। যেমন [0, 1] বদ্ধ অন্তরের কয়েকটি বিভাজন নীচে দেওয়া হলো—



$\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}; \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ এবং

$\left\{0, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$

অনুশীলনী–1

1. [0, 1] অন্তরের আরও তিনটি বিভাজন কী কী হতে পারে?

2. কোনটি ঠিক বলুন?

   (a) $[a, b]$ অন্তরের যে কোনো বিভাজনে a ও b বিন্দু দুটি অবশ্যই থাকবে।

   (b) যে কোনো বিভাজনে পরপর দুটি বিন্দুর দূরত্ব সব সময় সমান।

   (c) যে কোনো বিভাজন সেট একটি বাস্তব সংখ্যার সেট।

   (d) যে কোনো বিভাজন সেট একটি মুলদ্ সংখ্যার সেট।

   (e) পাশাপাশি যে কোন দুটি বদ্ধ উপঅন্তরে একটিমাত্র সাধারণ বিন্দু থাকবে ; অর্থাৎ $[x_{r-1}, x_r] \cap [x_r, x_{r+1}] = x_r$.

2. লঘিষ্ঠ ঊর্ধসীমা ও গরিষ্ঠ নিম্নসীমা

মনে করি $f : [a, b] \to R$ অপেক্ষকটি $[a, b]$ অন্তরে সীমাবন্ধ। তাহলে এমন দুটি বাস্তব সংখ্যা M ও m [বাস্তব সংখ্যার ঊর্ধ্বসীমা প্রকল্প] পাওয়া যাবে যাতে

$f(x) \leq M \qquad \forall\ x \in [a, b]$

কিন্তু 'x' এর অন্তর একটি মানের জন্য $f(x) > M - \in$, যেখানে $\in$ একটি স্বেচ্ছাধীন ধনাত্মক সংখ্যা আবার $f(x) \geq m$, $\forall\ x \in [a, b]$ কিন্তু 'x' এর অন্তত একটি মানের জন্য $f(x) < m + \in'$ সেখানে $\in'$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা (স্বেচ্ছাধীন)।

এই দুটি সংখ্যা 'M' এবং 'm' কে যথাক্রমে $[a, b]$ অন্তরে 'f' অপেক্ষকের লঘিষ্ঠ ঊর্ধসীমা ও গরিষ্ঠ নিম্নসীমা বলে। এখন থেকে আমরা সংক্ষেপে এদের ল.উ.সী ও গ.নি.সী বলে চিহ্নিত করব।

অতএব উপরের এই সংজ্ঞা থেকে একথা বলা যায় যে 'f' যদি একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক হয় তবে $[a, b]$ যে কোনো উপঅন্তরে 'f' এর ল.উ.সী ও গ.নি.সী থাকবে। যেমন 'r' তম উপঅন্তরে এই সীমা দুটিকে যথাক্রমে 'M_r' ও 'm_r' দ্বারা চিহ্নিত করা হয়। অর্থাৎ $m_r \leq f(x) \leq M_r$, $\forall\ x \in [x_{r-1}, x_r]$

3. সূক্ষ্ম বিভাজন

মনে করি $P : (Q = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \,......... \leq x_n = b)$, $[a, b]$ অন্তরের একটি বিভাজন। এই বিভাজনে আরও এক বা একাধিক বিন্দু $[a, b]$-র মধ্যেকার কিন্তু 'x_i' $[i = 0, ...n]$ থেকে আলাদা) ঢুকিয়ে যে বিভাজন পাওয়া যাবে তাকে 'P' এর সূক্ষ্ম বিভাজন বলে।

যেমন—$Q : (a = x_0 \leq x_1 < y_1 < x_2 \leq ...... \leq x_{n-1} < y_{n-1} < x_{n=b})$

এখানে P বিভাজনের $[x_1, x_2]$ ও $[x_{n-1}, x_n]$ উপঅন্তরে দুটি অতিরিক্ত বিন্দু যথাক্রমে y_1 ও y_{n-1} ঢোকানো হয়েছে। অতএব এটি 'P' বিভাজনের একটি সূক্ষ্ম বিভাজন। আমরা বলি P, Q -এর একটি যথার্থ উপসেট অর্থাৎ $P \subset Q$. এটা লক্ষণীয় যে—

(i) অতিরিক্ত বিন্দু দুটি 'P' এর যে কোনো উপঅন্তরে ঢোকানো যেতে পারে। (ii) 'P' যদি $[a, b]$ অন্তরের যে কোনো বিভাজন হয় তবে 'P' এর যে কোনো সূক্ষ্ম বিভাজন ঐ অন্তরের একটি বিভাজন হবে।

4. নর্ম

মনে করি, $P : (a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \,...... \leq x_n = b)$ $[a, b]$ অন্তরের একটি বিভাজন। 'P' এর বৃহত্তম উপঅন্তরকে (এর দৈর্ঘ্যকে) এর নর্ম বলে। একে $\| P \|$ চিহ্ন দিয়ে চিহ্নিত করা হয়। অর্থাৎ

$\| P \| = \max\limits_{r} (x_r - x_{r-1})$।

লক্ষ্য করুন—P' যদি 'P'-এর কোনো সূক্ষ্ম বিভাজন হয় অর্থাৎ $P \subset P'$ তাহলে $\| P' \| \leq$

$\| P \|$ আবার 'P' যদি P_1 ও P_2 এই দুই বিভাজনের একটি সাধারণ সূক্ষ্ম বিভাজন হয় অর্থাৎ $P = P_1 \cup P_2$ তাহলে, $\| P \| \leq \| P_1 \|$ এবং $\| P \| \leq \| P_2 \|$ হবে।

এবার আমরা চলে আসব মূল আলোচনায় অর্থাৎ রীমান সমাকলন প্রসঙ্গে। রীমান সমাকলন বলতে আমরা কি বুঝি? ধরা যাক 'f' একটি একচল অপেক্ষক (বাস্তব) $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরে সংজ্ঞাত ও সীমাবদ্ধ এবং $P : (a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 ...... \leq x_n = b)$ $[a, b]$ অন্তরের একটি বিভাজন। মনে করি $[x_{i-1}, x_i]$ এই বদ্ধ উপান্তরে 'f'-এর লঘিষ্ঠ ঊর্ধসীমা (ল.উ.সী) ও গরিষ্ঠ নিম্নসীমা যথাক্রমে M_i ও m_i। এখন নীচে দুটি সমষ্টি গঠন করা হলো যথা—

$$Sp = M_1 (x_1 - x_0) + M_2 (x_2 - x_1) + M_n (x_n - x_{n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \quad .... (1)$$

এবং

$$s_p = m_1 (x_1 - x_0) + m_2 (x_2 - x_1) + ... + m_n (x_n - x_{n-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad .... (2)$$

এই দুই সমষ্টিকে 'P' বিভাজনের জন্য $[a, b]$ অন্তরে 'f' এর উর্ধ সমষ্টি ও নিম্ন সমষ্টি বলা হয়।

যদি 'M' ও 'm' ঐ অন্তরে 'f' এর ল.উ.সী ও গ.নি.সী হয় তবে স্পষ্টতই

$$m (b - a) \leq s_p \leq S_p \leq M (b - a) \quad .... (3)$$

'P' এর মতো $[a, b]$ অন্তরের সকল বিভাজনের সেটটিকে যদি Δ বলি তবে (3) নং সমীকরণ থেকে বলতে পারি $\{sp : P \in \Delta\}$ এবং $\{Sp : P \in \Delta\}$ সেট দুটি সীমাবদ্ধ। এখন প্রথমোক্ত সেটের ল.উ.সী এবং দ্বিতীয় সেটের গ.নি.সী যদি যথাক্রমে 'L' ও 'U' হয় তবে 'L' কে $[a, b]$ অন্তরে 'f' এর নিম্ন রীমার সমাকল ও 'U' কে ঊর্ধ রীমান সমাকল বলা হয়। এবং আমরা লিখি

$$L = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \text{ এবং } U = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx \quad .... (4)$$

যদি $L = U = I$ হয় তবে আমরা বলি $[a, b]$ অন্তরে 'f' অপেক্ষকটি রীমাণ মতে সমাকলনযোগ্য এবং আমরা লিখি

$$I = \int_{a}^{b} f(x)dx \quad .... (5)$$

আবার (3) নং সমীকরণ থেকে বলতে পারি

$$m (b - a) \leq I \leq M (b - a) \quad .... (6)$$

অনুশীলনী–2

উক্তিগুলি ঠিক না ভুল? [সবক্ষেত্রেই 'f' একটি বাস্তব অপেক্ষক]

(i) $[a, b]$ অন্তরে সংজ্ঞাত সকল সীমাবদ্ধ অপেক্ষকই সমাকলন যোগ্য।

(ii) যে কোনো অন্তরে যে কোনো সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের ঊর্ধ বা নিম্নসমষ্টি একটি বিশেষ বিভাজনের উপর নির্ভর করে।

(iii) যে কোনো বদ্ধ অন্তরে যে কোনো সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের ঊর্ধ বা নিম্ন সমাকল কোনো বিশেষ বিভাজনের উপর নির্ভর করে না।

(iv) যে কোনো বদ্ধ অন্তরে যে কোনো সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের ঊর্ধ বা নিম্ন সমাকলের অস্তিত্ব ঐ অন্তরে ঐ অপেক্ষকের সমাকলন যোগ্যতা সুনিশ্চিত করে।

(v) সমাকলন যোগ্য যে কোনো অপেক্ষকের ক্ষেত্রে (a, b) অন্তরের যে কোনো বিভাজনের জন্য ঊর্ধ ও নিম্নসমষ্টি সমান হবে।

(vi) P ও Q যদি $[a, b]$ অন্তরের এমন দুটি বিভাজন হয় যে $P \subset Q$ তাহলে $\| P \| \leq \| Q \|$ হবে।

1.4 বিভিন্ন প্রতিজ্ঞা সমূহ

প্রতিজ্ঞা 1 ঃ বিভাজন সূক্ষ্ম হলে নিম্ন সমষ্টি ক্রমশঃ বাড়বে এবং ঊর্ধ সমষ্টি ক্রমশঃ কমবে।

'P' ও 'Q' যদি $[a, b]$ অন্তরের এমন দুটি বিভাজন হয় যাতে $P \subset Q$ তাহলে প্রমান করতে হবে যে $s_p \leq s_Q$ এবং $S_P \geq S_Q$.

প্রমাণ ঃ মনে করুন P. $(a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 ..... \leq x_n = b)$ $[a, b]$ অন্তরের একটি বিভাজন এবং এই বিভাজনে আর একটি নতুন বিন্দু $\bar{x}$ ঢুকিয়ে 'Q' পাওয়া গেল। $\bar{x}$ বিন্দুটি 'P' এর যে কোনো উপঅন্তরেই ঢোকানো যেতে পারে। যদি $x_0 < \bar{x} < x_1$ হয়, তাহলে মূল উপপাদ্যের সামগ্রিক যথার্থতা বিঘ্নিত হয় না। M_1', m_1' ও M_1'', m_1'' $[x_0, \bar{x}]$ এবং $[\bar{x}, x_1]$ অন্তরে যদি যথাক্রমে 'f' এর ল.উ.সী ও গ.নি.সী হয়, তাহলে 'Q' বিভাজনের জন্য 'f' এর ঊর্ধ সমষ্টি

$$S_Q = M_1'(\bar{x} - x_0) + M_1''(x_1 - \bar{x}) + \sum_{i=2}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq M_1(\bar{x} - x_0)M_1(x_1 - \bar{x}) + \sum_{i=2}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \quad [\because M_1' \leq M_1 \text{ এবং } M_1'' \leq M_i]$$

$$= M_1(x_1 - x_0) + \sum_{i=2}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S_P$$

$$\therefore \quad S_P \geq S_Q.$$

আবার 'Q' বিভাজনের জন্য 'f' এর নিম্ন সমষ্টি

$$s_Q = m_1'(\bar{x} - x_0) + m_1''(x_1 - \bar{x}) + \sum_{i=2}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\geq m_1(\bar{x} - x_0) + m_1(x_1 - \bar{x}) + \sum_{i=2}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \quad [\because m_1' \geq m_1 \text{ এবং } m_1'' \geq m_1]$$

$$= m_1(x_1 - x_0) + \sum_{i=2}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = s_p$$

$$\therefore \quad s_p \leq s_Q.$$

এখন যদি 'P' বিভাজনে একটির পর একটি বিন্দু ঢুকিয়ে পরপর Q_1, Q_2 .... $Q_m = Q$ বিভাজন গুলি পাওয়া যায় তাহলে আগের প্রমাণ অনুসারে

$$s_p \leq s_{Q_1} \leq s_{Q_2} \leq \ldots\ldots \leq s_{Q_m} = s_Q$$

এবং $S_p \geq S_{Q_1} \geq S_{Q_2} \geq \ldots\ldots \geq S_{Q_m} = S_Q$

অর্থাৎ আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হতে পারি সাধারণভাবে 'P' এর যে কোনো সূক্ষ্ম বিভাজন 'Q' এর জন্য $s_p \leq s_Q$ এবং $S_P \geq S_Q$।

প্রথম প্রতিজ্ঞা থেকে আপনারা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছেন যে সূক্ষ্ম বিভাজনের ফলে উর্ধ সমষ্টি ক্রমশঃ কমবে এবং নিম্ন সমষ্টি ক্রমশঃ বাড়বে। পরের দুটি প্রতিজ্ঞা থেকে এই হ্রাস বা বৃদ্ধির সীমা নির্ণয় করতে পারবেন।

প্রতিজ্ঞা–2 ঃ মনে করুন $P : (a = x_0 \leq x_1 \leq x, \ldots.. \leq x_n = b)$ $[a, b]$ অন্তরের একটি বিভাজন। Q_1 যদি P এর এমন একটি সূক্ষ্ম বিভাজন হয় যা একটি মাত্র অতিরিক্ত বিভাজক বিন্দু ঢুকিয়ে পাওয়া গেছে, তবে

$$\left.\begin{aligned} S_P - S_{Q_1} &\leq (M - m)\delta \\ s_{Q_1} - s_P &\leq (M - m)\delta \end{aligned}\right\} \text{ যেখানে } \delta = \| P \|$$

প্রমাণ ঃ সার্বিক যথার্থতা ক্ষুণ্ণ না করে আমরা একটি নতুন বিভাজক বিন্দু $\bar{x}$ কে প্রথম উপায়ন্তরেই স্থাপন করলাম। ধরি M_1' ও M_1'' হল $[\bar{x}, x_0]$ এবং $[x_1, \bar{x}]$ অন্তরে 'f' এর ল.উ.সী এবং m_1' ও m_1'' হল ঐ দুই অন্তরের 'f' এর গ.নি.সী।

$$\therefore \quad S_P - S_{Q_1} = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - M_1'(\bar{x} - x_0) - M_1''(x_1 - \bar{x}) - \sum_{i=2}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= M_1(x_1 - x_0) - M_1'(\bar{x} - x_0) - M_1''(x_1 - \bar{x})$$

$$= M_1(x_1 - \bar{x}) + M_1(\bar{x} - x_0) - M_1'(\bar{x} - x_0) - M_1''(x_1 - \bar{x})$$

$$= (M_1 - M_1')(\bar{x} - x_0) + (M_1 - M_1'')(x_1 - \bar{x})$$

$$\leq (M - m)(\bar{x} - x_0) + (M - m)(x_1 - \bar{x})[\because M_1 - M_1' \leq M - m]$$

$$= (M - m)(x_1 - x_0)$$

$$\leq (M - m)\delta \;\; (\because x_1 - x_0 \leq \delta)$$

আবার $$s_{Q_1} - s_P = m_1'(\bar{x} - x_0) + m_1''(x_1 - \bar{x}) + \sum_{i=2}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= m_1'(\bar{x} - x_0) + m_1''(x_1 - \bar{x}) - m_1(x_1 - x_0)$$

$$= (m_1' - m_1)(\bar{x} - x_0) + (M - m)(x_1 - \bar{x})$$

$$\leq (M - m)(\bar{x} - x_0) + (M - m)(x_1 - \bar{x}) \; [\because m_1' - m_1 \leq M - m]$$

$$= (M - m)(x_1 - x_0)$$

$$\leq (M - m)\delta \; [\because (x_1 - x_0) \leq \delta]$$

প্রতিজ্ঞা–3 ঃ মনে করি P : ($a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \; .... \leq x_n = b$) [$a$, b] অন্তরের একটি বিভাজন। Q_P যদি 'P' বিভাজনের এমন একটি সূক্ষ্ম বিভাজন হয় যা 'p' সংখ্যক নতুন বিভাজক বিন্দু ঢুকিয়ে পাওয়া গেছে, তাহলে—

$S_P - S_Q \leq (M - m)\delta.p$ যেখানে $\delta = \| P \|$ এবং M ও m [a, b] অন্তরে

এবং $s_{Q_p} - s_p \leq (M - m)\delta.\, p$ 'f' এর যথাক্রমে ল.উ.সী ও গ. নি. সী

প্রমাণ ঃ মনে করি 'P' বিভাজনে একটির পর একটি বিন্দু ঢুকিয়ে যথাক্রমে Q_1, Q_2....Q_n অনুক্রমটি পাওয়া গেল।

আগের প্রতিজ্ঞা অনুসারে

$$S_P - S_{Q_1} \le (M-m)\delta$$

$$S_{Q_1} - S_{Q_2} \le (M-m)\delta$$

$$S_{Q_{p-1}} - S_{Q_p} \le (M-m)\delta$$

এই 'p' সংখ্যক উপরের সম্পর্কগুলি যোগ করলে পাই

$$S_P - S_{Q_p} \le (M-m)\delta.\, p.$$

ঠিক একইভাবে প্রমাণ করা যায়

$$s_{Q_p} - s_p \le (M-m)\delta.\, p.$$

প্রতিজ্ঞা–4 ঃ কোনো অন্তরে যে কোনো বিভাজনের উর্ধসমষ্টি অন্য যে কোনো বিভাজনের নিম্নসমষ্টি থেকে বড়। অর্থাৎ 'P' ও 'Q' যদি $[a, b]$ অন্তরের যে কোনো দুটি বিভাজন হয় তবে প্রমাণ করতে হবে যে

$$S_P \ge s_Q \text{ এবং } S_Q \ge s_P.$$

প্রমাণ ঃ মনে করুন $R = PUQ$, $[a, b]$ অন্তরের একটি বিভাজন। অর্থাৎ P ও Q এর সকল বিভাজক বিন্দুর সমন্বয়ে 'R' গঠিত। অর্থাৎ $P \subset R$, $Q \subset R$ তাহলে R, P এর একটি সূক্ষ্ম বিভাজন আবার 'Q' এরও একটি সূক্ষ্ম বিভাজন। তাহলে প্রতিজ্ঞা–1 থেকে বলা যায়—

$$s_P \le s_R \le S_R \le S_Q \quad \text{আবার } s_Q \le s_R \le S_R \le S_P$$

$\therefore \quad S_P \ge s_Q$ এবং $S_Q \ge s_P$.

প্রতিজ্ঞা–5 ঃ 'U' ও 'L' যদি $[a, b]$ অন্তরে 'f' এর উর্ধ সমাকল ও নিম্ন সমাকল হয় তবে $L \le U$.

প্রমাণ ঃ মনে করুন $P[a, b]$ অন্তরের যে কোনো একটি বিভাজন। তাহলে অন্য যে কোনো বিভাজন 'Q' এর জন্য

$$s_p \le S_Q \text{ [প্রতিজ্ঞা '4' অনুসারে]}$$

কিন্তু আমরা জানি উর্ধসমষ্টি সেট (S) সীমাবদ্ধ এবং 'U' তার গ.ণি.সী।

$\therefore \quad sp \le U, \ \forall \ P$ [উভয়পক্ষে Q এর স্বাপেক্ষে গ.ণি.সী. নিয়ে এবং P কে স্থির রেখে]

যেহেতু নিম্নসমষ্টি সেট (s) সীমাবদ্ধ এবং 'L' তার ল.উ.সী

$\therefore \quad L \le U$

1.5 সমাকলন যোগ্যতার শর্ত

রিমান সমাকলনের সংজ্ঞা থেকে এই সত্যে উপনীত হওয়া যায়—সকল সংজ্ঞাপ্রাপ্ত সীমাবদ্ধ অপেক্ষকই সমাকলন যোগ্য নয়।

স্বভাবতই প্রশ্ন ওঠে—কোন শর্ত পূরণ করলে অপেক্ষক সমাকলন যোগ্য হবে। নীচের উপপাদ্যটি এমনই একটি শর্ত।

উপপাদ্য–1

মনে করি 'f' $[a, b]$ অন্তরে একটি সংজ্ঞাপ্রাপ্ত সীমাবদ্ধ অপেক্ষক। 'f' এর সমাকলন যোগ্যতায় একটি অপরিহার্য ও পর্যাপ্ত শর্ত—

যে কোন $\in > 0$ এর জন্য $[a, b]$ অন্তরে এমন একটি বিভাজন P-এর অস্তিত্ব পাওয়া যাবে যেখানে $S_P - s_P < \in$ শর্তটি সত্য।

একথা অবশ্যই মনে রাখতে হবে যে শর্তটি অপরিহার্য এবং পর্যাপ্ত। অর্থাৎ 'f' অপেক্ষকটি সমাকলনযোগ্য হলে শর্তটি সিদ্ধ হবে। আবার শর্তটি সিদ্ধ হলে f সমাকলন যোগ্য হবে। প্রমাণটি আমরা এই দুই ধাপে করব।

(a) প্রথম পর্যায় আমরা ধরে নিই শর্তটি অপরিহার্য অর্থাৎ 'f' সমাকলন যোগ্য, আমাদের প্রমাণ করতে হবে শর্তটি সিদ্ধ হচ্ছে।

যেহেতু 'f' সমাকলন যোগ্য, মনে করুন

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = 1$$

যেহেতু 1 নিম্নসমষ্টি সেটি (s) এর ল.উ.সী, যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা '$\in$' এর জন্য এমন একটি বিভাজনে 'Q' পাওয়া যাবে যে—

$$s_Q > 1 - \frac{\in}{2}$$

আবার I যেহেতু ঊর্ধসমষ্টি সেট (S) এর গ.ণি.সী এমন একটি বিভাজন 'R' পাওয়া যাবে

$$S_R < 1 + \frac{\in}{2}$$

মনে করুন 'P' বিভাজনটি 'Q' ও 'R' এর সবকটি বিভাজক বিন্দু দিয়ে তৈরী অর্থাৎ $P = QUR$

$\therefore$ 'P', 'Q' এর একটি সুক্ষ্ম বিভাজন আবার 'R' এরও একটি সূক্ষ্ম বিভাজন।

$\therefore$ 'Q' ও 'R' এর তুলনায় 'P' বিভাজনের নিম্নসমষ্টি বাড়বে এবং ঊর্ধসমষ্টি কমবে।

অর্থাৎ $s_Q \le s_P \le S_P \le S_R$

$\therefore \quad S_P - s_P \le S_R - s_Q < I + \frac{\in}{2} - I + \frac{\in}{2} = \in$

$\therefore \quad S_P - s_P < \in$

অর্থাৎ শর্তটি অপরিহার্য।

(b) শর্তটি পর্যাপ্ত ঃ

অর্থাৎ এবার আমরা ধরে নিচ্ছি শর্তটি সিদ্ধ হচ্ছে। প্রমাণ করতে হবে 'f' অপেক্ষকটি সমাকলন যোগ্য।

শর্তানুসারে যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা '$\in$' এর জন্য $[a, b]$ অন্তরে এমন একটি বিভাজন 'P' পাওয়া যাবে যাতে $S_P - s_p < \in$ হয়।

$\therefore$ 'L', 's' সেটের ল.উ.সী অতএব $s_p \le L$

আবার, 'U' যেহেতু 'S' সেটের গ.ণি.সী $S_P \ge U$.

$\therefore \quad O \le U - L \le SP - sp < \in$

যেহেতু '$\in$' যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা, $U = L$

অতএব 'f' সমাকলন যোগ্য

উদাহরণ–1

সংজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ করুন যে নিম্নপ্রদত্ত অপেক্ষকটি রিমান মতে সমাকলন যোগ্য নয়।

$f : [0, 1] \to R$

$f(x) = 0$ যখন x মূলদ।

$f(x) = 1$ যখন x অমূলদ। (Dirichlet function) ডিরিশ্‌লের অপেক্ষক

সমাধান ঃ মনে করা যাক $P : (a = x_0 < x_1 < x_2 .... < x_n = x = 1[0, 1]$ অন্তরের একটি বিভাজন। ধরি M_i ও m_i $[x_{i-1}, x_i]$ উপায়ন্তরে 'f' এর যথাক্রমে ল. উ. সী. ও গ.ণি.সী। যেহেতু প্রতি উপান্তরেই মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা আছে সুতরাং সকল 'i' এর জন্য $M_i = 1$ এবং $m_i = 0$

$$\therefore \quad S_P = \sum_{i=1}^{n} M_1(x_i - x_{i-1}) = 1.$$

$$s_P = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0.$$

যেহেতু 'P' কোনো বিশেষ বিভাজন নয় সুতরাং

$$L = \int_{\underline{0}}^{1} f(x)dx = 0 \text{ এবং}$$

$$U = \int_0^{\bar{1}} f(x)dx = 1 \text{ অর্থাৎ } L \neq U$$

$\therefore$ [0, 1] অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য নয়।

উদাহরণ–2

ধরা যাক [0, 1] অন্তরের সকল মূলদ সংখ্যার একটি বিন্যাস হল x_1, x_2, x_3......x_n.... এবং $f(x_n) = \frac{1}{n^2}$ (n = 1, 2, 3,......) ও $f(x)$ = 0 যখন x = অমূলদ। প্রমাণ করুন যে 'f' সমাকলন যোগ্য।

$\therefore$ **সমাধান ঃ** এখানে $f : [0, 1] \to R$

$f(x_i) = \frac{1}{i^2}$, যেখানে $\{x_i : i \leftarrow N\} = [10, 1] \cap Q$

= 0, অন্যথায়।

যে কোন বিভাজন P এর জন্য

$s_P = 0$ [$\therefore$ m = 0, যে কোন উপঅন্তরেই একটি অমূলদ সংখ্যা আছে]

$\therefore$ $L = 0$

ধরা যাক $\varepsilon > 0$ স্বেচ্ছাধীন এবং

$$N > S/_{\varepsilon} \quad \left[\text{যেখানে } S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right]$$

[0, 1]-র একটি বিভাজন P_N নিন যেখানে প্রত্যেক উপঅন্তরের দৈর্ঘ্য $\left(\frac{1}{N}\right)$

$$\therefore \quad S_{P_N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} M_i$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{i_j^2}$$ [$i_j = x_n$-এর সর্বনিম্ন সাবস্ক্রিপ্ট যেখানে x_n, j^{th} অন্তরে আছে]

$$< \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{S}.S = \varepsilon$$

$\therefore$ $\varepsilon > 0$ দেওয়া থাকলে, একটি বিভাজন P_N পাওয়া যাচ্ছে, যার জন্য

$$S_{P_N} - L_{P_N} = S_{P_N} - 0 = S_{P_N} < \varepsilon$$

$\therefore$ [0, 1] অন্তরে 'f' সমাকলনযোগ্য।

অনুশীলনী–3

1. (a) [a, b] বন্ধ অন্তরে সকল সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের সেট 'B' এবং ঐ অন্তরে রিমান মতে সমাকলন যোগ্য সকল অপেক্ষকের সেট 'R'। এই দুই সেটের মধ্যে কি সম্পর্ক নির্ণয় করুন।

(b) নীচে [0, 1] বন্ধ অন্তরের দুটি বিভাজন দেওয়া হলো—

$$P : \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\right\}$$

$$Q : \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

'Q' কে 'P' এর সূক্ষ্ম বিভাজন বলা যায় কি?

2. মনে করি $f : [a, b] \to R$. 'C' একটি বাস্তব সংখ্যা এবং $f(x) = C, \forall\ x \in [a, b]$। প্রমাণ করুন যে '$f$' সমাকলন যোগ্য।

3. মনে করুন $f : [0, 1] \to R$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত

$f(x) = 0$ যখন x অমূলদ

$f(x) = \dfrac{1}{q}$ যখন $x = \dfrac{p}{q}$ (Thomae-র অপেক্ষক)

যেখানে p, q ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $(p, q) = 1$

$f(0) = 0, f(1) = 1$

দেখান যে [0, 1] অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য।

4. $f(x) = x, x \in [a, b]$

দেখান যে ঐ অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য

5. $f(x) = 1$ যখন x মূলদ

$= -1$ „ x অমূলদ

প্রমাণ করুণ যে $(-1, 1)$ অন্তরে f সমাকলনযোগ্য নয় কিন্তু $|f|$ সমাকলনযোগ্য।

প্রমাণ করুন যে সূক্ষ্ম বিভাজনের ফলে নিম্নসমষ্টি বাড়ে এবং উর্ধসমষ্টি কমে। সূক্ষ্ম বিভাজনের অতিরিক্ত বিন্দুগুলির সংখ্যার সাথে এই হ্রাস বা বৃদ্ধির সম্পর্ক কি?

6. [0, 1] অন্তরটিকে প্রথমে তিনটি সমান ভাগে পরে ছয়টি সমান ভাগে ভাগ করে যে দুটি বিভাজন পাওয়া যাবে তাদের সাপেক্ষে

$f(x) = x, 0 \leq x \leq 1$

অপেক্ষকটির [0, 1] অন্তরে দুটি উর্ধসমষ্টি ও দুটি নিম্নসমষ্টি নির্ণয় করুন। লক্ষ্য করুন প্রত্যেক

ক্ষেত্রে দুটি উর্ধ সমাকল ও দুটি নিম্ন সমাকলের মধ্যে প্রত্যাশিত সম্পর্ক বজায় আছে কিনা?

7. [0, 1] অন্তরের বিভাজনটিকে যদি $\left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots\ldots, \frac{n}{n}\right)$ এইভাবে নেওয়া হয় তবে $f(x) = x^2$ অপেক্ষকটির ঊর্ধ ও নিম্ন সমাকল নির্ণয় করুন।

1.6 সারাংশ

একক-1-এ আমরা 1.3-এ ল.উ.সী, গ.ণী.সী. বিভাজন ও নর্ম-এর সংজ্ঞা পাচ্ছি।

1.4-এ পাচ্ছি এই সংক্রান্ত বিভিন্ন প্রতিজ্ঞা সমূহ। আর সবশেষে 1.5-এ সমাকলন যোগ্যতার শর্ত পাচ্ছি, যা কিনা সমাকলন (রিমান) বিদ্যার মূল ভিত্তি। এছাড়াও বিভিন্ন উদাহরণ ও অনুশীলনী আপনাদের এই একক সম্বন্ধে ধারণা আরও স্বচ্ছ করবে।

1.7 একক-1 এর সংকেত সহ উত্তরমালা

অনুশীলনী–1

1. 1.3 এর 1 এর সাহায্য নিন
2. (a) ঠিক, (b) ভুল, (c) ঠিক, (d) ভুল, (e) ঠিক।

অনুশীলনী–2

(i) ভুল, (ii) ঠিক, (iii) ঠিক, (iv) ভুল, (v) ভুল।

অনুশীলনী–3

1. (a) স্পষ্টতঃই $R \subset B$, $R \neq B$ (কেন?)
   (b) নিজে ভাবুন।
2. দেখান যে $L = U$
3. 3.4-এর 4 দেখুন।
4. যে কোন $\varepsilon > 0$-র জন্য একটি বিভাজন P_ε বার করুন যার জন্য $S_P - s_P < \varepsilon$ হয়, যেখানে $P \supseteq P_\varepsilon$.
5. 1.5-এর উদা-1 এর মত করে ভাবুন এবং লক্ষ্য করুন $|f| = 1 \ \forall\, x \in (-1, 1)$.
6. ঊর্ধ ও নিম্ন সমষ্টি নির্ণয়ের পদ্ধতি দেখুন।
7. লক্ষ করুন $f(x) = x^2$ একটি আরোহী অপেক্ষক।
   এবার প্রত্যেক উপঅন্তরে এর ল.উ.সী ও গ.ণি.সী. বার করুন।

1.8 সহায়ক গ্রন্থ

1. W. Rudin : Principles of Mathematical Analysis (3rd edition, Mcgraw Hill)

একক 2 ❑ সমাকলন বিদ্যায় দার্বোর উপপাদ্য

গঠন

2.1 প্রস্তাবনা

একক-1 এ আপনারা সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের রিমান সমাকলের বিভিন্ন ধর্ম সম্বন্ধে জ্ঞাত হয়েছেন। এখানে আপনার উর্ধ্ব/নিম্ন সমাকল নির্ণয়ের পদ্ধতি ও রিমান সমাকলের বিকল্প সংজ্ঞা সম্বন্ধে জানবেন।

2.2 উদ্দেশ্য

এই এককের উদ্দেশ্য হল দার্বোর উপপাদ্য সহযোগে উর্ধ্ব/নিম্ন সমাকল নির্ণয়। এছাড়াও রিমান সমাকলের একটি বিকল্প সংজ্ঞা ও দুই সংজ্ঞার তুলনার যথার্থতা বিচার।

2.3 দার্বোর উপপাদ্য

মনে করুন $[a, b]$ অন্তরে 'f' একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক এবং 'P' ঐ অন্তরের যে কোনো একটি বিভাজন। তাহলে—

$$\lim_{\|P\|\to 0} s_p = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \text{ এবং } \lim_{\|P\|\to 0} S_P = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$$

প্রমাণ ঃ—

মনে করুন $L = \underline{\int_a^b} f(x)dx$ এবং $U = \overline{\int_a^b} f(x)dx$

যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε নিলে, যেহেতু $\{S_P\}$ র গ.ণি.সী U এবং $\{s_P\}$ র ল.উ.সী L, $[a, b]$ এমন একটা বিভাজন

$P_1 : (a = x_0 < x_1, < x_2 \ldots\ldots < x_p = b)$ পাওয়া যাবে যে

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < s_{P_1} < S_{P_1} < U + \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

মনে করুন $K = |f(x)|$ এর ল.উ.সী এবং $\delta \frac{\varepsilon}{4kp}$। P, $[a, b]$-র একটি যে কোনো বিভাজন যেখানে $\| P \| < \delta$। এখন P এবং P_1 উভয় বিভাজনের বিভাজক বিন্দুগুলি দিয়ে $[a, b]$-র যে বিভাজনটি তৈরী হলো সেটি মনে করুন P_2 তাহলে প্রতিজ্ঞা (3) থেকে পাই—

$$\left.\begin{aligned} & s_{P_2} < s_P + 2kp\delta = s_P + \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{এবং } & S_{P_2} > S_P - 2kp\delta = S_P - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}$$

আবার যেহেতু P_2, P_1 এর একটি সূক্ষ্ম বিভাজন

$$s_{P_1} \le s_{p_2} \le S_{P_2} \le S_{P_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(3)}$$

(1), (2) ও (3) সমীকরণ সহযোগে পাই

$$L - \varepsilon < s_{P_1} - \frac{\varepsilon}{2} \le s_{P_2} - \frac{\varepsilon}{2} < s_P < L < L + \varepsilon$$

$$U - \varepsilon < U \le S_P \le S_{P_2} + \frac{\varepsilon}{2} \le S_{P_1} + \frac{\varepsilon}{2} < U + \varepsilon$$

$\therefore \quad |L - s_P| < \varepsilon$ এবং $|U - S_P| < \varepsilon$ যখন $\|P\| < \delta$

সুতরাং $\lim\limits_{\|P\| \to 0} s_P = L$ এবং $\lim\limits_{\|P\| \to 0} S_P = U$

টীকা–1

মনে করুন $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য।

তাহলে $L = U = \int_a^b f(x)dx$

$$\therefore \quad \lim_{\|P\|\to 0} s_P = \lim_{\|P\|\to 0} S_P = \int_a^b f(x)dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

টীকা–2

মনে করুন $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য এবং 'k' যে কোনো বাস্তব সংখ্যা তাহলে $[a, b]$ অন্তরে 'kf' সমাকলন যোগ্য এবং

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

(**প্রমাণ** ঃ একক-4 এর উপপাদ্য-5 দেখুন)

এতক্ষণ যে সমাকল নিয়ে আলোচনা করা হল সেখানে সমাকলকে কোনো বদ্ধ অন্তরে কোনো অপেক্ষকের নিম্নসমষ্টির ল.উ.সী অথবা ঊর্ধ্বসমষ্টির গ.ণি.সী হিসাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে। রিমান সমাকলের অন্য সংজ্ঞাটি আপনারা এর আগেই অধ্যয়ন করেছেন।

2.4 রিমান সমাকলের বিকল্প সংজ্ঞা

মনে করুন $f : [a, b] \to R$ একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক। $[a, b]$ অন্তরের যে কোনো বিভাজন $P : (a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \ldots\ldots \le x_n = b)$ নিলাম। মনে করা যাক $[x_{i-1}, x_i]$ উপান্তরে ξ_i $(i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ একটি যে কোনো বিন্দু। এবার একটি সমষ্টি গঠন করুন যথা—

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

এবার যদি $[a, b]$ অন্তরে 'f' এর ল.উ.সী ও গ.ণি.সী যথাক্রমে 'M' ও 'm' হয় তবে—

$$m(b - a) \le \sigma p \le M\ (b - a)$$

অতএব আমরা বলতে পারি $[a, b]$ এর সমস্ত বিভাজনের জন্য σp সেটটি সীমাবদ্ধ। এখন $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots\ldots \xi n$ বিন্দুগুলি যেভাবেই নির্বাচন করা হোক না কেন $\| P \| \to 0$ করলে σp যদি কোনো নির্দিষ্ট সীমাস্থ মানে পৌঁছয় তবে বলা হয় $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য এবং ঐ সীমাস্থমানই 'f' র সমাকল। নির্দিষ্ট সীমাস্থমানকে 'I' অক্ষর দ্বারা সূচিত করলে, আমরা বলতে পারি—

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

স্বভাবতই প্রশ্ন ওঠে ওই দুই ধরনের সংজ্ঞার ফলে একই অন্তরে একই অপেক্ষকের দুটি ভিন্ন সমাকল পাওয়া যাবে কিনা? অবশ্যই তা নয়। এই দুই ধরনের সংজ্ঞার তুলনা করলে দেখা যাবে যে দুটি সংজ্ঞাই শেষ পর্য্যন্ত একটি সমাকলে উপনীত হয়।

দুই সংজ্ঞার তুলনা

মনে করুন $[a, b]$ অন্তরে 'f' অপেক্ষক প্রথম সংজ্ঞা অনুসারে সমাকলন যোগ্য। তাহলে

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = I \text{ ধরুন}$$

যদি $P : (a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le ..... \le x_n = b)$, $[a, b]$ অন্তরের যে কোনো বিভাজন ও $[x_{i-1}, x_i]$ উপান্তরে 'f' এর ল.উ.সী ও গ.ণি.সী যথাক্রমে M_i ও m_i হয় এবং যদি $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ তাহলে নীচের সমষ্টিগুলি তৈরী করা যাবে।

$$s_P = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),\ S_P = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

এবং $\sigma p = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$

যেহেতু $m_i \le f(\xi_i) \le M_i, i = 1, 2, 3.....n$

অতএব $s_p \le \sigma p \le S_p$

আবার $s_P \le I \le S_P$

$$\therefore \quad |I - \sigma p| \le S_P - s_P \qquad \text{........................ (6)}$$

যেহেতু দার্বোর উপপাদ্য অনুসারে 'f' সমাকলন যোগ্য হলে

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_P = \lim_{\|P\|\to 0} s_P$$

অতএব উভয়পক্ষে $\| P \| \to 0$ করে পাই

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sigma p = I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{........................ (7)}$$

অর্থাৎ বিকল্প সংজ্ঞা অনুসারে 'f' সমাকলন যোগ্য।

এবার ধরে নিই বিকল্প সংজ্ঞা অনুসারে 'f' সমাকলন যোগ্য তাহলে, যদি

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sigma p = \int_a^b f(x)dx = I \text{ ধরি।}$$

যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε এর জন্য এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যাবে যাতে

$$I - \frac{1}{4}\varepsilon < \sigma p < I + \frac{1}{4}\varepsilon \text{ যখন } \| P \| < \delta \qquad \text{............ (8)}$$

M_i ও m_i যদি $[x_{i-1}, x_i]$ উপান্তরে f-র ল.উ.সী ও গ.ণি.সী হয় তাহলে এই উপান্তেরে ξ_i ও n_i দুটি বিন্দু অবশ্যই পাওয়া যাবে যার জন্য

$$f(\xi_1) < m_i + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \text{ এবং}$$

$$f(n_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

$$\therefore \ \sigma p' = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4} < s_p + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{..............................} \ (9)$$

আবার, $$\sigma p = \sum_{i=1}^{n} f(n_i)(x_i - x_{i-1}) > \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{4} > S_P - \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{.........} \ (10)$$

যেহেতু $\| P \| < \delta$ অতএব $\sigma p'$ এবং $\sigma p''$ উভয়সমষ্টিই (8) নং সমীকরণটি মেনে চলবে। অর্থাৎ

$$\left.\begin{aligned} & I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma p' < 1 + \frac{\varepsilon}{4} \\ \text{এবং} \quad & I - \frac{\varepsilon}{4} < \sigma p'' < I + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}\right\} \quad \text{..............................} \ (11)$$

সমীকরণ (9) ও (11) সহযোগে পাই

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma p' - \frac{\varepsilon}{4} < s_p \quad \text{..............................} \ (12)$$

এবং সমীকরণ (10) ও (11) সহযোগে পাই

$$I + \frac{\varepsilon}{2} < \sigma p'' + \frac{\varepsilon}{4} > S_P \quad \text{..............................} \ (13)$$

সমীকরণ (12) ও (13) একত্রিত করে বলা যায়

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < s_P \le L \le U \le S_P \le 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

যেহেতু ε এর মান যেমন খুশি নেওয়া যেতে পারে

অতএব $L = U = I$

অর্থাৎ $[a, b]$ অন্তরে 'f' প্রথম সংজ্ঞা অনুসারে সমাকলন যোগ্য এবং উভয় ক্ষেত্রেই সমাকলনের মান সমান।

উদাহরণ–1

$f(x) = x^2,\ x\in\ [a,\ b]$ অপেক্ষকের জন্য ঊর্ধ্ব ও নিম্ন সমাকল নির্ণয় করুন এবং প্রমাণ করুন যে $[a,\ b]$ অন্তরে 'f' অপেক্ষকটি সমাকলন যোগ্য।

সমাধান ঃ মনে করুন $[a,\ b]$ অন্তরের একটি বিভাজন

$$P_n: \{a, a+h, a+2h, \ldots, a+nh = b\}$$

যেখানে $h = \dfrac{b-a}{n}$ তাহলে P_{n} বিভাজনের সমস্ত উপান্তরগুলি দৈর্ঘ্যের এবং $\|P_n\| = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ যখন $n \to \infty$

M_{r} ও m_{r} যদি যথাক্রমে 'r' তম উপান্তরে 'f' র ল.উ.সী ও গ.ণি.সী হয়, তাহলে

$$M_r = (a+rh)^2, m_r = \left(a+\overline{r-1}\,h\right)^2$$

$$\therefore \quad S_{P_n} = h\left[(a+h)^2 + (a+2h)^2 + \ldots . (a+nh)^2\right]$$

$$= h\left[na^2 + 2ah(1+2+3+\ldots .+n) + h^2(1^2+2^2+\ldots .+n^2)\right]$$

$$= h\left[na^2 + 2ah\frac{n(n+1)}{2} + h^2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= nha^2 + a.nh(nh+h) + \frac{nh(nh+h)(2nh+h)}{6}$$

$$\therefore \quad \lim_{\|P_n\|\to 0} S_{P_n} = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=b-a}}\left[nha^2 + a.nh(nh+h) + \frac{1}{6}nh(nh+h)(2nh+h)\right]$$

$$= a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{1}{6}(b-a)^3.2$$

$$= (b-a)\left[a^2 \_\, a(b-a) + \frac{1}{3}(b-a)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}(b-a)\left[b^2+a^2+ab\right] = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

অনুরূপভাবে

$$S_{P_n} = h\left[a^2 + (a+h)^2 + (a+2h)^2 + \left(a+\overline{n-1}\,h\right)^2\right]$$

$$= h\left[na^2 + 2ah\left(1+2+\ldots .+\overline{n-1}\right) + h^2\left(1^2+2^2+\ldots .+\overline{n-1}\right)^2\right]$$

$$= nha^2 + \frac{2a}{2}.nh(nh-h) + \frac{1}{6}(nh-h)nh(2nh-h)$$

$$\therefore \quad \lim_{\substack{n\to 0 \\ h\to 0 \\ nh=b-a}} S_{P_n} = a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3$$

$$= (b-a)\left[a^2 + a(b-a) + \frac{1}{3}(b-a)^2\right]$$

$$= (b-a)\left[\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{3}a.b + \frac{1}{3}b^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}(b-a)(b^2 + ab + b^2)$$

$$= \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$\therefore \quad U = \int_a^{\bar{b}} x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

এবং $L = \int_{\underline{a}}^{b} x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

যেহেতু $L = U$ প্রদত্ত অপেক্ষকটি সমাকলন যোগ্য

এবং $\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$

উদাহরণ–2

মনে করুন $f : [a, b] \to R$ রূপে সংজ্ঞায়িত হয়েছে।

$f(x) = e^x, x \in [a,b]\int_a^{\bar{b}} f(x)dx$ এবং $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$ এই দুই সমাকলনের মান নির্ণয় করুন এবং প্রতিপন্ন করুন $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য।

সমাধান ঃ $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরের ধরুন একটি বিভাজন

$P : [a, a + h, a + 2h \ldots\ldots a + nh = b]$ যেখানে প্রত্যেকটি উপান্তর 'h' দৈর্ঘ্যের এবং $nh = b - a.$

তাহলে $M_r = r$ তম উপঅন্তরে e^x এর ল.উ.সী

$= e^{a + rh}$

এবং $m_r =$ 'r' তম উপঅন্তরে e^x এর গ.নি.সী

$$= e^{a+\overline{r-1}h}$$

$$\therefore \quad Sp = h\left[e^{a+h} + e^{a+2h} + \ldots\ldots\ldots + e^{a+nh}\right]$$

$$= he^{a+h}\left[1 + e^{h} + e^{2h} + \ldots\ldots + e^{\overline{n-1}h}\right]$$

$$= he^{a+h}\,\frac{e^{nh.}-1}{e^{n}-1}$$

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_P = \lim_{h\to 0} \frac{he^{h}}{e^{h}-1}.e^{a}\left(e^{b-a}-1\right)$$

$$= e^{\mathrm{b}} - e^{\mathrm{a}}.$$

অনুরূপভাবে

$$s_P = h\left[e^{a} + e^{a+h} + e^{a+2h} + \ldots\ldots + e^{a+\overline{n-1}h}\right]$$

$$= he^{a}\left[1 + e^{h} + e^{2h} + \ldots\ldots + e^{\overline{n-1}h}\right]$$

$$= he^{a}\,\frac{e^{nh}-1}{e^{h}-1}$$

$$\therefore \quad \lim_{\|P\|\to 0} s_p = \lim_{h\to 0} \frac{h}{e^{h}-1}.e^{a}\left(e^{b-a}-1\right)$$

$$= e^{\mathrm{b}} - e^{\mathrm{a}}$$

$$\therefore \quad \int_{\underline{a}}^{b} e^{x}dx = \lim_{\|p\|\to 0} s_p = e^{b-a}$$

এবং $\displaystyle\int_{a}^{\overline{b}} e^{x}dx = \lim_{\|p\|\to 0} S_p = e^{b-a}$

যেহেতু এই দুই সমাকলের মান সমান, অতএব $[a, b]$ অন্তরে অপেক্ষকটি সমাকলনযোগ্য এবং

$$\int_{a}^{b} e^{x}dx = e^{b} - e^{a}$$

উদাহরণ–3

$f : [0, 1] \to R$ নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত হলে—

$f(x) = x, \; x \in [0, 1] \cap Q$

$\quad = 0$ অন্যথায়

$\underline{\int_0^1} f(x)dx$ এবং $\overline{\int_0^1} f(x)dx$ এর মান নির্ণয় করুন এবং [0, 1] অন্তরে $f(x)$ সমাকলনযোগ্য কিনা বলুন।

সমাধান ঃ স্পষ্টতই [0, 1] বদ্ধ অন্তরে 'f' সীমাবদ্ধ

ধরা যাক $P = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots\ldots \frac{n}{n}\right\}$ ঐ অন্তরের একটি বিভাজন।

তাহলে M_r = 'r' তম উপঅন্তরে 'f' এর ল.উ.সী

$$= \frac{r}{n}$$

এবং m_r = 'r' তম উপঅন্তরে 'f' এর গ.নি.সী

= 0 ($\because$ প্রত্যেক উপঅন্তরেই মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যা বর্তমান)

$$\therefore \quad S_P = \sum_{r=1}^{n} M_r\left(\frac{r}{n} - \frac{r-1}{n}\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \frac{r}{n}.\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{n^2}.\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\alpha} S_P = \frac{1}{2} \text{ অর্থাৎ } \overline{\int_0^1} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

আবার, $s_P = \sum_{r=1}^{n} m_r.\frac{1}{n} = 0$

$$\therefore \quad \underline{\int_0^1} f(x)dx = 0$$

যেহেতু ঊর্ধ ও নিম্ন সমাকল পরস্পর সমান নয় অতএব [0, 1] বদ্ধ অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য নয়।

উদাহরণ–4

'f' এর সংজ্ঞা নিম্নরূপ হলে

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x, \text{ যখন } x \text{ মূলদ সংখ্যা} \\ &= x^2, \text{ যখন } x \text{ অমূলদ সংখ্যা} \end{aligned}\right\} \quad x \in [0, 1]$$

$\int\limits_{\underline{0}1} f(x)dx$ ও $\int\limits_{0}^{\bar{1}} f(x)dx$ নির্ণয় করুন এবং দেখান যে [0, 1] অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য নয়।

সমাধান ঃ 'f' সীমাবদ্ধ এবং [0, 1] এর যে কোন বিন্দু 'x' এর জন্য $x \geq x^2$

মনে করুন [0, 1] এর একটি বিভাজন হল

$$P : \left[0. \frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots . \frac{r}{n}, \ldots . \frac{n}{n} = 1\right]$$

তাহলে $M_r = \left[\frac{r-1}{n}, \frac{r}{n}\right]$ উপঅন্তরে f এর ল.উ.সী

$$= \frac{r}{n}$$

এবং $m_r = \left[\frac{r-1}{n} . \frac{r}{n}\right]$ উপঅন্তরে f এর গ.নি.সী

$$= \left(\frac{r-1}{n}\right)^2 \qquad \left[\text{যদিও} \left(\frac{r-1}{n}\right)^2 \neq f\left(\frac{r-1}{n}\right), \text{কেন}\right]$$

$$\therefore \quad S_P = \sum_{r-1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \int_0^t f(x)dx = \lim_{n \to \infty} S_P = \frac{1}{2}$$

অনুরূপভাবে

$$s_P = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{r-1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots . + (n-1)^2\right]$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \int_{\underline{0}}^{1} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} s_P = \frac{1}{6} . 2 = \frac{1}{3}$$

যেহেতু $\overline{\int_0^1} f(x)dx \neq \underline{\int_0^1} f(x)dx$

অতএব [0, 1] অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য নয়।

অনুশীলনী—2.5

1. [0, 1] অন্তরে 'f' নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত

   $f(x) = 1$ যখন x মূলদ

   $= -1$ যখন x অমূলদ

   দেখান যে $|f|$ অপেক্ষকটি ঐ অন্তরে সমাকলন যোগ্য

   কিন্তু 'f' সমাকলন যোগ্য নয়।

2. $f(x) = x$, x যদি মূলদ হয়

   $= 1 - x$, x যদি অমূলদ হয়

   দেখান যে [0, 1] অন্তরে f সমাকলন যোগ্য নয়।

3. সমাকলের সাহায্যে নীচের রাশিগুলির সীমান্ত মান নির্ণয় করুন।

   a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right]$

   b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+3n}\right]$

   c. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[e^{2/n}+e^{4/n}+\ldots e^{2n/n}\right]$

   d. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{3^2}{n^2}\right)+\ldots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right\}^{1/n}$

   e. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+4n^2}\right]$

4. রিমান সমাকলের বিকল্প সংজ্ঞা ব্যবহার করে দেখান যে $\int_0^x x^2dx = \frac{1}{3}$

অনুশীলনী 3-এর 7 নম্বর অঙ্কটির সাথে এটি তুলনা করে দেখুন এদের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কিনা?

5. দার্বোর উপপাদ্য ব্যবহার করে নীচের অপেক্ষকগুলির উল্লিখিত অন্তরে সমাকলন যোগ্য কিনা বিচার করুন এবং হলে সেই সমাকলগুলির মান নির্ণয় করুন।

a. $f(x) = ex, \quad a \le x \le b$

b. $\left.\begin{array}{ll} f(x) = x, & \text{যদি } x \text{ মূলদ হয়} \\ \quad\;\; = 0 & \text{যদি } x \text{ অমূলদ হয়} \end{array}\right\} \quad 0 \le x \le 1$

c. $\left.\begin{array}{ll} f(x) = x, & \text{যদি } x \text{ মূলদ হয়} \\ \quad\;\; = x^2, & \text{যদি } x \text{ অমূলদ হয়} \end{array}\right\} \quad 0 \le x \le 1$

d. কোনো বদ্ধ অন্তরে কোনো সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের সমাকলের সংজ্ঞা কতরকম ভাবে দেওয়া যেতে পারে? এদের মধ্যে তুলনা করুন।

2.6 সারাংশ

একক-2 এর 1.3 এ আমরা দার্বোর উপপাদ্য প্রমাণ করেছি।

2.4 এ রিমান সমাকলের বিকল্প সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। এছাড়াও অনুশীলনী ও উদাহরণ সমূহ আপনাদের ধারণাকে স্বচ্ছতর করবে।

2.7 সংকেতসহ একক-2 এর উত্তরমালা

অনুশীলনী-2.5

1. আগের অধ্যায়ে অনুশীলনী-3 এর '5' দেখুন।
2. একক-2 এর উদাহরণ-4 এর মত করে ভাবুন।
3. (a), (b), (c), (d), (e) কে $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{K}{n}\right)$ আকারে লিখে $n \to \infty$ করে চেষ্টা করুন।
4. $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots\ldots, \frac{n}{n}\right\}$-এই বিভাজ এটি নিয়ে $n \to \infty$ করে ভাবুন।
5. (a), (b), (c)-এর জন্য 'P' একটি সুসমঞ্জস বিভাজন নিয়ে $\| P \| \to 0$ করে চেষ্টা করুন। লক্ষ্য রাখুন $L = U$ হয় কিনা।

   (d) ইতিমধ্যেই দু-রকমের সংজ্ঞা দেওয়া হয়েছে। একক-2 থেকে ও সহায়ক গ্রন্থ থেকে আর কি কি হতে পারে নিজে খুঁজে বার করুন।

2.8 সহায়ক গ্রন্থ

1. T. M. Apostol : Mathematical analysis (2nd edition, Narosa)

একক 3 ❑ রিমান সমাকলের বিভিন্ন ধর্ম

গঠন

3.1 প্রস্তাবনা

একক-3 এ আপনারা সন্তত অপেক্ষকের সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের রিমান সমাকলন সম্বন্ধে জ্ঞাত হবেন। এছাড়াও লেবেগের একটি উপপাদ্য আপনারা এতে পাবেন, যা কিনা সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের রিমান সমাকলন সম্পর্কে শেষ কথা।

3.2 উদ্দেশ্য

3.3 এ আপনারা সন্তত, আরোহী প্রভৃতি অপেক্ষকের সমাকলন সম্বন্ধে জানবেন। লেবেগের গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য-3, এই বিভাগের সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ ব্যাপার। এছাড়া নতুন ধারণা **পরি**মাপ (*M*easure) সম্বন্ধে জানবেন। বিভিন্ন উদাহরণসমূহ আপনাদের এই এককের ধারণাকে আরও সংহত করবে।

3.3 সমাকলন যোগ্য অপেক্ষকসমূহ

উপপাদ্য-1 ঃ যদি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরে অপেক্ষক 'f' অবিচ্ছিন্ন হয় তাহলে f, $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $[a, b]$ অন্তরে 'f' অবিচ্ছিন্ন সুতরাং ঐ অন্তরে 'f' সমবিচ্ছিন্ন। যে কোনো ধনসংখ্যা 'ε' নিলে এমন একটি ধনসংখ্যা 'δ' পাওয়া যাবে যাতে

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \forall x', x'' \varepsilon [a, b]$$

যখন $|x' - x''| < \delta$

মনে করলাম $P : (a = x_0 < x) < .... < x_n = b)$, $[a, b]$ অন্তরের এমন একটি বিভাজন যার জন্য $\| P \| < \delta$।

ধরা যাক $[x_{i-1}, x_i]$ উপান্তরে 'f' এর ল.উ.সী এবং গ.নি.সী যথাক্রমে M_i ও m_i সুতরাং

$$\text{তাহলে } S_P - s_P = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})$$

$$= \varepsilon$$

$\therefore$ $[a, b]$, অন্তরে 'f' সমাকলনযোগ্য।

উপপাদ্য-2

যদি $[a, b]$ বন্ধ অন্তরে 'f' ক্রমমান হয় তবে ঐ অন্তরে 'f' সমাকলনযোগ্য।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $[a, b]$ অন্তরে 'f' ক্রমবর্ধমান। যে কোনো ধনসংখ্যা ε নিলাম এবং মনে করি $P : (a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ..... \leq x_n = b)$, $[a, b]$ অন্তরের এমন একটি বিভাজন যার জন্য $\| P \| < \varepsilon/[f(\text{b}) - f(\text{a}) + 1]$ সিদ্ধ হয়।

ধরুন $[x_{i-1}, x_i]$ উপান্তরে 'f' এর ল.উ.সী ও গ.নি.সী যথাক্রমে M_i ও m_i যেহেতু 'f' ক্রমবর্ধমান $M_i = f(x_i)$ ও $m_i = f(x_{i-1})$

$$\text{অতএব } S_P - s_P = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \|P\| \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

$$\leq \frac{f(b) - f(a)}{f(b) - f(a) + 1} . \varepsilon < \varepsilon$$

সুতরাং $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকলনযোগ্য। এবার $[a, b]$ অন্তরে 'f' ক্রমহ্রাসমান ধরে নিয়ে ঠিক আগের মত করে প্রমাণ করুন যে 'f' ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য।

শূন্য পরিমাপের সেট ঃ

কোন সেট 'E' যদি এমন হয় যে কোনো ধনসংখ্যা ε এর জন্য এমন একটি গমনযোগ্য উন্মুক্ত অন্তরের পরিবার I_n পাওয়া যাবে যাতে

$E < U_n I_n$ এবং $\sum_n |I_n| < \varepsilon$ হয়

তাহলে 'E' সেটটিকে একটি শূন্য পরিমাপের সেট বলে।

প্রায় সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন ঃ

$[a, b]$ অন্তরে সংজ্ঞাত কোনো অপেক্ষকের বিচ্ছিন্নতার বিন্দু সমূহের সেটটি যদি শূন্য পরিমাপের হয় তবে ঐ অন্তরে অপেক্ষকটিকে 'প্রায় সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন' বলে।

উপপাদ্য-3 ঃ [লেবেগ, 1900]

$[a, b]$ অন্তরে অপেক্ষক 'f' যদি সীমাবদ্ধ এবং প্রায় সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন হয় তাহলে ঐ অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য হবে।

প্রমাণ ঃ যদি $[a, b]$ অন্তরে 'f' এর সকল বিচ্ছিন্নতা বিন্দুর সেটটিকে 'E' ধরি, তাহলে 'E' সেটের পরিমাপ শূন্য। M ও m মনে করুন ঐ অন্তরে 'f' এর যথাক্রমে ল.উ.সী ও গ.নি.সী। ধরুন ε একটি যে কোনো ধনসংখ্যা এবং $\eta = \dfrac{\varepsilon}{M - m + b - a}$

এখন 'E' সেটের যে সব বিন্দুতে [প্রমাণের জন্য Apostol (পৃষ্ঠা-171 দেখুন)] 'f' এর দোলন 'η' এর চেয়ে ছোট নয় তাদের সেটটি মনে করুন F. তাহলে 'F' একটি বদ্ধ সেট। যেহেতু $F \subset E$, F এর পরিমাপ শূন্য। কাজেই একই গমনযোগ্য উমুক্ত অন্তর পরিবার $[I_n : n = 1, 2, 3 ....]$ পাবেন যার জন্য

(i) $F \subset U_n I_n$ এবং

(ii) $\sum_n |I_n| < \eta$ সিদ্ধ হয়।

আবার যেহেতু F একটি বদ্ধ ও সীমাবদ্ধ সেট, হাইনে বোরেলের উপপাদ্য অনুসারে এমন একটি পূর্ণসংখ্যা 'N' পাওয়া যাবে যার জন্য

$F \subset I_1 U I_2 U \;....\; U I_N.$

ধরা যাক $I, I_2 \;.....\; I_N$ অন্তরগুলি পরপর বিচ্ছিন্ন এবং এদের বিভাজক বিন্দুগুলি উর্ধক্রমে আছে।

মনে করুন $I_i = (a_i', a_i'')$

তাহলে $a_1' < a_1'' < a_2' < a_2'' < \cdots\cdots < a_N''$

এবং $\sum_{i=1}^{n} (a_i'' - a_i') < \eta$

উপপাদ্যে প্রদত্ত শর্ত অনুসারে $\left[a_i'', a_{i+1}'\right]$ অন্তরগুলি এবং $(UI_n)^C$-এর প্রতিবিন্দুতে 'f' এর দোলন 'η' এর চেয়ে ছোট। কাজেই এই অন্তরের এমন একটি বিভাজন $P^i : (a_i'' = x_0^i < x_1^i$

$< \cdots\cdots < x_n^i = a'_{i+1})$ পাব যে $\left[x_{r-1}^i, x_r^i\right]$ এরূপ প্রত্যেক উপান্তরে 'f' এর দোলন 'η' এর চেয়ে ছোট। এখন x_r^i বিন্দুগুলি দিয়ে তৈরী $[a, b]$ র বিভাজনটিকে যদি 'p' ধরি। তাহলে,

$$S_P - s_P = \sum_{i=1}^{N}(M_i - m_i)(a''_i - a'_i)$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{n}(M_r^i - m_r^i)(x_r^i - x_{r-1}^i)$$

$$< (M-m)\sum_{i=1}^{N}(a''_i - a'_i) + \eta\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{n}\left(x_r^i, x_{r-1}^i\right)$$

$$< (M - m)\ \eta + (b - a)\ \eta$$

$$= (M - m + b - a)\ \eta < \varepsilon$$

$\therefore$ $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকলনযোগ্য।

যদি $a, b \in E$ তবে এমনদুটি বাস্তবসংখ্যা α, β ধরা যাক যে $\alpha < a$ এবং $b < \beta$ হয়। মনে করি $[\alpha, a]$ এবং $[b, \beta]$ অন্তরে $f(x)$ নিম্নরূপে সংজ্ঞায়িত হল।

$$f(x) = f(\mathrm{a})\quad \alpha \le x < a$$

$$= f(\mathrm{b})\quad b < x \le \beta$$

$\therefore$ 'E' সেটই $[\alpha, \beta]$ অন্তরে 'f' এর বিচ্ছিন্নতা বিন্দু সমূহের সেট এবং $E \subset [\alpha, \beta]$। কাজেই উপরের প্রমাণ অনুসারে বলতে পারি $[\alpha, \beta]$ অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য। সুতরাং $[a, b]$ অন্তরেও 'f' সমাকলনযোগ্য। একই রকমভাবে যদি $a \in E, b \notin E$ তাহলে $[a, b]$ অন্তর এবং যদি $a \notin E$ এবং $b \in E$ তাহলে $[a, \beta]$ অন্তর গণ্য করে প্রমাণ করা যায় যে $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য।

উপপাদ্য-4

যদি $[a, b]$ অন্তরে 'f' একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক হয় যার সসীম সংখ্যক বিচ্ছিন্নতা বিন্দু আছে তাহলে ঐ অন্তরে 'f' সমাকলনযোগ্য হবে।

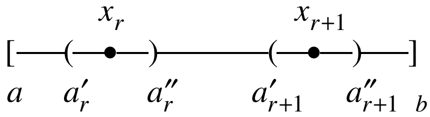
প্রমাণ ঃ যেহেতু 'f' একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক, এমন একটি ধনসংখ্যা 'K' থাকবে যাতে $|f(x)| \le K$ হয়। মনে করুন 'f' এর বিচ্ছিন্নতা বিন্দু সমূহের সেটটি হল

$E : \{x_1, x_2 \ldots\ldots x_n\}$ এবং

$$a \le a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_n \le b$$

এখন কতকগুলি বাস্তবসংখ্যা $a'_1, a''_1, a'_2, a''_2 \ldots a'_N, a''_N$ কল্পনা করুন যেন $x_r \in (a'_r, a''_r)$ এবং

যে কোনো ধনসংখ্যা ε এর জন্য $\sum_{i=1}^{N}(a_r'' - a_r') < \frac{\varepsilon}{4k}$ হয়।



মনে করুন M_r, m_r হচ্ছে যথাক্রমে (a_r', a_r'') অন্তরে 'f' এর ল.উ.সী ও গ.নি.সী।

$\therefore\ M_r - m_r < 2k,\ r = 1,\ 2\ ......\ N.\quad (\because\ \ |f(x)| \le k)$

আরও লক্ষ্য করুন $a < a_1$ এবং $a_N < b$ হলে $(a, a_1'), (a_1'', a_2') \cdots (a_N'', b)$ এই $N + 1$ সংখ্যক উন্মুক্ত অন্তরে 'f' অবিচ্ছিন্ন। কাজেই এই অন্তরগুলির জন্য যথাক্রমে $P_1, P_2 \ldots. P_{N+1}$ বিভাজন পাওয়া যাবে যাতে

$$S_{P_k} - s_{P_k} < \frac{\varepsilon}{2(N+1)},\ k = 1, 2, \ldots.\ N+1$$

স্পষ্টতই $P = P_1UP_2U\ ......\ UP_{N+1}$, $[a, b]$ অন্তরের একটি বিভাজন।

$$\text{এখন}\ \ S_P - s_p = \sum_{k=1}^{N+1}\left(S_{P_k} - s_{P_k}\right) + \sum_{r=1}^{N}(M_r - m_r)(a_r'' \ldots a_r')$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(N+1)}(N+1) + 2k.\frac{\in}{4k} = \in$$

সুতরাং $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য।

টীকা ঃ যদি $a = a_1$ অথবা $a_N = b$ অথবা দুই-ই হয় তবে 'f' এর বিচ্ছিন্নতার বিন্দুসমূহকে ঘিরে যে অন্তরগুলি গণ্য করতে হবে, সেগুলি হল $(a_1, a_1''), (a_2, a_2'') \ldots.. (a_N', a_N'')$

অথবা, $(a_1', a_1''), (a_2', a_2'') \ldots.. (a_N', a_N)$

অথবা, $(a_1, a_1''), (a_2', a_2'') \ldots.. (a_N', a_N)$।

তারপর একই রকম যুক্তি প্রয়োগ করে প্রমাণ করা যাবে যে, 'f' সমাকলন যোগ্য।

উপপাদ্য-5

$[a, b]$ অন্তরে 'f' যদি একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক হয় যার বিচ্ছিন্নতার বিন্দুসমূহের সেটের সসীম সংখ্যক পরিণাম বিন্দু আছে তাহলে $f[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হবে।

প্রমাণ ঃ যেহেতু 'f' একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক, এখন একটি ধনাত্মক সংখ্যা 'k' পাওয়া যাবে যাতে $|\ f(x)\ | < k,\ \forall x \in\ [a, b]$

ধরুন f-এর বিচ্ছিন্নতার বিন্দুগুলির সেটটি হল 'E' যার 'm' সংখ্যক পরিণাম বিন্দু হল $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ এবং $E' = \{x_1,\ x_2\ \ldots.\ x_m\}$

যে কোনো ধনসংখ্যা ε এবং $2m$ সংখ্যক বাস্তব সংখ্যা

$$a_1' < a_1'' < a_2' < a_2'' \ldots\ldots < a_m' < a_m''$$

কল্পনা করুন যেন $x_r \in (a_r', a_r'')$ এবং $\sum_{r=1}^{m} (a_r'' - a_r') < \frac{\varepsilon}{4k}$ হয়।

ধরা যাক M_r ও m_r হল $(a_r' - a_\pi')$ অন্তরে 'f' এর ল.উ.সী ও গ.নি.সী।

তাহলে $M_r - m_r < 2k,\ r = 1, 2, \ldots m, \quad \because \quad |f(x)| < k$

এছাড়া বাকি '$m + 1$' সংখ্যক যথা

$(a, a_1'), (a_1'', a_2') \ldots\ldots (a_{m-1}'', a_m'), (a_m'', b)$

(যদি $a < x_1$ এবং $b > x_m$ হয়) উপঅন্তরে 'f' হয়

অবিচ্ছিন্ন অথবা কয়েকটি সসীম সংখ্যক বিচ্ছিন্নতা বিন্দু আছে কাজেই প্রত্যেকটি উপঅন্তরে 'f' সমাকলনযোগ্য (উপপাদ্য অনুসারে)। সুতরাং প্রতিটি উপঅন্তরের জন্য যথাক্রমে P_1, P_2 .... P_{m+1} বিভাজন পাওয়া যাবে যাতে

$S_{P_r} - s_{P_r} < \frac{\varepsilon}{2(m+1)},\ r = 1, 2 \ldots (m + 1)$

পরিষ্কার বোঝা যাচ্ছে যে P_1, P_2 ..... P_{m+1} উপঅন্তরগুলি পরস্পর বিচ্ছিন্ন।

সুতরাং $P = P_1 \cup P_2 \ldots\ldots \cup P_{m+1}$, $[a, b]$ অন্তরের একটি বিভাজন এবং

$$S_P - s_p = (S_{P_1} - s_{P_1}) + \ldots\ldots (S_{P_{m+1}} - s_{P_{m+1}})$$

$$+ \sum_{r=1}^{m} (M_r - m_r)(a_r'', a_r')$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(m+1)} \cdot (m+1) + 2k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon$$

$\therefore$ 'f' $[a, b]$ অন্তরে সমাকলন যোগ্য।

টীকা ঃ উপপাদ্য 4 ও উপপাদ্য 5 কে উপপাদ্য 3-এর এক একটি বিশেষ প্রকার হিসেবেও গণ্য করা যায়। কারণ কোনো অপেক্ষকের যদি সসীম সংখ্যক বিচ্ছিন্নতা বিন্দু থাকে তবে সেই অপেক্ষক প্রায় সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন হবে আবার কোনো অপেক্ষকের যদি বিচ্ছিন্নতা বিন্দু সমূহের সসীম সংখ্যক পরিণাম বিন্দু থাকে তবে সেগুলিও প্রায় সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন হবে।

3.4 উদাহরণমালা

1. [–1, 1] অন্তরে $f(x)$ এর সংজ্ঞা হল

$$f(x) = x\sin\frac{1}{x},\ x \neq 0$$
$$= 0 \qquad x = 0$$

$f(x)$, [–1, 1] অবিচ্ছিন্ন, কাজেই সমাকলন যোগ্য।

2. [0, 1] অন্তরে $f(x)$ কে এইভাবে সংজ্ঞা দেওয়া হল

$$f(x) = 0,\ x = 0$$
$$= 1,\ \frac{1}{2} < x \leq 1$$
$$= \frac{1}{2},\ \ \frac{1}{2^2} < x \leq \frac{1}{2}$$

=================

$$= \frac{1}{2^{n-1}},\ \frac{1}{2^n} < x \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

তাহলে $f(x)$-ক্রমবর্ধমান, সুতরাং সমাকলনযোগ্য।

3. [0, 1] অন্তরে 'f' এর সংজ্ঞা হল

$$f(x) = (-1)^{r-1},\ \frac{1}{r+1} < x \leq \frac{1}{r},\ r = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$
$$= 0, \qquad x = 0.$$

এখন $f(x)$ এর বিচ্ছিন্নতার বিন্দুগুলি হল $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots$ যাদের একটি মাত্র পরিণাম বিন্দু হল 0,

$\therefore$ $f(x)$ ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য।

4. [0, 1] অন্তরে 'f' এর সংজ্ঞা

$f(x) = 0$, যদি x অমূলদ হয়

$= \frac{1}{q}$ যদি x মূলদসংখ্যা $\frac{p}{q}$ হয়।

এবং $f(0) = 0$

আমরা প্রমাণ করব যে f [0, 1] অন্তরে সমাকলনযোগ্য।

প্রমাণ ঃ যে কোন একটি ধনসংখ্যা ε কল্পনা করুন এবং এমন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা N নির্ধারণ করুন যাতে

$N \le \frac{1}{\varepsilon} < N+1$ ['N' এভাবে নির্বাচন করা সম্ভব হল আর্কিমিডিয়ান নীতির জন্য]

এবার [0, 1] অন্তরের মূলদ সংখ্যাগুলিকে নীচের পদ্ধতিতে সাজিয়ে নিন—

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \ldots$

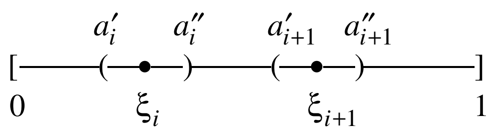
$\frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots\ldots \frac{N-1}{N}, \ldots\ldots.$

ধরুন 'E' হল $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \ldots\ldots \frac{1}{N} \ldots\ldots, \frac{N-1}{N}$

এই সসীম সংখ্যক মূলদ সংখ্যাগুলির সেট। এখন 'E' কে এমন ভাবে সাজিয়ে নিন যাতে তাদের মানগুলি ক্রমশঃ বাড়তে থাকে এবং নতুন করে তাদের নামকরণ করা হলো $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_n$ এই 'n' হলো 'E' সেটের মোট সদস্য সংখ্যা। এবার $\xi_1, \xi_2, \ldots.. \xi_n$ বিন্দুগুলিকে যথাক্রমে $[a_1'. a_1''][a_2'. a_2''] \cdots\cdots [a_n'. a_n'']$ বদ্ধ অন্তরে আবদ্ধ করুন যাতে $O = a_1' < \xi_1 < a_1'' < a_2' < \xi_2 < a_2'' \ldots\ldots < a_n' < \xi_n = a_n'' = 1$ এবং $\sum_{i=1}^{n}(a_i'' - a_i') < \varepsilon$ শর্ত দুটি সিদ্ধ হয়।

এখন যদি $x \in [a_i'', a_{i+1}']$ তাহলে x মূলদ সংখ্যা হলে তার হর '$N + 1$' থেকে বড় বা সমান আর অমূলদ হলে $f(x) = 0$ (a_i'', a_{i+1}') অন্তরের সর্বত্রই $f(x) \le \frac{1}{N+1} < \varepsilon$

এবারে $[O_1]$ অন্তরের



$P : (0 = a_1' < a_1'' < a_2' < a_2'' \cdots\cdots a_n' < a_n'' = 1)$

বিভাজনটি বিবেচনা করুন। মনে করুন $[a_i', a_i'']$ অন্তরে $f(x)$ এর ল.উ.সী ও গ.নি.সী হল M_i, m_i এবং $[a_i'', a_{i+1}']$ অন্তরে ঐ সীমাগুলি যথাক্রমে M_i', m_i' তাহলে

$$S_P - s_P = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(a_i'' - a_i') + \sum_{0}^{n-1}(M_i' - m_i)(a_{i+1}' - a_i'')$$

$$< 1\sum_{i=1}^{n}(a_i'' - a_i') + \varepsilon\sum_{0}^{n-1}(a_{i+1}' - a_i'')$$

$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ [$\because$ $[a_i', a_{i+1}'']$ অন্তরগুলিতে $f(x)$ এর দোলন কখনই

1-এর চেয়ে বেশি নয়।]

$\therefore$ [0, 1] অন্তরে $f(x)$ সমাকলনযোগ্য।

5. মনে করুন $[a, b]$ অন্তরে ϕ ও ψ দুটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক। এবং $\phi(x) \leq \psi(x)\ \forall x \in [a, b]$। ঐ অন্তরে যদি একটি অপেক্ষক 'f' কে এভাবে সংজ্ঞা দেওয়া যায় যে

$f(x) = \phi(x)$ যখন x মূলদ

$= \psi(x)$ „ x অমূলদ

তাহলে দেখান যে

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b \psi(x)dx$$

এবং $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b \phi(x)dx$

এবার বলুন $f(x)$ $[a, b]$ অন্তরে সমাকলন যোগ্য কিনা?

সমাধান ঃ

ধরা যাক $P(a = x_0 < x_1 < x_2 < ..... < x_n = b)$ $[a, b]$ অন্তরের যে কোনো একটি বিভাজন। M_r, m_r মনে করুন $[x_{r-1}, x_r]$ অন্তরে যথাক্রমে ψ-এর ল.উ.সী ও ϕ-এর গ.ণি.সী। তাহলে M_r ও m_r যথাক্রমে 'f' এর ল.উ.সী. ও গ.ণি.সী।

$$\therefore\ S_P(f) = \sum_{r=1}^{n} M_r(x_r - x_{r-1})$$

$$= S_P(\psi)$$

এবং $s_P(f) = \sum_{r=1}^{n} m_r(x_r - x_{r-1}) = s_P(\phi)$

যেহেতু ϕ ও ψ অবিচ্ছিন্ন $[a, b]$ অন্তরে এরা সমাকলনযোগ্য সুতরাং দারবোর উপপাদ্য অনুসারে

$$\int_a^b \psi(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} S_P(\psi) = \lim_{\|P\|\to 0} S_P(f) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

আবার, $$\int_a^b \phi(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0} s_P(\phi) = \lim_{\|P\|\to 0} s_P(f) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

প্রকার (Case)-I

$\phi(x) < \psi(x)$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \neq \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

$\therefore$ $f(x)$, $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য নয়।

Case-II

$\phi(x) = \psi(x)$

কিন্তু যদি $\phi(x) = \psi(x)$ হয় $\forall x \in [a, b]$

তাহলে সমস্যাটি দাঁড়ায় $[a, b]$ অন্তরে $f(x)$ একটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক কাজেই অবশ্যই সমাকলনযোগ্য।

অনুশীলনী-3.5

1. দেখান যে কোনো সসীম সেট শূন্য পরিমাপের।
2. প্রমাণ করুন যে R-এর যে কোনো গননযোগ্য উপসেট শূন্য পরিমাপের।
3. $f(x)$ কে $[0, 1]$ অন্তরে যদি এইভাবে সংজ্ঞা দেওয়া যায়।

$$f(x) = \frac{n}{n+2} \text{ যখন } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$
$$= 1. \qquad ,, \qquad x = 0$$

তাহলে দেখান যে $[0, 1]$ অন্তরে f সমকলনযোগ্য এবং $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$

4. $[0, 1]$ অন্তরে $f(x)$-এর সংজ্ঞা হল

$$f(x) = \frac{1}{n} \text{ যখন } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$
$$= 0 \text{ যখন } x = 0$$

দেখান যে, $[0, 1]$ অন্তরে f সমাকলনযোগ্য এবং $\int_0^1 f(x)\,dx$-এর মান নির্ণয় করুন।

5. মনে করুন $a > 1$ যে কোনো ধনসংখ্যা $[0, 1]$ অন্তরে $f(x)$-এর সংজ্ঞা হল

$$f(x) = \frac{1}{a^{n-1}} \text{ যখন } \frac{1}{a^n} < x \leq \frac{1}{a^{n-1}}, n = 1, 2 \text{ ....}$$

$= 0$ যখন $x = 0$

দেখান যে [0, 1] অন্তরে f সমাকলনযোগ্য এবং $\int_a^1 f(x)dx = \frac{a}{a+1}$

6. [1, 3] অন্তরে $f(x)$ কে এভাবে সংজ্ঞা দেওয়া হল।

$$f(x) = 1 \qquad 1 \le x \le 2$$
$$= 2 \qquad 2 \le x \le 3$$

(i) [1, 3] অন্তরে $f(x)$ সমাকলনযোগ্য কিনা কারণসমেত উত্তর দিন।

(ii) যদি সমাকলনযোগ্য হয় তবে তার মান নির্ণয় করুন।

(iii) $\int_a^1 f(x)dx = (b-a)f(\xi),\ \xi \in [a, b]$

এই সম্পর্কটি এক্ষেত্রে খাটছে কি? সপক্ষে বা বিপক্ষে কারণ দেখান।

3.6 সারাংশ

একক 3-এর 3.3-এ বিভিন্ন ধর্মের অপেক্ষকের সমাকলন তত্ত্বের উপর জোর দেওয়া হয়েছে। আছে লেবেগের উপপাদ্য ও তার বিন্দু গুরুত্বপূর্ণ সিদ্ধান্তসমূহ।

3.4 ও 3.5-এ আছে যথাক্রমে উদাহরণমালা ও অনুশীলনী।

3.7 সংকেতসহ উত্তরমালা

অনুশীলনী-3.5

(1) যদি 'n' সংখ্যক পদ সেটটিতে থাকে তাহলে প্রত্যেক পদকে নিয়ে ε/n দৈর্ঘ্যের অন্তর নিন।

[$\varepsilon > 0$ স্বেচ্ছাধীন] তাহলে সেটটির পরিমাপ $\le n.\varepsilon/n = \varepsilon$.

(2) একইভাবে (1) এর মত কিন্তু।

$\varepsilon_i = \varepsilon/2^i$ [$i = 1, 2, \ldots$] [$\varepsilon > 0$ দেওয়া আছে] নিন।

(3) প্রথমে $f(x)$ এর বিচ্ছিন্নতার সেট্‌টি লক্ষ্যকরুন।

এবার উর্ধ বা নিম্ন যে কোন একটি সমাকল নির্ণয় করুন।

(4) (3) এর মত।

(5) (3), (4) এর মত, শুধু বিভাজনটি এখানে $P = \left\{\frac{1}{a^n}, n = 0, 1, \ldots..\right\}$

$a > 1$, 'P' বিভাজনটি সংজ্ঞাত।

(লক্ষ্য করুন, এটিএকটি অবরোহী অপেক্ষক।

(6) (i) লক্ষ্য করুন একটি মাত্র বিচ্ছিন্নবিন্দু $x = 2$ তে আছে।

(ii) $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$ করে ভেঙ্গে নিয়ে করুন।

উঃ -3

(iii) নিজে চেষ্টা করুন।

3.8 সহায়ক গ্রন্থ

(1) T. M. Apostol : Mathematical analysis (2nd edition, Narosa)

(2) S. K. Berberian : A first course in Real analysis (1994, Springer)

একক 4 ❑ রিমান সমাকলনযোগ্য অপেক্ষকসমূহ

গঠন

4.1 প্রস্তাবনা

আগের অধ্যায়ে আপনারা রিমান সমাকলের বিভিন্ন ধর্ম সম্বন্ধে জ্ঞাত হয়েছেন। এই অধ্যায়েআপনারা আরও কিছু ধর্ম সম্বন্ধে জানবেন। এছাড়াও জানবেন বিভিন্ন অসমতা ও ফুরিয়ার শ্রেণীর একটি বিশেষ উপপাদ্য যা রিমান-লেবেগ উপপাদ্য নামে সমধিক পরিচিত।

4.2 উদ্দেশ্য

এই এককপাঠ করে আপনি সমাকলন বিদ্যার মূল উপপাদ্য, কিছু অসমতা (সমাকলন সংক্রান্ত) জানতে পারবেন। এছাড়া রীমান-লেবেগের উপপাদ্য-এর প্রমাণ দেওয়া হবে।

4.3 রীমান সমাকলের বিভিন্ন ধর্ম

উপপাদ্য-1 ঃ মনে করি $f : [a, b] \to R$ এবং $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ যদি $[a, b]$ অন্তরে f সমাকলন যোগ্য হয়. তবে $[\alpha, \beta]$ অন্তরেও 'f' সমাকলন যোগ্য।

প্রমাণ ঃ যে কোনো ধনসংখ্যা ε নিই। যেহেতু $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকলন যোগ্য, ঐ অন্তরের এমন একটি বিভাজন P_1 পাওয়া যাবে যার জন্য

$$S_{P_1} - s_{P_1} < \varepsilon \text{ .... } (1)$$

মনে করি, P_2 : [P_1 বিভাজনের সকল বিন্দু, α, β]

তাহলে প্রতিজ্ঞা (1) থেকে পাই

$$s_{P_1} \le s_{P_2} \le S_{P_2} \le S_{P_1} \text{ .... } (2)$$

$$\therefore\ S_{P_2} - s_{P_2} \le s_{P_1} - s_{P_1} < \in \text{ .... } (3)$$

(সমীকরণ 1 থেকে)

যদি $P = P_2 \cap [\alpha, \beta]$ হয় অর্থাৎ P হল $[\alpha, \beta]$ অন্তরের বিভাজন এবং P_2 হল $[a, b]$ অন্তরের বিভাজন। ধরা যাক S'_P, s'_P হল $[\alpha, \beta]$ অন্তরে 'f' এর ঊর্ধ ও নিম্ন সমষ্টি, তাহলে

$S'_P - s'_P \le S_{P_2} - s_{P_2} < \varepsilon$ [সমীকরণ (3) থেকে]

$\therefore$ f, $[\alpha, \beta]$ অন্তরের সমাকলন যোগ্য।

সংজ্ঞা ঃ রীমান মতে কোনো সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের জন্য $\int_a^b f(x)dx$ এর সংজ্ঞা আমরা পেয়েছি এবং সেখানে ধরে নেওয়া হয়েছে $a < b$, এখন একই অপেক্ষক 'f' এর জন্য

$\int_b^a f(x)dx$ এর সংজ্ঞা হল

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)\,dx \text{ .... } (4)$$

উপপাদ্য-2

মনে করি $[a, b]$ অন্তরে 'f' একটি সমাকলন যোগ্য অপেক্ষক এবং $a < c < b$. তাহলে $[a, c]$ ও $[c, b]$ এই দুই বদ্ধ উপান্তরেও 'f' সমাকলনযোগ্য হবে এবং

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $[a, c] \subset [a, b]$ আবার $[c, b] \subset [a, b]$ উপপাদ্য (1) থেকে বলতে পারি $[a, c]$ ও $[c, b]$ উভয় উপান্তরেই 'f' সমাকলনযোগ্য।

পরের অংশ প্রমাণ করার জন্য ধরি

$$I = \int_a^b f(x)dx,\ I' = \int_a^c f(x)\,dx, I'' = \int_c^b f(x)\,dx$$

যে কোনো ধনসংখ্যা ε নিই। তাহলে $[a, b]$ অন্তরের এমন একটি বিভাজন 'P' পাব যার জন্য

$$\mathrm{I} - \varepsilon < s_P \leq S_P < \mathrm{I} + \varepsilon \text{ ....} \quad (5)$$

এখন মনে করি P_1 : {P এর সব বিভাজক বিন্দু, c}

$P_1' : P_1 \cap [a, c]$, $P_1'' : P_1 \cap [c, b]$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{তাহলে} & s_P \leq s_{P_1} = s_{P_1'} + s_{P_1''} \leq I' + I'' \\ \text{এবং} & S_P \geq S_{P_1} = S_{P_1'} + S_{P_1''} \geq I' + I'' \end{array}\right\} \text{.........} \quad (6)$$

$$\therefore \quad s_P \leq \mathrm{I}' + \mathrm{I}'' \leq S_P \text{ ....} \quad (7)$$

সমীকরণ (5) ও (7) থেকে পাই

$$I - \varepsilon < I' + I'' < I + \varepsilon \text{..........} (8)$$

যেহেতু 'ε' এর মান যেমন ইচ্ছে নেওয়া যায়

অতএব $\mathrm{I} = \mathrm{I}' + \mathrm{I}''$ .... (9)

অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$

উপপাদ্য-3

মনে করলাম $f : [a, b] \to R$ একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক এবং $a < c < b$ যদি $[a, c]$ ও $[c, b]$ উপঅন্তরে 'f' সমাকলনযোগ্য হয় তবে $[a, b]$ অন্তরেও 'f' সমাকলনযোগ্য হবে।

প্রমাণ ঃ যে কোনো ধনসংখ্যা 'ε' নিই। যেহেতু $[a, c]$ ও $[c, b]$ উপঅন্তরে 'f' সমাকলনযোগ্য কাজেই $[a, c]$-র এমন একটি বিভাজন P_1 এবং $[c, b]$-র এমন একটি বিভাজন P_2 পাওয়া যাবে যার জন্য

$$S_{P_1} - s_{P_1} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ এবং } S_{P_2} - s_{P_2} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ হয়।}$$

ধরা যাক $P : P_1 \cup P_2$ তাহলে $P[a, b]$ 'র একটি বিভাজন। যদি S_P ও s_p যথাক্রমে $[a, b]$ অন্তরে 'f' এর ল.উ.সী ও গ.নি.সী হয় তাহলে

$$\begin{aligned} S_{P_2} - s_P &= (S_{P_1} + S_{P_2}) - (s_{P_1} + s_{P_2}) \\ &= (S_{P_1} - s_{P_1}) + (S_{P_2} - S_{P_2}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\therefore$ $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকলনযোগ্য।

উপপাদ্য-4

মনে করি

$f : [a, b] \to R$ এবং $g : [a, b] \to R$ দুটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক। যদি $[a, b]$ অন্তরে f ও g উভয়ই সমাকলনযোগ্য হয় তাহলে $f + g$ অপেক্ষকটিও ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হবে এবং

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

প্রমাণ : ধরি $\phi(x) = f(x) + g(x) + \forall x \in [a, b]$

$$I' = \int_a^b f(x)dx \text{ এবং } I'' = \int_a^b g(x)dx$$

$[a, b]$ অন্তরের যে কোনো বিভাজন ধরি

$P : (a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b)$

$[x_{r-1}, x_r]$ উপান্তরে f, g ও ϕ এর ল.উ.সী ও গ.নি.সী যথাক্রমে M'_r, m'_r, M''_r, m''_r এবং M_r ; m_r

$$\text{যেহেতু } \left.\begin{aligned}\phi(x) &= f(x) + g(x)\\ &\le M'_r + M''_r\end{aligned}\right\} \forall x \in [x_{r-1}, x_r]$$

এবং $\phi(x) \ge m'_r + m''_r, \forall x \in \left[x_{r-1}, x_r\right]$

অতএব $M_r \le M'_r + M''_r$ এবং $m_r \ge m'_r + m''_r$

$\therefore\ m'_r + m''_r \le m_r \le M_r \le M'_r + M''_r$

এখন $s_P(\phi) = \sum_{r=1}^{n} m_r(x_r - x_{r-1})$

$$\ge \sum_{r=1}^{n} (m'_r + m''_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$= \sum_{r=1}^{n} m'_r(x_r - x_{r-1}) + \sum_{r=1}^{n} m''_r(x_r - x_{r-1})$$

$= s_P\,(f) + s_P\,(g)$

$\therefore\ s_P\,(\phi) \le s_P\,(f) + s_P\,(g)$

অনুরূপভাবে পাই

$S_P\,(\phi) \le S_P\,(f) + S_P\,(g)$

যদি $[a, b]$ অন্তরে ϕ এর নিম্ন ও ঊর্ধ সমাকল যথাক্রমে L ও U হয় তবে দার্বোর উপপাদ্য অনুসারে $L = \lim\limits_{\|P\|\to 0} Sp(\phi) \le \lim\limits_{\|HP\|\to O} [s_P(f) + s_P(g)]$

$$= I' + I'' \quad (\therefore f \text{ ও } g \text{ সমাকলনযোগ্য}) \qquad \ldots \qquad (10)$$

আবার $U = \lim\limits_{\|P\|\to 0} S_p(\phi) \le \lim\limits_{\|P\|\to 0} S_p(f) + \lim\limits_{\|P\|\to 0} S_p(g)$

$$= I' + I' \qquad \ldots \qquad (11)$$

সমীকরণ (10) ও (11) সহযোগে পাই

$$I' + I'' \le L \le U \le I' + I'' \qquad \ldots \qquad (12)$$

$\therefore L = U = I' + I''$ সুতরাং $[a, b]$ অন্তরে ϕ সমাকলনযোগ্য

এবং $\int_a^b \phi(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

টীকা

উপরের উপপাদ্য থেকে সহজেই বোঝা যায় যে কয়েকটি সসীম সংখ্যক অপেক্ষক f_1, f_2 ..... f_n প্রত্যেকেই যদি $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হয়, তাহলে তাদের সমষ্টি অপেক্ষকটিও ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হবে এবং

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \ldots. + f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx$$

[গাণিতিক আরোহী (Mathematical induction) পদ্ধতির সাহায্যে যে কোন $n \in N$ এর জন্য উপরের টীকাটি সত্য]

উপপাদ্য-5

যদি $f : [a, b] \to R[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হয় এবং $k \in R$ একটি ধ্রুবক সংখ্যা, তাহলে $[a, b]$ অন্তরে kf অপেক্ষকটিও সমাকলনযোগ্য হবে এবং

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

প্রমাণ ঃ $K = 0$ র জন্য ইহা সত্য এবং প্রমাণ করার কিছু নেই, $K \ne 0$-র জন্য প্রমাণটি দুটি পর্যায়ে করা হল।

পর্যায়-I

$K < 0$

ধরা যাক $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b\}$ একটি $[a, b]$ অন্তরের বিভাজন।

যেহেতু $K < 0$,

$\therefore\ inf\{kf(x) : x\in[x_{n1}, x_r]\} = K\ sup\{f(x) : x\in[x_{r-1}, x_r]\}\ r = 1, 2, ..., n$

উভয়পক্ষে $(x_r - x_{r-1})$ দিয়ে গুণ করে এবং $r = 1, 2, ..., n$ এর জন্য যোগ করে পাই

$$s_P(kf) = Ks_P(f) \quad [P = [a, b] \text{ এর সকল বিভাজনের সংকলন }]$$

যেহেতু $K < 0$,

$L(kf) = sup\ (s_P(kf) : p\in P([a, b]))\} = k\ inf\ \{S_p(f) : p\in P\} = KU(f)$ .... (i)

একইভাবে $S_p(kf) = Ks_p(f)$

এবং $U(kf) = inf\{S_p(kf) : p\in P\} = k\ sup\{s_p(f) : p\in P\} = KL(f)$ .... (ii)

যেহেতু 'f' সমাকলনযোগ্য $U(f) = L(f)$, তাই (i) ও (ii) থেকে বলা যায় $L(kf) = KU(f) = KL(f) = U(kf)$

$\therefore\ kf$ সমাকলনযোগ্য এবং $\int_a^b kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$

পর্যায়-II

$K > 0$, একইভাবে কিন্তু পর্যায়-I এর চেয়ে সহজতর

অনুসিদ্ধান্ত ঃ 'f' ও 'g' দুটি অপেক্ষক যদি $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হয় তবে '$f - g$' অপেক্ষকটিও ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হবে এবং

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

প্রতিজ্ঞা-1

মনে করি $f : [a, b] \to R$ একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক। M ও m যদি যথাক্রমে ঐ অন্তরে f এর ল.ঊ.সী ও গ.ণি.সী হয় তাহলে $\{|f(\alpha) - f(\beta)| : \alpha\in[a, b], \beta\in[a, b]\}$ সেটটির ল.ঊ.সী. হবে $M - m$.

প্রমাণ ঃ ধরা যাক

$H = \{|f(\alpha) - f(\beta)| : \alpha\in [a, b], \beta\in[a, b]\}$ যেহেতু $\{f(a) - f(a)| = 0\in H$ অতএব 'H' কোনো শূন্য সেট নয়।

আবার $m \leq f(\alpha) \leq M$ এবং $m \leq f(\beta) \leq M, \forall\alpha, \beta\in [a, b]$

$\therefore\ m - M \leq f(\alpha) - f(\beta) \leq M - m$

অথবা, $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq M - m$

এ থেকে বোঝা যায় যে H একটি সীমাবদ্ধ সেট। এবং $M - m$ এই সেটের একটি ঊর্ধসীমা। আমরা দেখাব যে $M - m$ ঐ সেটের ল.ঊ.সী।

যে কোনো ধনসংখ্যা ε নিই।

যেহেতু 'M' হল $f(x)$, $x \in [a, b]$ এর ল.ঊ.সী

অতএব এমন একটি বিন্দু $x_0 \in [a, b]$ পাব যার জন্য

$$M - \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) < M$$

অনুরূপভাবে

$$M < f(y_0) < m + \frac{\varepsilon}{2}, \; y_0 \in [a, b]$$

$\therefore M - m - \varepsilon < f(x_0) - f(y_0) < M - m, \; x_0, y_0 \in [a, b]$

$\therefore M - m =$ ল.ঊ.সী $\{|f(\alpha) - f(\beta)|, \; \alpha \in [a, b], \; \beta \in [a, b]\}$

উপপাদ্য-6

যদি $f : [a, b] \to R$ একটি সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় তবে $|f|$ ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হবে এবং

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)| dx.$$

প্রমাণ ঃ যেহেতু f, $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য অতএব 'f' ঐ অন্তরে সীমাবদ্ধ কাজেই $|f|$ অপেক্ষকও $[a, b]$ অন্তরে সীমাবদ্ধ হবে। যে কোনো ধনসংখ্যা ε নিই। প্রদত্ত শর্ত অনুসারে $[a, b]$ অন্তরের এমন একটা বিভাজন $P : (a = x_0 < x_1 < x_2 \; .... < x_n = b)$ পাব যার জন্য

$$S_p(f) - s_P(f) > \varepsilon \qquad ...... \qquad (13)$$

মনে করা যাক 'P' বিভাজনের 'r' তম উপঅন্তর $[x_r\!-\!1, x_r]$ এ $f(x)$ এর ল.ঊ.সী ও গ.ণি.সী যথাক্রমে M_r ও m_r এবং $|f(x)|$ এর ল.ঊ.সী ও গ.ণি.সী যথাক্রমে M'_r, m'_r

এখন $[x_{r-1}, x_r]$ উপঅন্তরে যে কোনো দুটি বিন্দু α, β এর জন্য

$\| f | (\alpha) - | f | (\beta) | = \| f (\alpha)| - | f(\beta) \| \le | f (\alpha) - (\beta)|$

$\le M_r - m_r$ [প্রতিজ্ঞা (1) থেকে]

$\therefore M_r - m_r, \; \{\| f + (\alpha) - |f|(\beta)| : \alpha, \beta \in [x_{r-1}, x_r]\}$

সেটটির একটি ঊর্ধসীমা।

যেহেতু আগের প্রতিজ্ঞা থেকে বলতে পারি

$M'_r - m'_r$ হচ্ছে $\{\| f|(\alpha) - |f|(\beta)| : \alpha, \beta \in [x_{r-1}, x_r]\}$

সেটটির ল.ঊ.সী অতএব

$$M'_r - m'_r \le M_r - m_r, \; r = 1, 2 \; .... \; n.$$

$$\therefore \; S_P|f| - s_P|f| = \sum_{r=1}^{n}(M'_r - m'_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$\le \sum_{r=1}^{n}(M_r - m_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$= S_P(f) - s_P(f)$$

$$< \varepsilon \qquad .... (14)$$

$\therefore$ $| f |$ অপেক্ষকটি $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য তার যথেষ্ট শর্ত পূরণ করে।

অর্থাৎ $| f |$ $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য।

ধরি, $I = \int_a^b f(x)dx$ এবং $I' = \int_a^b |f(x)|dx$.

যেহেতু $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|, \forall x \in [x_{r-1}, x_r]$

$\therefore \; -m'_r \le M_r \le M'_r \quad [\because \; sup \; [-x] = - \; inf\{x\}]$

অথবা, $- s_P (|f|) \le S_P(f) \le S_P (|f|)$

এখন $\| P \| \to 0$ করে দার্বোর উপপাদ্য থেকে পাই,

$$- I' \le I \le I'$$

অথবা $| I | \le I'$

অর্থাৎ $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $| f(x) | \le M, \; \forall x \in (a, b)$ হলে

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le M(b-a)$$

টীকা ঃ মনে রাখতে হবে বিপরীতভাবে এই উপপাদ্য কিন্তু প্রযোজ্য নয়। অর্থাৎ $|f|$ অপেক্ষকটি কোনো অন্তরে যদি সমাকলন যোগ্য হয় তবে 'f' অপেক্ষকটিসেই অন্তরে সমাকলন যোগ্য নাও হতে পারে।

উদাহরণ ঃ মনে করি $[0, 1]$ অন্তরে 'f' কে এইভাবে সংজ্ঞা দেওয়া হলো—

$f(x) = 1$ যখন x মূলদ।

$\quad = -1$,, x অমূলদ।

অমরা দেখাব যে [0, 1] অন্তরে $|f|$ সমাকলনযোগ্য হলেও 'f' ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য নয়।

সমাধান ঃ [0, 1] অন্তরে যে কোনো বিন্দু 'x' এর জন্য পাই

$$|f|\ (x) = |f\ (x)| = 1$$

$\therefore$ [0, 1] অন্তরের যে কোনো বিভাজন 'P' এর জন্য

$$S_P(|f|) - s_P(|f|) = 0$$

$\therefore$ যে কোনো ধনসংখ্যা ε এর জন্য

$$S_p\ (|f|) - s_P(|f|) < \varepsilon$$

অর্থাৎ $|\ f\ |$ [0, 1] অন্তরে সমাকলনযোগ্য।

কিন্তু $S_p(f) = \sum_{r=1}^{n} m_r(x_r - x_{r-1})$

$$= 1$$

আবার $s_p(f) = \sum_{r=1}^{n} M_r(x_r - x_{r-1}) = -1$

$\therefore\ S_P(f) - s_P(f) = 2$

কাজেই '2' এর ছোট যে কোনো ধনসংখ্যা ε এর জন্য সমাকলন যোগ্যতার অপরিহার্য শর্ত $S_P - s_P < \varepsilon$ সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ [0, 1] অন্তরে f সমাকলনযোগ্য নয়।

উপপাদ্য-7

মনে করি 'f' ও 'g' দুটি অপেক্ষক $[a, b]$ অন্তরে সংজ্ঞাত এবং সমাকলনযোগ্য। তাহলে তাদের গুণফল fg অপেক্ষকটিও ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক

$$\phi(x) = f(x)\ g\ (x),\ \forall x \in\ [a,\ b]$$

এবং A ও B যথাক্রমে $[a, b]$ অন্তরে $|f|$ ও $|g|$ অপেক্ষকদ্বয়ের ল.উ.সী। যে কোনো বিভাজন

$P\ :\ (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b)$ নিই।

$M_r,\ m_r\ ;\ M'_r,\ m'_r$ এবং $M''_r,\ m''_r$ 'r' তম উপঅন্তরে যথাক্রমে ϕ, f ও g এর ল.উ.সী ও গ.নি.সী।

$[x_{r-1},\ x_r]$ উপ অন্তরে যে কোনো দুটি বিন্দু α ও β–র জন্য পাই

$$\begin{aligned} |\phi(\alpha) - \phi(\beta)| &= |f(\alpha)\ g(\alpha) - f(\beta)\ g(\beta)| \\ &= |\{f(\alpha) - f(\beta)\}\ g(\alpha) + \{g(\alpha) - g(\beta)\}\ f(\beta)| \end{aligned}$$

$$\leq |f(\alpha) - f(\beta)||g(\alpha)| + |g(\alpha) - g(\beta)||f(\beta)|$$
$$\leq B(M'_r - m'_r) + A(M''_r - m''_r)$$

$\therefore\ M_r - m_r \leq B(M'_r - m'_r) + A(M''_r - m''_r)$

এখন উভয়পক্ষকে $(x_r - x_{r-1})$ দিয়ে গুণ করে গুণফলকে যদি $r = 1$ থেকে n পর্যন্ত সমস্ত পূর্ণ সংখ্যার জন্য যোগ করা যায় তাহলে পাওয়া যাবে।

$$S_P(\phi) - s_P(\phi) \leq B\{S_P(f) - s_P(f)\} + A\{S_P(g) - s_P(g)\}$$

যদি L ও U যথাক্রমে $[a, b]$ অন্তরে ϕ এর নিম্ন ও উর্ধসমাকল হয় তবে বলতে পারি

$$0 \leq U - L \leq S_P(\phi) - s_P(\phi) \leq B\{S_P(f) - s_P(f)\} + A\{S_P(g) - s_P(g)\}$$

যেহেতু $[a, b]$ অন্তরে f ও g সমাকলনযোগ্য তাহলে

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_P(f) = \lim_{\|P\|\to 0} s_P(f)$$

আবার $\lim_{\|P\|\to 0} Sp(g) = \lim_{\|P\|\to 0} Sp(g)$

সুতরাং উভয়পক্ষে $\|P\| \to 0$ করে পাই

$$0 \leq U - L \leq 0$$

অর্থাৎ $U = L$

কাজেই ϕ অপেক্ষকটি $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য।

অর্থাৎ কোনো দুটি অপেক্ষক উভয়ই কোনো অন্তরে সমাকলনযোগ্য হলে তাদের গুণফল অপেক্ষকটিও ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হবে।

উপপাদ্য-8

দুইটি সমাকলনযোগ্য অপেক্ষকের ভাগফলের সমাকলনযোগ্যতা।

মনে করুন 'f' ও 'g' অপেক্ষকদ্বয় $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য এবং $[a, b]$ অন্তরের প্রত্যেকটি বিন্দু 'x' এরজন্য $|g(x)| \geq a > 0$ শর্তটি সিদ্ধ হয় তবে 'f/g' অপেক্ষকটিও ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হবে।

প্রথমেই একটি জিনিস লক্ষ্য করুন যে $|g(x)| > 0$ শর্তটি এর আগে সমষ্টি, অন্তরফল বা গুণফলের সমাকলন যোগ্যতা প্রমাণের জন্য প্রয়োজন হয়নি কিন্তু এখানে প্রয়োজন হচ্ছে $|g(x)| = 0$ হলে f/g অপেক্ষকটি অসংজ্ঞাত থেকে যায়। তেমনি করে আপনি যদি g/f অপেক্ষকটি গণ্য করতেন তবে $[a, b]$ অন্তরের সর্বত্র $|f(x)| \neq 0$ শর্তটিপ্রয়োজন হত।

প্রমাণ ঃ ধরি $\phi = \dfrac{f}{g}$ এবং A ও B হল $[a, b]$ অন্তরে যথাক্রমে $|f|$ ও $|g|$ অপেক্ষকের ল.উ.সী। $[a, b]$ অন্তরের যে কোনো বিভাজন।

$P : (a = x_0 < x_1 < x_2 < ..... < x_n = b)$ নেওয়া হল $[x_{r-1}, x_r]$ উপান্তরে ϕ, 'f' ও 'g' অপেক্ষক তিনটির ল.উ.সী ও গ.নি.সী হল যথাক্রমে M_r, m_r ; M'_r, m'_r ও M''_r, m''_r । এই উপান্তরে যে কোনো বিন্দু জোড় (α, β)-র জন্য পাই

$$|\phi(\alpha)-\phi(\beta)| = \left|\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} - \frac{f(\beta)}{g(\beta)}\right|$$

$$= \frac{|f(\alpha)g(\beta) - f(\beta)g(\alpha)|}{|g(\alpha)g(\beta)|}$$

$$= \frac{|\{f(\alpha)-f(\beta)\}g(\beta) - \{g(\alpha)-g(\beta)\}f(\beta)|}{|g(\alpha)||g(\beta)|}$$

$$\leq \frac{B|f(\alpha)-f(\beta)| + A|g(\alpha)-g(\beta)|}{a^2}$$

[আমরা জানি $| a - b | \leq | a | + | b |$]

$$\leq \frac{1}{a^2}[B(M'_r - m'_r) + A(M''_r - m''_r)]$$

যেহেতু $|\phi(\alpha)-\phi(\beta)| \leq \frac{1}{a^2} B(M'_r - m'_r) + A(M''_r - m''_r)$

এই সম্পর্কটি $[x_r, x_{r-1}]$ উপান্তরের যে কোনো বিন্দু জোড় (α, β)-র জন্য প্রযোজ্য অতএব

$$M_r - m_r \leq \frac{1}{a^2}[B(M'_r - m'_r) + A(M''_r - m''_r)]$$

তারপর ঠিক আগের মতো উভয়পক্ষে $(x_r - x_{r-1})$ দিয়ে গুণ করে $r = 1$ থেকে n-এর জন্য যোগ করলে পাই,

$$S_P(\phi) - s_P(\phi) \leq \frac{1}{a^2}\left[B\{S_p(f)s_P(f)\} + A\{S_P(g) - s_P(g)\}\right]$$

এবার দুদিকে $\|P\| \to 0$ করে দার্বোর উপপাদ্য অনুসারে বলতে পারি

$$0 \leq U - L \leq 0 \quad \left[\because \lim_{\|P\|\to 0} S_P(f) = \lim_{\|P\|\to 0} s_P(f)\right.$$

অর্থাৎ $l = L$ $\qquad$ এবং $\left.\because \lim_{\|P\|\to 0} S_P(g) = \lim_{\|P\|\to 0} s_P(g)\right]$

যেখানে l ও L হল $[a, b]$ অন্তরে ϕ এর যথাক্রমে ঊর্ধ ও নিম্ন সমাকল।

অতএব ϕ সমাকলন যোগ্য অর্থাৎ f/g সমাকলন যোগ্য।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

এখন $f = 1$ হলে, 'f' অবশ্যই $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হবে। আবার 'g' যদি অনুরূপ

একটি সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় এবং $|g(x)| \geq a > 0, \forall x \in [a, b]$ হয় তাহলে $\frac{1}{g}$ অপেক্ষকটি ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হবে।

এতক্ষণ আপনারা দেখলেন একাধিক অপেক্ষকের সাহায্যে গঠিত কিছু কিছু অপেক্ষকের সমাকলনযোগ্যতা। এবার আমরা একটু অন্য ধরনের ধর্ম নিয়ে আলোচনা করব। যেমন একটি অপেক্ষকের সমাকলনের ফলে উৎপন্ন অপেক্ষকটি কি কি ধর্ম পালন করে।

উপপাদ্য-9

মনে করি $[a, b]$ অন্তরে 'f' একটি সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক এবং $\phi(x) = \int_a^\alpha f(t)dt \; \forall x \in [a,b]$ তাহলে $\phi(x)$, (a, b) মুক্ত অন্তরে সন্তত হবে।

প্রমাণ ঃ $[\text{———}|\text{————}|\text{———}]$

$\quad a \qquad \alpha \qquad x \qquad b$

ধরুন $\alpha \in [a, b]$ অন্তরের যে কোনো (অন্তর্বিন্দু interior point) এখন $h \neq 0$ একটি বাস্তব সংখ্যা এমনভাবে নেওয়া হল যে $\alpha + h \in [a, b]$

$$\text{তাহলে } \phi(\alpha + h) - \phi(\alpha) = \int_a^{\alpha+h} f(t)dt - \int_a^{\alpha} f(t)dt$$

$$= \int_\alpha^{\alpha+h} f(t)dt$$

'M' যদি $[a, b]$ অন্তরে $|f|$ অপেক্ষকের ল.ঊ.সী. হয়

$$|\phi(\alpha + h) - \phi(\alpha)| = \left| \int_\alpha^{\alpha+h} f(t)dt \right| \leq \int_\alpha^{\alpha+h} |f(t)|\, dt$$

$$\leq M\ (\alpha + h - \alpha) = M.h.$$

এখন 'h' $\to 0$ করলে আপনি বলতে পারেন

$\lim_{h\to 0} |\phi(\alpha + h) - \phi(\alpha)| = 0$

অর্থাৎ $\lim_{h\to 0} \phi(\alpha + h) = \phi(\alpha)$

সুতরাং, 'α' বিন্দুতে ϕ সন্তত। এখন α যেহেতু (a, b) অন্তরের যে কোনো বিন্দু অতএব বলতে পারেন (a, b) মুক্ত অন্তরের সকল বিন্দুতেই ϕ সন্তত। এখানে $f(x)$ a, b বিন্দুতে যথাক্রমে ডানহাত ও বাঁহাতের দিক থেকে সন্তত।

তাহলে দেখা গেল কোনো অন্তরে সমাকলনের সাহায্যে সংজ্ঞাত অপেক্ষকটি ঐ অন্তরের সর্বত্র সন্তত হবে। পরের প্রশ্নই হল ঐ অন্তরে অপেক্ষকটি অবকলন যোগ্য হবে কিনা? পরের উপপাদ্যে সেই প্রশ্নেরই উত্তরপাবেন।

উপপাদ্য-10

মনে করলাম 'f' অপেক্ষক $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য এবং

$$\phi(x) = \int_a^x f(t)dx, \ \forall x \in [a, b]$$

যদি $[a, b]$ অন্তরের কোনো বিন্দু 'α'-তে সন্তত হয় তাহলে 'α' বিন্দুতে ϕ অবকলনযোগ্য এবং

$$\phi'(\alpha) = f(\alpha)$$

প্রমাণ ঃ ϕ অপেক্ষকের সংজ্ঞা থেকেই আপনারা লিখতে পারেন

$$\phi(\alpha + h) - \phi(\alpha) = \int_a^{\alpha+h} f(t)dt - \int_a^{\alpha} f(t)dt$$

$$= \int_a^{\alpha+h} f(t)dt$$

$$\therefore \ \frac{\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)}{h} - f(\alpha) = \frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\alpha+h} f(t)dt - f(\alpha)$$

$$= \frac{1}{h}\int_{\alpha}^{\alpha+h} \{f(t)dt - f(\alpha)\}dt$$

যে কোনো ধনসংখ্যা ε ধরুন। যেহেতু α বিন্দুতে f সন্তত এমন একটা ধনসংখ্যা δ পাওয়া যাবে যার জন্য

$$|f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon \text{ যখন } x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta) \cap [a, b]$$

তাহলে উপরের সমীকরণ থেকে পাওয়া যাচ্ছে

$$\left|\frac{\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)}{h} - f(\alpha)\right| - \frac{\varepsilon}{|h|}|h| = \varepsilon$$

অর্থাৎ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\phi(\alpha+h)-\phi(\alpha)}{h} - f(\alpha)$

$\therefore \ \phi'(\alpha) = f(\alpha).$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ 'f' যদি $[a, b]$ অন্তরের সর্বত্র সন্তত হয় তাহলে ϕ অপেক্ষকটি ঐ অন্তরের সর্বত্র অবকলনযোগ্য হবে এবং

$$\phi'(x) = f(x), \ \forall x \in [a, b]$$

সংজ্ঞা ঃ

প্রত্যবকলজ ঃ উপরের অনুসিদ্ধান্ত থেকে আপনারা প্রত্যবকলজের ধারণা পাবেন। মনে করুন $[a, b]$ অন্তরে $f(x)$ একটি বাস্তব মান বিশিষ্ট অপেক্ষক। ঐ অন্তরে অবকলনযোগ্য এমন কোনো অপেক্ষক ϕ এর যদি অস্তিত্ব থাকে যাতে $[a, b]$ অন্তরের যে কোনো বিন্দুতে $\phi'(x) = f(x)$ হয় তাহলে ϕ কে 'f' এর প্রত্যবকলজ বলে। এখন ধরুন 'k' যদি একটি ধ্রুবক হয় এবং $\psi(x) = \phi(x) + k, \forall x \in [a, b]$ তাহলে $\psi'(x) = \phi'(x) = f(x)$। অর্থাৎ, $f(x)$ এর আর একটি প্রত্যবকলজ $\psi(x)$। কাজেই একটি অপেক্ষকের অসীম সংখ্যক প্রত্যবকলজ থাকতে পারে।

উপরের সংজ্ঞা থেকে নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে যে কোনো অপেক্ষক 'f' তার আহৃতকের (f') প্রত্যবকলজ। এথেকে এমন অনুমান করা খুব স্বাভাবিক যে প্রত্যবকলজ থাকতে গেলে অপেক্ষকটিকে সমাকলনযোগ্য হতে হবে। কিন্তু নীচের এই উদাহরণ থেকে বুঝতেপারবেন যে সমাকলনযোগ্য নয় এমন অপেক্ষকেরও প্রত্যবকলজ থাকতে পারে। অর্থাৎ উপরের বাক্যটি সাধারণভাবে সত্য নয়।

উদাহরণ : $[0, \pi]$ অন্তরে 'f' এর সংজ্ঞা হলো

$$f(x) = x^{3/2} \sin\frac{\pi}{2}, \ 0 < x \le \pi$$

$$= 0 \quad \text{যখন } x = 0$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{2} - x^{3/2}\cos\frac{\pi}{x}.\frac{\pi}{x^2}, \ 0 < x \le \pi$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x} - \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{x}}\cos\frac{\pi}{x}}, \ 0 < x \le \pi$$

$x = 0$ হলে

$$f'(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{x^{3/2}\sin\dfrac{\pi}{x}}{x} = \lim_{x\to 0+}\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x} = 0$$

এখন $f'(x)$-এর রাশিমালায় চিহ্নিত অংশটি ⊡

অর্থাৎ $\dfrac{\pi}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{\pi}{x} \to \alpha$ যখন $x \to 0+$

সুতরাং অপেক্ষকটি সীমাবদ্ধ নয় কাজেই সমাকলনযোগ্য নয়। কিন্তু 'f' কে অবকলন করেই 'f'' পাওয়া গেছে। কাজেই 'f'' এর প্রত্যবকলজ হল 'f'।

তাহলে দেখতে পাচ্ছেন এ বিষয়ে সঠিক সিদ্ধান্ত হল সমাকলনযোগ্য যে কোনো অপেক্ষকরই প্রত্যবকলজ আছে কিন্তু সমাকলনযোগ্য নয় এমন অপেক্ষকরও প্রত্যবকলজ থাকতে পারে। আপনারাও চেষ্টা করে দেখুন এরকম উদাহরণ আরও তৈরী করতে পারেন কিনা।

4.4 কলনবিদ্যার মূল উপাদান (Fundamental theorem of Calculus)

উপপাদ্য-11

মনে করি $[a, b]$ অন্তরে 'f' একটি অবকলনযোগ্য অপেক্ষক। যদি f' ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হয় তবে

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

প্রমাণ ঃ যে কোনো ধনসংখ্যা ε কল্পনা করুন। মনে করি

$I = \int_a^b f'(x)dx$ এবং $[a, b]$ র যে কোনো বিভাজন

$P : (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b)$।

যেহেতু f', $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য তাহলে এমন একটা ধনসংখ্যা 'δ' পাব যার জন্য $\|P\| < \delta$ হলে

$$\left| I - \sum_{r=1}^{n} f'(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) \right| < \varepsilon \text{ হবে } \ldots\ldots \quad (15)$$

যেখানে $x_{r-1} \leq \xi_r \leq x_r \quad (r = 1, 2, \ldots\ldots n)$

আবার যেহেতু $[a, b]$ অন্তরে 'f' অবকলনযোগ্য ঐ অন্তরে 'f' নিশ্চয় সন্তত। অতএব লাগ্রাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্য অনুসারে পাই

$$f(x_r) - f(x_{r-1}) = f'(\eta_r)(x_r - x_{r-1})$$

যেখানে $\quad x_{r-1} \leq \eta_r \leq x_r$

অথবা, $$\sum_{r=1}^{n} \{f(x_r) - f(x_{r-1})\} = \sum_{r=1}^{n} f'(\eta_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$\sum_{r=1}^{n} f'(\eta_r)(x_r - x_{r-1})\} = f(x_1) - f(x_0) + f(x_2)$$

$$- f(x_1) + \ldots.. + f(x_n) - f(x_{n-1})$$
$$= f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a}).$$

$\therefore$ (15) নম্বর অসমীকরণ থেকে পাই,

$$| \mathrm{I} - \{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})\}| < \varepsilon$$

যেহেতু ε এর মান আপনারা যেমন খুশি বেছে নিতে পারেন অতএব বলতে পারি

$$\mathrm{I} = f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})$$

অর্থাৎ $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

এই উপপাদ্যে 'b' বিন্দুকে যদি যে কোনো চলমান বিন্দু 'x' দিয়ে প্রতিস্থাপিত করি তাহলে পাই [যেখানে $x \in \{a, b]]$

$$\int_a^x f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

অথবা $f(x) = f(\mathrm{a}) + \int_a^x f'(t)dt$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $[a, b]$ অন্তরে 'f' যদি একটি অবকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় এবং f' যদি ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য হয় তবে $[a, b]$ অন্তরের সমস্ত বিন্দু 'x' এর জন্য

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$$

4.5 অসমতা সংক্রান্ত কয়েকটি উপপাদ্য

উপপাদ্য-12

'f' যদি $[a, b]$ অন্তরে সংজ্ঞাত ও সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় এবং যদি $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ তাহলে $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $[a, b]$ 'f' সমাকলনযোগ্য। অতএব ঐ অন্তরে 'f' সীমাবদ্ধ। ধরা যাক।

$P : (a = x_0 < x_1 < \ldots.. < x_n = b)$ $[a, b]$ অন্তরের একটি বিভাজন এবং M_r ও m_r যথাক্রমে $[x_{r-1}, x_r]$ উপান্তরে 'f' এর ল.উ.সী ও গ.নি.সী।

যেহেতু $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$

অতএব $m_r \geq 0$

$$\therefore\ s_P(f) = \sum_{r=1}^{n} m_r(x_r - x_{r-1}) \geq 0 \forall P \in \Delta$$

যেখানে $\Delta[a, b]$ অন্তরের সকল সম্ভাব্য বিভাজনের সেট।

$\therefore$ ল.উ.সী $s_P\ (f) \geq 0$

অর্থাৎ $\underline{\int_a^b} f(x)dx \geq 0$

যেহেতু 'f' $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য অতএব

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

উপপাদ্য-13

যদি 'f' ও 'g' দুটি অপেক্ষক $[a, b]$ অন্তরে সংজ্ঞাত ও সমাকলনযোগ্য হয় এবং যদি

$f(x) \geq g(x)$ হয় $\forall x \in [a, b]$

তাহলে $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \geq 0$ হবে।

প্রমাণ ঃ মনে করি $\phi : [a, b] \to R$ এইভাবে সংজ্ঞা দেওয়া হল ঃ

$$\phi(x) = f(x) - g(x)\ \forall x \in [a, b]$$

$$\therefore\ \phi(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [a, b]$$

যেহেতু $f(x)$ ও $g(x)$ উভয়েই $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য

অতএব $\phi(x)$ ও ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য। [উপপাদ্য-4 ও 5 দেখুন]

আবার যেহেতু $\phi(x) \geq 0$ উপপাদ্য-12 থেকে বলতে পারি

$$\int_a^b \phi(x)dx \geq 0$$

$$\therefore\ \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$$

অথবা, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

অনুসিদ্ধান্ত : মনে করি 'f' একটি অপেক্ষক যা $[a, b]$ অন্তরে সংজ্ঞাত এবং সমাকলনযোগ্য। যদি ঐ অন্তরে 'f' এর ল. ঊ. সী ও গ. নি. সী যথাক্রমে M ও m হয় তবে

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

[নিজে প্রমাণ করার চেষ্টা করুন]

অনুসিদ্ধান্ততে আমরা যা পেলাম তাকে এইভাবে বলা যেতেপারে যে 'যদি কোনো অপেক্ষক নয় সমাকলনযোগ্যতার অঞ্চলে ঋণাত্মক না হয় তবে তার সমাকলের মান ও ঋণাত্মক হবে না।

এখন আমরা যে উপপাদ্যটি প্রমাম করব সেখানে শর্তটিকে সামান্য পাল্টে দেওয়া হলো।

যদি কোনো অপেক্ষক তার সমাকলনযোগ্যতার অঞ্চলে ঋণাত্মক না হয় এবং ঐ অন্তরে কোনো একটি বিন্দুতে অপেক্ষকটি যদি ধনাত্মক ও সন্তত হয় তবে তার সমাকলের মান ধনাত্মক হবে।

শর্তের এই পরিবর্তনটুকু ভালো করে লক্ষ্য করবেন।

উপপাদ্য-14

মনে করুন $f : [a, b] \to R$ তার সংজ্ঞার অঞ্চলে সমাকলনযোগ্য এবং

$f(x) \ge 0 \ \forall x \in [a, b]$

$f(\text{c}) > 0, c \in [a, b]$

$f(x)$, $x = c$ বিন্দুতে সন্তত, তাহলে

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

প্রমাণ : $[a, b]$ অন্তরে 'c' এর অবস্থান অনুযায়ী এই প্রক্রিয়াকে আমরা কয়েকটি প্রকারে ভাগ করে নেব।

প্রথম প্রকার ঃ

$a < c < b$, অর্থাৎ $c \in (a, b)$

ধরি $\in = \frac{1}{2} f(c) > 0$

যেহেতু 'c' বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত একটা ধনাত্বক সংখ্যা 'δ' অবশ্যই থাকবে যার জন্য

$$f(\text{c}) - \varepsilon < f(x) < f(\text{c}) + \varepsilon, \ \forall x \ (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$$

এ থেকে পাই $f(x) > \frac{1}{2} f(\text{c}), \ \forall x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$

এখন $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c-\delta}^b f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx$

যেহেতু $f(x) \geq 0, \; \forall \; x \in [a, c + \delta\}$

$$\int_{a}^{c-\delta} f(x)dx \geq 0$$

অনুরূপভাবে $\displaystyle\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx \geq 0$

কিন্তু $\displaystyle\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx \geq \frac{1}{2} f(c).2\delta$

[$\because$ এখানে $f(x) > \frac{1}{2} f(c)$]

$= f(c).\delta > 0$

$\therefore \displaystyle\int_{a}^{b} f(x)dx > 0$

দ্বিতীয় প্রকার ঃ

$c = a$

ধরি $\varepsilon = \frac{1}{2} f(a) > 0$

যেহেতু $f(x)$, $x = a$ বিন্দুতে সন্তত তাহলে একটি ধনাত্মক সংখ্যা 'δ' পাব যেখানে

$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon, \; \forall \; x \in \; [a, a + \delta] \cap [a, b]$

$\therefore \; f(x) > \frac{1}{2} f(a) > 0$

সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{a+\delta} f(x)dx + \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx > \delta.\frac{1}{2} f(a) > 0$$

তৃতীয় প্রকার ঃ

$c = b$

ধরি $\varepsilon = \frac{1}{2} f(b) > 0$

যেহেতু $f(x)$, b বিন্দুতে সন্তত এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা 'δ' পাব যেখানে

$f(b) - \varepsilon < f(x) < f(b) + \varepsilon, \; \forall x \in [b - \delta, b] \cap [a, b]$

এখন $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b-\delta} f(x)dx + \int_{b-\delta}^{b} f(x)dx$

যেহেতু $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [a, b-\delta]$ এবং

$$f(x) > \frac{1}{2} f(b) > 0, \ \forall \ x \in [b-\delta, b]$$

অতএব $\int_a^b f(x)dx > 0$

তাহলে দেখতে পাচ্ছেন $[a, b]$ অন্তরে 'c' বিন্দুর অবস্থান যেখানেই হোক না কেন অঋণাত্মক কোনো অপেক্ষক যদি ঐ বিন্দুতে সন্তত এবং ধনাত্মক হয় তবে $[a, b]$ অন্তরে তার সমাকলের মান ও ধনাত্মক হবে।

অনুসিদ্ধান্ত

যদি $f, g : [a, b] \to R$ উভয়ই সমাকলনযোগ্য হয় এবং $[a, b]$ অন্তরের কোনো একটি বিন্দু 'c' তে যদি উভয় অপেক্ষকই সন্তত হয় আরও যদি

$f(\mathrm{c}) > g(\mathrm{c})$ এবং

অন্যত্র $f(x) \geq g(x)$ হয় তবে

$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$ হবে।

প্রমাণ ঃ ধরি $\phi(x) = f(x) - g(x), \ x \in [a, b]$

তাহলে $\phi(x)$ উপরোক্ত উপপাদ্যের সমস্ত শর্তই পূরণ করে কাজেই

$\int_a^b \phi(x)dx > 0$ অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$

উপপাদ্য-15

মনে করুন $[a, b]$ অন্তরে 'f' সীমাবদ্ধ ও সমাকলনযোগ্য তাহলে 'f' ঐ অন্তরে প্রায় সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন।

প্রমাণ ঃ $[a, b]$ অন্তরে যে সববিন্দুতে 'f' বিচ্ছিন্ন তাদের সেটটি মনে করুন 'E'। এবার প্রত্যেক অখণ্ড ধনসংখ্যা 'n' এর জন্য 'E' এর যে সববিন্দুতে 'f' এর দোলন $\frac{1}{n}$ এরচেয়ে কম নয় সেই সেটটি মনে করুন E_n. তাহলে $E_1, E_2, E_3 .... E_n$ ইত্যাদি সেটগুলি 'E' এর এক একটি উপসেট এবং $E = U_{n=1}^{\alpha} E_n$. একটি নির্দিষ্ট অখণ্ড ধনসংখ্যা 'n' এবং যে কোনো ধনসংখ্যা ε নিই। যেহেতু $[a, b]$ অন্তরে 'f'সমাকল্য $[a, b]$-র এমন একটি বিভাজন $P : (a = x_0 < x_1 < x_2 \ ...... < x_n = b)$ পাব যেখানে $S_P - s_P < \frac{1}{2n}.\varepsilon$.

এখন E_n সেটের যে সব বিন্দু 'P' এর বিভাজক বিন্দু তাদের সেটটি ধরি E_n^* এবং $E_n - E_n^* = E_n^{**}$

তাহলে E_n^* সেটটি অবশ্যই একটি সসীম সেট। আরও বোঝা যাচ্ছে যে E_n^{**} এরপ কোনও সদস্যই 'P' এর কোনো বিভাজক বিন্দু নয়। তাহলে E_n^{**} সদস্যরা নিশ্চয়ই (x_0, x_1) ; (x_1, x_2) .... ইত্যাদি উন্মুক্ত অন্তরগুলির কয়েকটিতে অবস্থিত। এইরকম যে সব অন্তরে E_n^{**} সদস্যরা অবস্থিত তারা মনে করি I_1, I_2 ..... I_P তাহলে

$$E_n^* \subset I_1 U I_2 U \;....\; U I_P.$$

এবং $\frac{1}{n}$ $(|I'_2| + |I'_2| + \;......\; |I'_P|)$

$$< \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(x_r - x_{r-1})$$

$$\leq \sum_{r=1}^{n}(M_r - m_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$= S_P - s_P$$

$$< \frac{1}{2n}\varepsilon$$

$$\therefore\; |I_2| + |I_2| + ...|I_P| < \frac{\varepsilon}{2}$$

যেহেতু E_n^* একটি সসীম সেট একে সসীম সংখ্যক উন্মুক্ত অন্তরমালা J_1, J_2 ..... J_q দিয়ে আবৃত করা যাবে যার জন্য

$$|J_1| + |J_2| + \;.....\; |J_q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore\quad E_n C I_1 U I_2 U....I_p U J_1 U J_2 U.....U J_q$$

এবং $|I'_1| + |I'_2| + \;.....\; + |I'_p| + |J_1| + \;......\; + |\; J_q \;| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

অতএব 'E_n' একটি শূন্য পরিমাপের সেট, অতএব 'E' একটি শূন্য পরিমাপেরসেট, অর্থাৎ $[a, b]$ অন্তরে 'f' প্রায় সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ মনে করুন $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকল্য, এবং $F(x) = \int_a^x f(t)dt, a \leq x \leq b.$

তাহলে, $[a, b]$ অন্তরের প্রায় সর্বত্র $F'(x) = f(x)$ হবে।

উপপাদ্য (10) ও (16) থেকে এর প্রমাণ সহজেই বোঝা যাচ্ছে।

উপপাদ্য-16

মনে করি $[a, b]$ অন্তরে অপেক্ষক 'f' সমাকল্য ও অঋণাত্মক যদি

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \text{ হয়}$$

তবে $[a, b]$ অন্তরের প্রায় সর্বত্র $f(x) = 0$ হবে।

প্রমাণ ঃ $[a, b]$ অন্তরে 'f' যদি সর্বত্র অবিচ্ছিন্ন না হয় তাহলে বিচ্ছিন্নতার বিন্দুসমূহের সেটটি মনে করি 'E'। সুতরাং উপপাদ্য 16 অনুসারে 'E' সেটটি শূন্য পরিমাপের। এখন '$[a, b] - E$' সেটের যে কোনো বিন্দু ধরি α যেখানে $f(\alpha) > 0$. যেহেতু $\alpha \in (a, b)$. এমন একটা ধনসংখ্যা δ পাব যে $(\alpha - \delta ; \alpha + \delta) \subset (a, b)$ এবং

$$f(x) > \frac{1}{2} f(\alpha), \forall x \in (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^{\alpha-\delta} f(x)dx + \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} f(x)dx + \alpha - \int_{\alpha+\delta}^{b} f(x)dx \cdot$$

$$\geq \int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} f(x)dx.$$

$$> \frac{1}{2} f(\alpha).2\delta$$

$$= \delta.f(\alpha)$$

$$> 0$$

অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx > 0$

আবার যদি $\alpha = a$ হয়, তবে

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} f(x)dx + \int_{\alpha+\delta}^{b} f(x)dx$$

$$\geq \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} f(x)dx.$$

$$> \frac{1}{2} f(\alpha)\delta$$

$$= 0$$

অনুরূপভাবে $\alpha = b$ হলেও দেখানো যায় যে

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

কিন্তু এটা প্রদত্ত শর্ত বিরোধী

অতএব $f(\alpha) \not> 0$ অর্থাৎ $f(\alpha) = 0$

যেহেতু α, $[a, b] - E$ সেটের যে কোনো বিন্দু সুতরাং

$f(x) = 0, \ \forall x \in [a, b] - E$

যেহেতু 'E' সেটটি শূন্য পরিমাপের কাজেই $[a, b]$ অন্তরের প্রায় সর্বত্র $f(x) = 0$

চলের পরিবর্তনের সমাকলের রূপান্তর ঃ

মনে করুন অপেক্ষক 'f' $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য এবং অপর একটি অপেক্ষক $\phi'[\alpha, \beta]$ অন্তরে অবকলনযোগ্য এবং $\phi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. এছাড়া (α, β) অন্তরে $\phi'(t) \neq 0$.

এখন যদি $[\alpha, \beta]$ অন্তরের অপেক্ষক $f[\phi(t)]$ ও $\phi'(t)$ সমাকলনযোগ্য হয় তাহলে

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt$$

প্রমাণ ঃ যেহেতু (α, β) অন্তরের প্রত্যেক বিন্দু 't' তে $\phi'(t) \neq 0$ অতএব $\phi'(t)$ ঐ অন্তরে একই চিহ্নযুক্ত। ধরা যাক $\phi'(t) > 0, \ \forall t \in [\alpha, \beta]$ তাহলে $[\alpha, \beta]$ অন্তরে ϕ সঠিকভাবে ক্রমবর্ধমান।

$P : (\alpha = t_0 < t_1 < t_2 \ ..... < \mathrm{I}_n = \beta)$, $[\alpha, \beta]$ অন্তরের একটি যে কোনো বিভাজন। যদি $\phi(t_r) = x_r$ ধরা হয় তবে

$Q : (a = x_0 < x_1 < x_2 \ .... < x_n = b)$ $[a, b]$ অন্তরের একটি বিভাজন।

যদি $\| P \| \to 0$ তবে $\| Q \| \to 0$ হবে।

লাগ্রাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্য অনুসারে

$$\begin{aligned} x_r - x_{r-1} &= \phi(t_r) - \phi(t_{r-1}) \\ &= (t_r, -t_{r-1})\phi'(\xi_r) \end{aligned}$$

যেখানে $t_{r-1} < \xi_r < t_r$.

মনে করুন $\eta_r = \phi(\xi_r)$ যেহেতু ϕ সঠিকভাবে ক্রমবর্ধমান তাহলে

$$\phi(t_{r-1}) < \phi(\xi_r) < \phi(t_r)$$

অর্থাৎ $x_{r-1} < \eta_r < x_r$

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n} f(\eta_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$= \sum_{r=1}^{n} f[\phi(\xi_r)][\phi(t_r) - \phi(t_{r-1})]$$

$$= \sum_{r=1}^{n} f[\phi(\xi_r)]\phi'(\xi_r)(t_r - t_{r-1})$$

যেহেতু $[a, b]$ অন্তরে 'f' এবং $[\alpha, \beta]$ অন্তরে $f[\phi(t)]\phi'(t)$ সমাকলনযোগ্য, $\|P\| \to 0$ হলে

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)dt$$

আবার $\phi'(t) < 0$ ধরে একই ধরনের যুক্তির সাহায্যে উপপাদ্য বিষয়টি প্রমাণ করার চেষ্টা করুন।

উপরের উপপাদ্যটির শর্তাবলী ভালো করে লক্ষ্য করুন। দেখুন প্রমাণের প্রক্রিয়াতে প্রত্যেকটি শর্ত ব্যবহার করা হয়েছে কিনা। যদি কোনোটি ব্যবহার না করা হয়ে থাকে তাহলে বুঝতে হবে শর্তটি এই উপপাদ্যে অপ্রয়োজনীয়। উল্টোদিক থেকে দেখুন কোনো একটি শর্তও যদি অপূর্ণ থাকত তাহলে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যেত কিনা?

যে কোনো উপপাদ্য প্রমাণের সময় এই জিনিসগুলি লক্ষ্যকরা বিশেষভাবে বাঞ্ছনীয় কারণ উপপাদ্যের শর্ত যতকম হবে তার ব্যবহারের প্রসারতা তত বাড়বে।

অংশাকারে সমাকলন ঃ

মনে করুন $[a, b]$ অন্তরে 'f' ও 'g' সমাকলনযোগ্য এবং ধরা যাক

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ ও } G(x) = \int_a^x g(t)dt \ \forall x \in [a, b]$$

তাহলে $\displaystyle\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)f(x)dx$

প্রমাণ ঃ ধরুন $\displaystyle I_1 = \int_a^b F(x)g(x)dx$

$$I_2 = \int_a^b G(x)f(x)dx$$

এবং $\displaystyle K = \int_a^b |f(x)|dx$ ও $\displaystyle\int_a^b |g(x)|dx$ র মধ্যে যেটি বড়।

যেহেতু $[a, b]$ অন্তরে 'f' ও 'g' সমাকলনযোগ্য অতএব $F(x)$ ও $G(x)$ অবিচ্ছিন্ন কাজেই সমাবিচ্ছিন্ন। যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε নিন। তাহলে একটি ধনসংখ্যা δ পাওয়া যাবে যার জন্য—

$|F(x') - F(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{2k+1}$ এবং $|G(x') - G(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{2k+1}$ যখন $x', x'' \in [a, b]$ এবং $|x'' - x'| < 0$

$[a, b]$ অন্তরের যে কোনো বিভাজন

$P : (a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_n = b)$

বিবেচনা করুন যেন $\| P \| < \delta$ হয়

তাহলে $F(\mathrm{b})\ G(\mathrm{b}) - F(\mathrm{a})\ G(\mathrm{a})$

$$= \sum_{r=1}^{n} F(x_r)G(x_r) - F(x_{r-1})G(x_{r-1})$$

$$= \sum_{r=1}^{n} F(x_r)[G(x_r) - G(x_{r-1})] + \sum_{r=1}^{n} G(x_{r-1})[F(x_r)F(x_{r-1})]$$

$$= \sum_{r=1}^{n} F(x_r) \int_{x_{r-1}}^{x_r} g(x)dx + \sum_{r=1}^{n} G(x_{r-1}) \int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x)dx$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \left[\int_{x_{r-1}}^{x_r} F(x_r)g(x)dx \int_{x_{r-1}}^{x_r} G(x_{r-1})f(x)dx \right]$$

আবার $I_1 + I_2 = \sum_{r=1}^{n} \left[\int_{x_{r-1}}^{x_r} F(x)g(x)dx \int_{x_{r-1}}^{x_r} G(x)f(x)dx \right]$

$\therefore \quad |F(b)G(b) - F(a)\ G(a) - (I_1 + I_2)|$

$$= \left| \sum_{r=1}^{n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} [F(x_r) - F(x)]g(x)dx + \sum_{r=1}^{n} [\int_{x_{r-1}}^{x_r} G(x_{r-1}) - G(x)]f(x)dx \right|$$

$$\leq \sum_{r=1}^{n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} |F(x_r) - F(x)|\,|g(x)|\,dx + \sum_{r=1}^{n} \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} |G(x_{r-1}) - G(x)|\,|f(x)|\,dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2k+1} \left\{ \sum_{r=1}^{n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} |g(x)|\,dx + \sum_{r=1}^{n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} |f(x)|\,dx \right\}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2k+1} \left\{ \int_a^b |g(x)|\,dx + \int_a^b |f(x)|\,dx \right\}$$

$$\leq \frac{2k}{2k+1} \varepsilon < \varepsilon$$

যেহেতু ε এর মান যেমন ইচ্ছা নেওয়া যেতে পারে

$$I_1 + I_2 = F(b)\ G(b) - F(a)\ G(a)$$

4.6 রীমান লেবেগ্ উপপাদ্য (Riemann Labesgue Lemma)

মনে করুন $[a, b]$ অন্তরে 'f' সীমাবদ্ধ ও সমাকলনযোগ্য

তাহলে—

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0$$

এবং $$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = 0$$

প্রমাণ ঃ যে কোনো ধনসংখ্যা ε কল্পনা করুন। যেহেতু $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকলনযোগ্য ঐ অন্তরে এমন একটি বিভাজন 'P' : $(a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_n = b)$ পাওয়া যাবে যাতে

$$\sum_{r=1}^{n} (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1}) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ সিদ্ধ হয়,}$$

যেখানে M_r ও m_r হলো যথাক্রমে $[x_{r-1}, x_r]$ অন্তরে 'f' এর ল. উ. সী ও গ. নি. সী।

তাহলে $$\int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = \sum_{r=1}^{n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x) \sin \lambda x \, dx$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \int_{x_{r-1}}^{a_r} \{f(x) - f(x_r)\} \sin \lambda x + \sum_{r=1}^{n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x_r) \sin \lambda x \, dx$$

$= S_1 + S_2$ ধরি

এখন $$|S_1| \le \sum_{r=1}^{n} \int_{x_{r-1}}^{x_r} |f(x) - f(x_r)| \, dx$$

$$\le \sum_{r=1}^{n} (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1})$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}$$

আবার $$|S_2| = + \left| \sum_{r=1}^{n} f(x_r) \frac{\cos \lambda x_r - \cos \lambda x_{r-1}}{\lambda} \right|$$

$$\le \frac{2|f(x_r)|}{|\lambda|} \to 0 \text{ যেহেতু } |\lambda| \to \infty$$

$$\because \quad |\cos \lambda x_r - \cos \lambda x_{r-1}| \le 2$$

কাজেই এমন একটি ধনসংখ্যা λ_0 পাওয়া যাবে যেন

$|S_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ হয় যখন $|\lambda| > \lambda_0$

$\therefore \quad |\lambda| > \lambda_0$ হলে

$$\left|\int_a^b f(x)\sin \lambda x dx\right| \le |S_1| + |S_2|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \quad \lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(x)\sin \lambda x dx = 0$$

ঠিক একইভাবে প্রমাণ করুন $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(x)\cos \lambda x dx = 0$

4.7 উদাহরণমালা ও অনুশীলনী

উদাহরণ-1

যখন $0 < x < 2$ দেখান যে

$$\frac{1}{1+\frac{1}{3}x^2} < \frac{x}{\sin hx} < \frac{1}{1+\frac{x^2}{6}}$$

এবং এর থেকে প্রমাণ করুন

$$\frac{\pi}{4} < \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sin hx} < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

প্রমাণ : $x > 0$ হলে

$$\sin hx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots > x + \frac{x^3}{6}$$

কাজেই $\dfrac{x}{\sin hx} < \dfrac{1}{1+\frac{x^2}{6}}$

আবার, $0 < x < 2$ হলে

$$\sin hx = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots..$$

$$< x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!}\left[\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5} + \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{7} + \cdots\right]$$

$$< x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6}\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots\right]$$

[$\because$ $\frac{2}{4}, \frac{2}{5}$ ইত্যাদি সংখ্যাগুলি $\frac{1}{2}$-এর চেয়ে ছোট।]

$$= x + \frac{x^3}{6}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right]$$

$$= x + \frac{x^3}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= x + \frac{x^3}{6}\cdot\frac{4}{3}$$

$$= x + \frac{2}{9}x^3 < x + \frac{x^3}{3}$$

$$\therefore \frac{x}{\sin hx} > \frac{1}{1+\frac{x^2}{3}}$$

কাজেই $0 < x < 2$ এর জন্য

$$\frac{1}{1+\frac{x^2}{3}} < \frac{x}{\sin hx} < \frac{1}{1+\frac{x^2}{6}}$$

যেহেতু উপরের অসমতার প্রতিটি অপেক্ষকই সমাকলনযোগ্য $[0, 2]$ অন্তরে এদের সমাকলন করে উপপাদ্য-14 অনুসারে পাওয়া যাবে।

$$\int_0^2 \frac{dx}{1+\frac{x^2}{3}} < \int_0^2 \frac{x\,dx}{\sin hx} < \int_0^2 \frac{dx}{1+\frac{x^2}{6}}$$

এখন $3\int_0^2 \frac{dx}{x^2+3} = 3.\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_0^2$

$$= \sqrt{3}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}} > \sqrt{3}\tan^{-1}1$$

$$= \sqrt{3}.\frac{\pi}{4}$$

আবার $\int_0^2 \frac{dx}{1+\frac{x^2}{6}} = 6\int_0^2 \frac{dx}{x^2+6}$

$$= \sqrt{6}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{6}}\Big|_0^2$$

$$= \sqrt{6}\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{6}} < \sqrt{6}\tan^{-1}1$$

$$= \sqrt{6}.\frac{\pi}{4} = \sqrt{3}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

দুটিকে একসাথে করে পাই

$$\frac{\pi}{4} < \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^2 \frac{x}{\sin hx}dx < \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

উদাহরণ-2

চলের পরিবর্তন করে সমাকলটির মান নির্ণয় করুন

$$\int_1^2 x^2\sqrt{x^3+2dx}$$

সমাধান ঃ মনে করুন $\phi(x) = x^3 + 2$ এবং $f(t) = \sqrt{t}$

$\therefore \quad f[\phi(x)] = \sqrt{x^3+2}$

$x = 1$ হলে $\phi(x) = 3$ আবার $x = 2$ হলে $\phi(x) = 10$

রূপান্তরের ফলে সমাকলটি দাঁড়ায়

$$\frac{1}{3}\int_3^{10} f[\phi(x)]\phi'(x)dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_3^{10} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_3^{10} \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left[t^{3/2}\right]_3^{10}$$

$$= \frac{2}{9}\left(10^{3/2} - 3^{3/2}\right)$$

উদাহরণ-3

দেখান যে $4 < \int_1^3 \sqrt{3+x^2}\,dx < 4\sqrt{3}$

সমাধান ঃ x যদি [1, 3] অন্তরের একটি চলরাশি হয়, তাহলে অবশ্যই

$2 < \sqrt{3+x^2} < 2\sqrt{3}$ হবে

ধরা যাক $f(x) = \sqrt{3+x^2}$, $\phi(x) = 2$ এবং $\psi(x) = 2\sqrt{3}$, $\forall x \in [1, 3]$ তাহলে বিবেচ্য অন্তরে x এর সকল মানের জন্যই অপেক্ষক তিনটি সীমাবদ্ধ এবং যেহেতু অবিচ্ছিন্ন তাই সমাকলনযোগ্য।

এছাড়া $\phi(2) < f(2) < \psi(2)$

$$\therefore \quad \int_1^3 \phi(x)dx < \int_1^3 f(x)dx < \int_1^3 \psi(x)\,dx$$

অর্থাৎ $4 < \int_1^3 \sqrt{3+x^2}\,dx < 4\sqrt{3}$

উদাহরণ-4

কোনো একটি অপেক্ষক $f(x)$ এর সংজ্ঞা হল

$$f(x) = 0 \qquad -1 \le x \le 0$$
$$= 1 \qquad 0 < x \le 1$$

প্রমাণ করুন যে $f(x)$ অপেক্ষকটি $(-1, 1)$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য এবং $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$ অপেক্ষকটি ঐ অন্তরে অবিচ্ছিন্ন।

সমাধান ঃ স্পষ্টতই দেখা যাচ্ছে যে $[-1, 1]$ অন্তরে, $f(x)$ সীমাবদ্ধ এবং $x = 0$ ছাড়া আর সকলবিন্দুতেই $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন। কাজেই $f(x)$ ঐ অন্তরে অবশ্যই সমাকলনযোগ্য

যদি $-1 \le x \le 0$ হয়, তবে

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt = 0 \text{ এবং}$$

$0 < x \leq 1$ হলে $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt + + \int_{0}^{x} f(t)dt$

$= x$[$f(x)$ এর সংজ্ঞা লক্ষ্য করুন]

তাহলে $F(x)$ এর সংজ্ঞা দাঁড়াল

$$F(x) = 0, \qquad -1 \leq x \leq 0$$

$$= x, \qquad 0 < x \leq 1$$

কাজেই $F(x)$ $[-1,\ 1]$ অন্তরে অবিচ্ছিন্ন।

উদাহরণ-5

$\int_{0}^{x^2} \frac{e^{\sqrt{1+t}}dt}{x^2}$ এর সীমাস্থ মান নির্ণয় করুন

যখন $x \to 0.$

সমাধান ঃ

মনে করুন $y = \int_{0}^{x^2} e^{\sqrt{1+t}}dt,\ F(x) = \int_{0}^{x} e^{\sqrt{1+t}}dt$

$u = x^2$ এবং $f(t) = e^{\sqrt{1+t}}$

$\therefore \quad y = F(u)$ কাজেই $\frac{dy}{dx} = 2xF'(u)$

যেহেতু $[0,\ x]$ অন্তরে $f(t)$ অবিচ্ছিন্ন

$F'(x) = f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$

L′ Hospital এর নিয়মানুসারে

$$\lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{dy}{dx}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} F'(u) = \lim_{x \to 0} e^{\sqrt{1+x^2}} = e$$

অনুশীলনী

1. দেখান যে

a. $$\frac{\pi^2}{9} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\, dx < \frac{2\pi^2}{9}$$

b. $$\frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 + x^3}} < \frac{\pi}{6}$$

c. $$\frac{x^2}{\sqrt{2}} \le \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} \le x^2$$ যখন $0 \le x \le 1.$

এ থেকে প্রমাণ করুন

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \le \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\, dx \le \frac{1}{3}$$

d. $$\cdot 573 < \int_1^2 \frac{dx}{4 - 3x + x^3} < \cdot 595$$

e. $$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{9}} < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{1 - \frac{x^2}{6}}$$ এ থেকে দেখান যে,

$$\frac{3}{2}\log 5 < \int_0^2 \frac{xdx}{\sin x} < \sqrt{6}\log\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$$

2. a. কোনো একটি অপেক্ষক $[a, b]$ অন্তরে অবিচ্ছিন্ন ও অঋণাত্মক এবং $\int_a^b f(x)dx = 0$ তাহলে দেখান যে ঐ অন্তরে $f(x) = 0$ একটি অভেদ।

b. মনে করুন $[a, b]$ অন্তরে $f(x)$ R-সমাকলনযোগ্য। যদি $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ হয় তবে প্রমাণ করুন যে $[a, b]$ অন্তরের প্রায় সর্বত্র $f(x) = 0$.

c. মনে করুন $[a, b]$ অন্তরে f, R-সমাকলনযোগ্য এবং $\int_a^x f(t)dt = 0,\ \forall x \in [a, b]$ দেখান যে $[a, b]$ অন্তরের প্রায় সর্বত্র $f(x) = 0$.

3. $[0, 2]$ অন্তরে একটি অপেক্ষকের সংজ্ঞাহল

$$f(x) = 1 \qquad 0 \le x \le 1$$
$$= x \qquad 1 < x \le 2$$

পরীক্ষা করে দেখুন যে

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt \;\; x \in [0, 2]$$

অপেক্ষকটি [0, 2] অন্তরে অবকলনযোগ্য এবং

$$F(x) = f(x)$$

4. [0, 3] অন্তরে $f(x) = [x]$ দেখান যে ঐ অন্তরে $f(x)$ সমাকলনযোগ্য এবং $\int_0^3 f(x)\, dx$ এর মান নির্ণয় করুন। আরও দেখান যে ঐ অন্তরে 'f' এর কোনো প্রত্যবকলজ নেই।

5. $f(x) = \int_0^x \sqrt{t + t^6}\, dt, x > 0$

$f'(2)$ এর মান নির্ণয় করুন।

6. চলের পরিবর্তন করেনীচের সমাকলনগুলির মান নির্ণয় করুন।

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin x \cos x + x \sin^2 x)dx$

b. $\int_0^2 te^{t^2} dt$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t\, dt$

d. $\int_0^2 t^2 \sqrt{1 + t^3}\, dt$ e. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ f. $\int_0^3 \frac{tdt}{\sqrt{1 + t^2}}$

g. $\int_{-1}^{e} \frac{e^2 \tan^{-1} - it}{1 + t^2}\, dt$

7. [0, 2] অন্তরে $f(x)$ এর সংজ্ঞা হল

$$f(x) = x^2, \qquad 0 \le x \le 1$$
$$= \sqrt{x}, \qquad 1 \le x \le 2$$

$\int_0^2 f(x)dx$ সমাকলটির মান নির্ণয় করুন।

8. সমাকলের বিভিন্ন ধর্ম ব্যবহার করে নীচের সমাকলগুলির মান নির্ণয় করুন।

(i) $\int_0^2 |1-x|\,dx$ (ii) $\int_0^3 f(x)\,dx$ যেখানে

$f(x) = 2x$ যখন $0 \le x \le 2$

$= x^2$ যখন $2 \le x \le 3$

(iii) $\int_{-1}^{1} \{x+|x|\}\,dx$

(iv) $\int_0^{2\pi} |1+2\cos x|\,dx$

(v) $\int_0^3 \{x-[x]\}\,dx$

9. কোনো অপেক্ষক যদি $[a, b]$ অন্তরেসমাকলনযোগ্য হয় তবে কি তাকে ঐ অন্তরে অবিচ্ছিন্ন হতেই হবে? উদাহরণ সহযোগে আপনার বক্তব্য প্রতিষ্ঠিত করুন।

10. মনে করুন

$f(x) = 0$ যদি $x \ne 0$ হয়

$= 1$ যদি $x = 0$ হয়

দেখান যে $[-1, 1]$ অন্তরে $f(x)$ সমাকলনযোগ্য কিন্তু ঐ অন্তরে $f(x)$ এর কোনো প্রত্যবকলজ নেই। এর কারণ কি?

11. উদাহরণের সাহায্যে দেখান যে বদ্ধ অন্তরে সংজ্ঞায়িত কোনো অপেক্ষকের প্রত্যবকলজ আছে কিন্তু সমাকল নেই।

12. a. $[a, b]$ অন্তরে $f(x)$ যদি অবিচ্ছিন্ন ও ধনাত্মক হয় তাহলে দেখান যে

$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$ $[a, b]$ অন্তরে সঠিকভাবে ক্রমবর্ধমান।

b. উপপাদ্য 16 অনুসরণ করে দেখান যে $[a, b]$ অন্তরে 'f' সমাকল্য এবং ঐ অন্তরে প্রত্যেক বিন্দু 'x' এর জন্য $\int_a^x f(t)dt = 0$ হলে ঐ অন্তরে প্রায় সর্বত্র $f(x) = 0$ হবে।

13. নীচের সীমাস্থ মানগুলি নির্ণয় করুন ঃ

$$a. \quad \lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3}\int_3^x e^{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

$$b. \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-3}\int_0^{x^2} \frac{\sin\sqrt{t}dt}{x^3}$$

14. $f(x) = 2x\sin\frac{\pi}{x} - \pi\cos\frac{\pi}{x}$, যখন $x \neq 0$

$= 0$ যখন $x = 0$

দেখান যে $[-3, 3]$ অন্তরে $f(x)$ সমাকলনযোগ্য এবং এর প্রত্যবকলজ আছে যদিও $x =$ 0 বিন্দুতে $f(x)$ বিচ্ছিন্ন। $\int_{-3}^{3} f(x)dx$ এর মান নির্ণয় করুন।

15. মনে করুন

$f(x) = k$ যখন x একটি পূর্ণসংখ্যা

$= k$ যখন x কোনো পূর্ণসংখ্যা নয়

প্রমাণ করুন যে যেকোনো সীমাবদ্ধ অন্তর $[0, b]$ তে অপেক্ষকটি সমাকলনযোগ্য।

16. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ এর মান আপনারা আগেই পেয়েছেন।

এখন x এর পরিবর্তে $\frac{1}{z}$ ধরলে সমাকলের মান একই থাকছে কিনা দেখুন এবং না থাকলে তার কারণ ব্যাখ্যা করুন।

4.8 সারাংশ

এই এককের 4.3 এ বিভিন্ন সমাকলের ধর্ম দেওয়া আছে। এছাড়া পাবেন দুটি সমাকলনযোগ্য অপেক্ষকের গুণফলের সমাকলন যোগ্যতার প্রমাণ।

4.4-এ পাবেন কলনবিদ্যার মূল উপপাদ্যের প্রমাণ।

4.5-এ অসমতা সংক্রান্ত কিছু উপপাদ্য আছে।

আর 4.6-এ গুরুত্বপূর্ণ রিমান-লেবেগের উপপাদ্য সম্পর্কে পরিচিত আছে।

সবশেষে উদাহরণ ও অনুশীলনীতে আপনি এই এককের একটি পূর্ণ প্রতিচ্ছবি পাবেন।

4.9 সংকেতসহ উত্তরমালা

1. (a) (b), (c), (d), (e) উদাহরণ 1 (4.7) এর মত করে ভাবুন।
2. (a) উপপাদ্য-14 এর সাহায্য নিন।

   (b) আগের উদাহরণ ও লেবেগের উপপাদ্য—এই দুটির সাহায্য নিন।

   (c) এখানে 'f' প্রায় সর্বত্র সন্তত। এর সন্ততার সেট্‌টি ধরুন S

   এবার $x \in S$ এর জন্য $f(x) \geq 0$ [বা, $f(x) < 0 \Rightarrow -f(x) > 0$]

   x এর একটি সামীপ্যে $f(x) \geq 0$, এখন থেকে আগের সমস্যা (a) এর সাহায্যে প্রমাণ করুন।
3. $x = 1$ বিন্দুটিতেই বিশেষভাবে জোর দিন।

   প্রথমে দেখান $x = 1$ এ $f(x)$ সন্তত।

   এবার উপপাদ্য-10 দেখুন।
4. $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $[x]$ এর অসন্ততির বিন্দুত্রয় [অবশ্যই [0, 3]-এ}

   $\therefore$ [0, 3] তে $f(x) = [x]$ সমাকলনযোগ্য। [স্পষ্টঃতই $[x]$ [0, 3]-এ সীমাবদ্ধ]

   এবার $\int_0^3 [x]dx = \int_0^1 [x]dx + \int_1^2 [x]dx + \int_2^3 [x]dx$ করুন।

   $= 0 + 1 + 2 = 3 \quad \therefore$ উত্তর $= 3$

   সংজ্ঞানুসারে $F(x) = \int_0^x f(x)dx + c$ হল $f(x)$ এর [0, 3] তে প্রত্যবকলজ

   যেখানে $x \in [0, 3]$, যেহেতু $x = 1, 2, 3$ তে অসন্ততি আছে অতএব $F(x)$ কে $x = 1, 2, 3$-এ অন্তরকলন করা যাবে না।
5. (a) উপপাদ্য-10-এর সাহায্য নিন।
6. (a)—(e) চলের পরিবর্তন করুন। উদাহরণে কষা অঙ্কগুলি দেখুন। অথবা Hardy, Courant-এর বই দুটি থেকে সাহায্য নিন।
7. লক্ষ্য করুন $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$ সন্তত এবং $f(x) = \sqrt{x}, x \in [1, 2]$ সন্তত।

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \sqrt{x}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} x^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 + 2\sqrt{8} - 2\right] = \frac{1}{3}\left(4\sqrt{2} - 1\right)$$

8. (i) $\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 -(1-x)dx$

$= 1$

(ii), (iii), (iv), (v) একইভাবে নিজে চেষ্টা করুন।

9. উত্তর ঃ না। উদাহরণ Thomae অপেক্ষক অসন্তত, কিন্তু সমাকলনযোগ্য।

10. $f(x)$ এর একমাত্র অসন্ততি $x = 0$ তে।

তাই [–1, 1]-এ লেবেগ উপপাদ্যনুসারে $f(x)$ সমাকলনযোগ্য।

$x = 0$ একটি অসন্ততির এর প্রত্যবকলজ নেই ([–1, 1]-এ)

11. একক-4 এর 'প্রত্যবকলজ' এর পরের উদাহরণটি দেখুন।

12. (a) $x > y$-এর জন্য $F(x) > F(y)$ বা, $F(x) - F(y) > 0$ দেখান।

$(b > x > y > a)$

অর্থাৎ $\int_y^x f(t)\,dx > 0$

এবার উপপাদ্য-14 (একক-4) এর সাহায্যে এটি দেখানো চেষ্টা করুন।

13. (a) উঃ $e^{\sqrt{10}}$ (ল'পিতার সূত্র)

(b) (a)-এর মত করে ভাবুন।

14. একক-4 এর প্রত্যবকলজ এর সংজ্ঞার পরে দেওয়া উদাহরণটি লক্ষ্য করুন।

[–3, 3] তে $f(x)$ সীমাবদ্ধ এবং $x = 0$ তেই এর একমাত্র অনন্যত্ব।

$\therefore$ $f(x)$ সমাকলনযোগ্য.

15. লক্ষ্য করুন পূর্ণসংখ্যার সেটের পরিমাপ সবসময়ই শূন্য।

16. এখানে $0 \in [-1, 1]$

তাই $\frac{1}{z}$, 0 বিন্দুতে অসংজ্ঞাত ও অন্তরকলনযোগ্য নয়।

4.10 সহায়ক গ্রন্থ

1. G.H. Hardy : A course in Pure mathematics (10th edition, Cambridge University Press)
2. T.M. Apostol : Mathematical Analysis (2nd edition, Narosa)
3. R. Couraud, H. Robbins, I. Stewart : What is mathematics ? (2nd edition, Oxford University Press)

একক 5 ❒ রিমান সমাকলের মধ্যমান সংক্রান্ত উপপাদ্যসমূহ

গঠন

5.1 প্রস্তাবনা

এর আগে অবকলন বিদ্যায় আপনারা নিশ্চয়ই মধ্যমমান উপপাদ্য পেয়েছেন, যেমন—লাগ্রাঞ্জের মধ্যমমান উপপাদ্য এবং টেলরের উপপাদ্য যা থেকে কোনো অপেক্ষকের সসীম আকারে টেলর শ্রেণীতে বিস্তৃতি পাওয়া যায়। ঠিক তেমনি সমাকলনবিদ্যার কয়েকটি মধ্যমমান উপপাদ্য আমরা আলোচনা করব।

5.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি—

(i) কোনো সমাকলের মান সম্পূর্ণ নির্ণয় না করেও তার ঊর্ধসীমা ও নিম্নসীমা নির্ণয় করতে পারবেন।

(ii) অনুরূপভাবে দুইটি সমাকলনযোগ্য অপেক্ষকের গুণফলের সমাকলকে একটি অপেক্ষকের সমাকলের সাপেক্ষে প্রকাশ করতে পারবেন।

5.3 প্রাসঙ্গিক ধারণাসমূহ

আপনারা জানেন যে নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে একটি সমাকলের মান একটি বিশেষ ক্ষেত্রফলের মানকে প্রকাশ করে। এই ক্ষেত্রটিকে যদি আয়তাকার ক্ষেত্র হিসাবে গণ্য করেন যার একটি বাহু x-অক্ষের উপর সমাকলের নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে অবস্থিত এবং অপর বাহুটি y-অক্ষের দিকে, তবে y-অক্ষের সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্যটিই সমাকলের অপেক্ষকের মধ্যমমান।

15.4 সমাকলনবিদ্যার প্রথম মধ্যমমান উপপাদ্য

'f' ও 'g' দুটি অপেক্ষক $[a, b]$ অন্তরে সমাকলনযোগ্য। M ও m যদি ঐ অন্তরে 'f' এর যথাক্রমে ল. উ. সী ও গ. নি. সী হয় এবং ঐ অন্তরে 'g' এর চিহ্নের যদি কোনো পরিবর্তন না ঘটে তবে এমন একটি বাস্তব সংখ্যা μ পাওয়া যাবে যাতে—

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

প্রমাণ ঃ যেহেতু $[a, b]$ অন্তরে 'f' ও 'g' উভয়েই সমাকলনযোগ্য এদের গুণফল 'fg' অপেক্ষকটিও ঐ অন্তরে সমাকলনযোগ্য। যেহেতু $g(x)$ এর চিহ্ন অপরিবর্তিত, প্রমাণের সুবিধার জন্য ধরে নিন।

$g(x) \geq 0, \ \forall \ x \in [a, b]$ [যদি $g(x) < 0$ হয় তাহলে $-g(x)$ ধরে প্রমাণটি একই রকম হবে]

$P : (a = x_0 < x_1 < \ldots < xn = b)$ যদি $[a, b]$ অন্তরের যেকোনো বিভাজন হয় এবং

$\xi_r \in [x_{r-1}, x_r]$ তাহলে $m \leq f(\xi_r) \leq M$

অথবা, $mg(\xi_r) \leq f(\xi_r)g(\xi_r) \leq Mg(\xi_r)$

অথবা, $m\sum_{r=1}^{n} g(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) \leq \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)g(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) \leq M\sum_{r=1}^{n} g(\xi_r)(x_r - x_{r-1})$

এখন $\| P \| \to 0$ করলে দার্বোর উপপাদ্য অনুসারে পাওয়া যাবে

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

যেখানে m থেকে M এর মধ্যে μ একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা।

টীকা ঃ $\int_a^b g(x)dx = 0$ **হলে** $\int_a^b f(x)g(x)dx$ এর মানও শূন্য হবে। তখন এটি μ এর উপর নির্ভর করবে না অর্থাৎ μ এর m থেকে M পর্য্যন্ত ($m \le \mu \le M$) সকল বাস্তব মানের জন্য উপপাদ্যটি সত্য।

অনুসিদ্ধান্ত—1 : উপপাদ্যে যা যা শর্ত আরোপ করা হয়েছে তা ছাড়াও যদি $[a, b]$ অন্তরে 'f' অবিচ্ছিন্ন হয় তবে ঐ অন্তরে এমন একটি বিন্দু ξ পাওয়া যাবে যাতে $\mu = f(\xi)$ হবে .... [অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষকের ধর্মানুসারে] সুতরাং তখন সম্পর্কটি দাঁড়ায়

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

অনুসিদ্ধান্ত—2 : $[a, b]$ অন্তরে 'f' যদি সমাকলনযোগ্য হয় তবে 'f' এর সীমাদ্বয়ের মধ্যে এমন একটি সংখ্যা 'μ' পাওয়া যাবে যে,

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

এখানেও আবার যদি 'f' অবিচ্ছিন্ন হয় তবে এমন একটি বিন্দু $\xi \in [a, b]$ পাওয়া যাবে যে

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$$

প্রাসঙ্গিক ধারণা অনুযায়ী এই 'μ' বা '$f(\xi)$' সমাকলের অপেক্ষক '$f(x)$' এর মধ্যমমান।

5.5 দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য

এই উপপাদ্য নিয়ে আলোচনার জন্য আপনাদের একটি বিশেষ অসমতা জানা প্রয়োজন। এই অসমতাটির নাম আবেলের প্রতিজ্ঞা। আমরা প্রথম এই আবেলের প্রতিজ্ঞাটিই প্রমাণ করব।

আবেলের প্রতিজ্ঞা—

$\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ ও $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ যদি দুটি সসীম বাস্তব সংখ্যার সেট হয় যা নীচের এই শর্তগুলিকে পূরণ করে—

(i) $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \dots a_n \ge 0$

এবং (ii) A ও B এমন দুটি বাস্তব সংখ্যা যে

$$A \le v_1 + v_2 + \dots v_p \le B \ (p = 1, 2, \dots n)$$

তাহলে $Aa_1 \le a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n \le Ba_1$ হবে।

প্রমাণ ঃ মনে করুন $Sp = v_1 + v_2 + \dots + v_p$ ($p = 1, 2, \dots n$) তাহলে $v_1 = s_1$

$v_2 = s_2 - s_1$, $v_3 = s_3 - s_2 \dots$ এবং $v_n = s_n - s_{n-1}$

আবার, $S = a_1v_1 = a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$

$$= a_1s_1 + a_2(s_2 - s_1) + \ldots + a_n(s_n - s_{n-1})$$

$$= s_1(a_1 - a_2) + s_2(a_2 - a_3) + \ldots +$$

$$s_{n-1}\ (a_{n-1} - a_n) + s_na_n.$$

প্রদত্ত শর্তগুলির প্রথমটি থেকে বলা যায় এই রাশিটি অঋণাত্মক এবং যেহেতু $p = 1, 2, \ldots, n$ প্রভৃতি সকল মানের জন্য

$$A \leq S_P \leq B$$

অতএব, $S \geq A[(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots (a_{n-1} - a_n) + a_n]$

$$\geq Aa_1.$$

অনুরূপভাবে, $S \geq B[(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots (a_{n-1} - a_n) + a_n]$

$$\geq Ba_1.$$

উল্লিখিত দুটি অসমীকরণকে একসাথে লেখা যায়

$$Aa_1 \leq S \leq Ba_1$$

অর্থাৎ, $Aa_1 \leq a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n \leq Ba_1$

এবার দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্যটি প্রমাণ করা হবে।

বিবৃতি—$[a, b]$ অন্তরে অপেক্ষক 'f' যদি সমাকল্য এবং 'g' যদি ক্রমমান হয় তাহলে ঐ অন্তরে এমন একটি বিন্দু ξ পাওয়া যাবে যার জন্য

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)dx$$

প্রথমে, ধরা যাক $[a, b]$ অন্তরে ϕ একটি ক্রমহ্রাসমান অঋণাত্মক অপেক্ষক। তাহলে ঐ অন্তরে $f\phi$ অপেক্ষকটি অবশ্যই সমাকল্য হবে।

ধরুন $(P : a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_n = b)$ $[a, b]$ অন্তরের একটি বিভাজন ξ_r, $[x_{r-1}, x_r]$ উপান্তরে একটি যে কোনো বিন্দু এবং $\xi_1 = a$

M_r ও m_r যদি ঐ উপান্তরে 'f' এর যথাক্রমে ল.ঊ.সী ও গ.ণি.সী হয় তবে

$$m_r \leq f(x) \leq M_r,\ \forall x \in [x_{r-1}, x_r]$$

অর্থাৎ $m_r\ (x_r - x_{r-1}) \leq \int_{x_{r-1}}^{x_r} f(x)dx \leq M_r(x_r - x_{r-1})$

$r = 1, 2, \ldots\ldots \mu(\mu < n)$ প্রভৃতি মানের জন্য সমষ্টি করে পাই

$$\sum_{r=1}^{\mu} m_r(x_r - x_{r-1}) \leq \int_a^{x_\mu} f(x)dx \leq \sum_{r=1}^{\mu} M_r(x_r - x_{r-1}) \qquad \ldots \qquad (1)$$

আবার যেহেতু

$$m_r \leq f(\xi_r) \leq Mr$$

$$\sum_{r=1}^{\mu} m_r(x_r - x_{r-1}) \le \sum_{r=1}^{\mu} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) \sum_{r=1}^{\mu} M_r(x_r - x_{r-1}) \qquad \ldots \qquad (2)$$

(1) ও (2) অসমীকরণ থেকে পাই,

$$\left| \int_0^{\mu} f(x)dx - \sum_{r=1}^{\mu} f(\xi r)(x_r - x_{r-1}) \right|$$

$$\le \sum_{r=1}^{\mu} (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1}) \le \sum_{r=1}^{n} (M_r - m_r)(x_r - x_{r-1})$$

$= \sigma P$ ধরুন

অর্থাৎ $\left| \int_a^{\mu} f(x)dx - \sum_{r=1}^{\mu} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) \right| \le \sigma_P$

অর্থাৎ $\int_a^{\mu} f(x)dx - \sigma_P \le \sum_{r=1}^{\mu} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1})$

$$\le \int_a^{x_p} f(x)dx + \sigma_P \qquad \ldots(3)$$

এখন 'f' যেহেতু $[a, b]$ অন্তরে সমাকল্য, $\int_a^x f(x)dx$ একটি অবিচ্ছিন্ন অপেক্ষক, কাজেই $[a, b]$ সীমাবদ্ধ। মনে করুন A ও B যথাক্রমে $\int_a^x f(x)dx$ গ.নি.সী ও ল.উ.সী তাহলে (3) নং অসমীকরণ থেকে পাই

$$A - \sigma_p \le \sum_{r=1}^{\mu} f(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) \le B + \sigma_P$$

ধরুন $a_r = \phi(\xi r)$ এবং $v_r = f(\xi_r)\ (x_r - x_{r-1})$

তাহলে $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots\ldots \ge a_n \ge 0$.

এবং $A - \sigma_p \le v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_\mu \le B + \sigma_p,\ \mu = 1, 2 \ldots\ldots n$.

সুতরাং আবেলের প্রতিজ্ঞা অনুসারে পাই

$(A - \sigma_p)\ a_1 \le a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$.

$\le (B + \sigma_p)\ a_1$

অর্থাৎ $(A - \sigma_p)\ \phi(a) \leq \sum_{r=1}^{\mu} \phi(\xi_r) f(\xi_r)(x_r - x_{r-1})$

$$\leq (B + \sigma_p)\ \phi(a)$$

এখন যেহেতু $[a, b]$ অন্তরে f ও $f\phi$ সমাকল্য

$$\lim_{\|p\|\to 0}(A - \sigma_p)\phi(a) \leq \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{r=1}^{n} \phi(\xi_r) f(\xi_r)(x_r - x_{r-1}) \leq \lim_{\|p\|\to 0}(B + \sigma_p)\phi(a)$$

অর্থাৎ $A\phi(a) \leq \int_a^b f(x)\ \phi\ (x)\ dx \leq B\phi(\mathrm{a})$ $\quad [\ \sigma_P \to 0$ যখন $\|\ p\ \| \to 0]$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\ \phi(x)\ dx = \lambda\phi(a)$$

যেখানে $A \leq \lambda \leq B$

যেহেতু $[a, b]$ অন্তরে $\int_a^x f(x)\ dx$ অবিচ্ছিন্ন অতএব এমন একটি বিন্দু 'ξ' পাওয়া যাবে যাতে $\int_a^\xi f(x)dx = \lambda$.

$$\therefore \quad \int_a^\xi f(x)\phi(x)dx = \phi(a)\int_a^\xi f(x)dx \quad \ldots \quad (4)$$

এটি হল বনেটের দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য।

এখন ধরুন $[a, b]$ অন্তরে g, ক্রমহ্রাসমান। $[a, b]$ অন্তরে প্রত্যেক বিন্দু 'x' এর জন্য ϕ অপেক্ষকটিকে যদি এভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়

$$\phi(x) = g(x) - g(b)$$

তাহলে ϕ ক্রমহ্রাসমান ও অঋণাত্মক অপেক্ষক হয়।

অতএব সমীকরণ (4) ব্যবহার করলে, বলতে পারেন,

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = \phi(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

অর্থাৎ $\int_a^b f(x)[g(x) - g(b)\}dx = [g(a) - g(b)]\int_a^\xi f(x)dx$.

অথবা $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_a^b f(x)dx - g(b)\int_a^\xi f(x)dx$.

অথবা $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$

তাহলে 'g' অপেক্ষকটিকে ক্রমহ্রাসমান ধরে দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণিত হল। কিন্তু উপপাদ্যের বিবৃতিতে বলা আছে যে $g(x)$ ক্রমমান হলেই উপপাদ্যটি সত্য হবে। কাজেই এখন ধরুন $[a, b]$ অন্তরে $g(x)$ ক্রমবর্ধমান। তাহলে ঐ অন্তরে $g(x)$ ক্রমহ্রাসমান।

সুতরাং আগের সমীকরণ থেকে বলতে পারেন

$$\int_a^b f(x)[-g(x)]dx = [-g(a)]\int_a^{\xi} f(x)dx + [-g(b)]\int_{\xi}^b f(x)dx$$

বা, $$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx$$

এই সমীকরণটিই ভায়ারষ্ট্রাসের দ্বিতীয় মধ্যমান উপপাদ্য নামে পরিচিত।

উদাহরণ-1.

$[-1, 1]$ অন্তরে xe^x এর জন্য সমাকলনের প্রথম মধ্যমমান উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণ করুন।

সমাধান ঃ

মনে করুন

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x \\ \text{এবং } g(x) &= e^x \end{aligned}\right\} x \in [-1, 1]$$

অতএব দুটি অপেক্ষকই সন্তত কাজেই সমাকলন যোগ্য। 'f' এর উর্ধ ও নিম্নসীমা হল যথাক্রমে 1 ও -1

এখন $$\int_1^1 xe^x dx = \left[xe^x - e^x\right]_{-1}^1 = \left[(x-1)e^x\right]_{-1}^1 = \frac{2}{e}$$

আবার $$\int_{-1}^1 e^x dx = \left[e^x\right]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$$

প্রথম মধ্যমমান উপপাদ্য অনুসারে এমন একটি বাস্তব সংখ্যা ξ পাওয়া যাবে যাতে

$$\int_{-1}^1 xe^x dx = \xi\int_{-1}^1 e^x dx \text{ হয়}$$

অর্থাৎ $\frac{2}{e} = \xi\left(e - \frac{1}{e}\right) = \frac{\xi}{e}(e^2 - 1)$

বা, $\xi = \frac{2}{e^2 - 1}$

আপনারা নিশ্চয় জানেন 'e' একটি বাস্তব সংখ্যা যার মান 2 এর চেয়ে বড়

$\therefore \quad e^2 > 4.$

বা, $e^2 - 1 > 3 > 0$

$\therefore \quad \frac{2}{e^2 - 1} < \frac{2}{3} < 1$

কাজেই $0 < \xi = \frac{2}{e^2 - 1} < 1$

অর্থাৎ $-1 < \xi < 1.$

কাজেই উপরোক্ত দুটি অপেক্ষকের জন্য প্রথম মধ্যমমান উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণ হল।

উদাহরণ-2.

যদি $0 < a < b$ তবে দেখান যে

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} \right| \le \frac{2}{a}$$

যেহেতু $\frac{1}{x}$ একটি ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক এবং $\sin x$ $[a, b]$ অন্তরে সমাকল্য অতএব বনেট আকারে দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য অনুসারে—

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{a} \int_a^{\xi} \sin x \, dx = \frac{1}{a}(\cos a - \cos \xi)$$

$$\therefore \quad \left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| = \frac{1}{a} |\cos a - \cos \xi| \le \frac{1}{a}[|\cos a| + |\cos \xi|]$$

$$\le 2/a.$$

উদাহরণ-3

$[\pi, 2\pi]$ অন্তরে $x \sin x$ এর জন্য ডায়ারষ্ট্রাসের দ্বিতীয় মধ্যমান উপপাদ্যের সত্যতা প্রমাণ করুন।

সমাধান ঃ

মনে করুন $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$, $x \in [\pi, 2\pi]$

তাহলে $[\pi, 2\pi]$ অন্তরে $g(x)$ একটি ক্রমমান অপেক্ষক এবং $f(x)$ ঐ অন্তরে সমাকল্য। অতএব ডায়ারষ্ট্রাসের দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্যের সকল শর্তই পূরণ হচ্ছে।

এখন $$\int_{\pi}^{2\pi} x \sin x\, dx = [-x\cos x]_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos x\, dx$$

$$= -2\pi - \pi = -3\pi \quad \left[\because \int_{\pi}^{2\pi} \cos x\, dx = 0\right]$$

আবার $$g(\pi)\int_{\pi}^{\xi} f(x)dx + g(2\pi)\int_{\xi}^{2\pi} f(x)dx.$$

$$= \pi\int_{\pi}^{\xi} \sin x dx + 2\pi\int_{\xi}^{2\pi} \sin x\, dx.$$

$$= \pi\ (\cos \pi - \cos \xi) + 2\pi\ (\cos \xi - \cos 2\pi)$$

$$= -\pi - 2\pi + \pi \cos \xi = -3\pi + \pi \cos \xi$$

দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য অনুসারে

$$\int_{\pi}^{2\pi} x \sin x\, dx = \pi\int_{\pi}^{\xi} \sin x\, dx + 2\pi\int_{\xi}^{2\pi} \sin x\, dx$$

অর্থাৎ $-3\pi = -3\pi + \pi \cos \xi$

এটি তখন সম্ভব যদি $\xi = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ হয়।

কাজেই $[\pi, 2\pi]$ অন্তরে ξ এর একটি বাস্তব মান আছে যার জন্য উপরের সমীকরণটি সত্য।

অনুশীলনী

1. সমাকলের প্রথম মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে দেখান যে

   (i) $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x,\ x > 0$

   (ii) $x < \log\frac{1}{1-x} < \frac{x}{1-x},\ 0 < x < 1$

2. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ অন্তরে $x^2 \cos x$ এর জন্য বনেটের দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য কি সিদ্ধ হয়? উত্তরের সমর্থনে যুক্তি দেখান।

3. যদি $[a, b]$ অন্তরে $f(x) = 2x + k$ হয় যেখানে 'k' একটি ধ্রুবক তবে

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)\, f(a + \theta(b - a))$$

এই সম্পর্কটি থেকে 'θ'-র মান নির্ণয় কর।

4. মনে করুন 'k' একটি বাস্তবসংখ্যা যাতে $0 < k^2 < 1$ হয়, প্রথম মধ্যমমান উপপাদ্যের সাহায্যে দেখান যে

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2\xi^2}} \int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x^2},\ \ 0 \le \xi \le \frac{1}{2}$$

এ থেকে প্রমাণ করুন

$$\frac{\pi}{6} \le \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \le \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-k^2}}$$

5. ভায়ারষ্ট্রাস আকারে দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখান যে—

$$\left|\int_a^b \sin x\, dx\right| < \frac{4}{a},\ 0 < a < b$$

6. সমাকলনের সাহায্যে প্রদত্ত অন্তরে নীচের অপেক্ষকগুলির মধ্যমমান নির্ণয় করুন : $[a, b \neq 0]$

(i) $f(x) = a + b \cos x \quad : -\pi \le x \le \pi$

(ii) $f(x) = x^2 \quad : 0 \le x \le 1$

5.6 সারাংশ

এখানে 5.4-এ সমাকলনবিদ্যার মধ্যমমান উপপাদ্য দেওয়া হল। 5.5-এ আছে দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য। এর দুটি গঠন ভায়ারস্ট্রাস ও বনেট আপনারা এতে পাবেন।

5.7 সংকেতসহ অনুশীলনীর উত্তরমালা

2. উত্তর : $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ অন্তরে x^2 ও $\cos x$ উভয় অপক্ষেকই অবিচ্ছিন্ন কাজেই সমাকল্য। কিন্তু কোন অপেক্ষকই ক্রমমান নয়। বনেটের উপপাদ্যের জন্য একটি অপেক্ষক ক্রমহ্রাসমান হওয়া দরকার।

   $\therefore$ বনেটের দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য এক্ষেত্রে প্রযোজ্য নয়।

3. $\theta = \frac{1}{2}$

4. প্রথম মধ্যমমান উপপাদ্যটি পড়ুন। এবার চেষ্টা করুন।

5. উদাহরণ-2 (একক-5)-এর মত করে ভাবুন।

6. (i) $\mu = a = f\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$

   (ii) $\mu = \frac{1}{3} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

5.8 সহায়ক গ্রন্থ

1. S.M. Nikolskii : A course in mathematical analysis, Vol-I (Mir Publisher, Moscow)

একক 6 ❑ বহুচল অপেক্ষকের রিমান সমাকল

গঠন

6.1 প্রস্তাবনা

একচল বিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে সমাকলনের সংজ্ঞা ও তার বিভিন্ন ধর্মাবলী সম্বন্ধে আপনারা আগের পাঠ্যাংশ থেকে জানতে পেরেছেন। বহুচল বিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে এই সংজ্ঞা এবং তার ধর্মাবলী সম্বন্ধে এখানে আলোচনা করা হবে।

6.2 উদ্দেশ্য

এই একক পাঠ করে আপনি

- কোনো বদ্ধ অন্তরালে কোনো সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের রিমান মতে সমাকলনের ধারণা কেমন

করে কোনো বন্ধ অঞ্চলে বা বন্ধ আয়তনে সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের সমাকলনের ক্ষেত্রে উন্নীত করা যায় তা জানতে পারবেন।

- কেমন করে কোনো বন্ধ অঞ্চলে, বন্ধ আয়তনে বা কোনো বহুমাত্রিক বন্ধ স্থানে সীমাবদ্ধ কোনো অপেক্ষকের সমাকলনকে কয়েকটি রৈখিক সমাকলের পরম্পরায় পরিণত করা যায় তাও জানতে পারবেন।

6.3 প্রাসঙ্গিক ধারণা সমূহ

আপনারা মনে করে দেখুন কোনো বন্ধ অন্তরে কোনো সীমাবদ্ধ অপেক্ষকের সমাকলনের ফলে একটি বিশেষ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়। ঠিক তেমনি কোনো দ্বিচলবিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে অনুরূপ সমাকলনের ফলে একটি বিশেষ আয়তনের পরিমাপ পাওয়া যাবে।

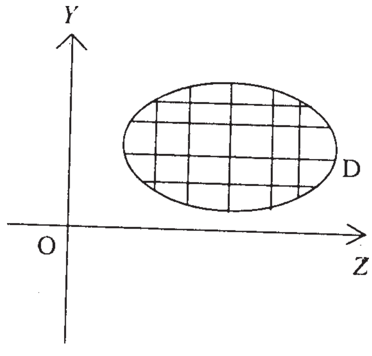
আলোচনা যাতে অহেতুক জটিল না হয়ে পড়ে সেজন্য প্রথমে সমতলের উপর সমাকলই গণ্যকরা হবে। অর্থাৎ ধরে নেওয়া হবে অপেক্ষকটি দ্বিচলবিশিষ্ট।

6.4 দ্বিচল-বিশিষ্ট অপেক্ষকের সমাকলের সংজ্ঞা

মনে করুন x ও y দুটি স্বাধীন বাস্তব চলরাশি এবং D, xy তলে একটি বন্ধ অঞ্চল। এখন $f(x, y)$ কে সংজ্ঞায়িত করা হল—

$f : D \to R$

এবার D অঞ্চলটিকে কয়েকটি নির্দিষ্টসংখ্যক বিচ্ছিন্ন সীমাবদ্ধ অঞ্চলে ভাগ করা হল। ধরুন এই অঞ্চলগুলি হল। $D_1, D_2 \ldots\ldots D_N$। মনে করুন '$f$' একটি সীমাবদ্ধ অপেক্ষক এবং যদি M_i ও m_i যথাক্রমে D_i অঞ্চলে 'f' এর ঊর্ধ্ব ও নিম্নসীমা হয় তবে $m_iA(D_i)$ হল একটি চোঙাকৃতি খণ্ডের আয়তন যে চোঙের ভূমির ক্ষেত্রফল $A(D_i)$ এবং উচ্চতা m_i। স্পষ্টতই বুঝতে পারছেন 'i' এর বিভিন্ন মানের জন্য যে বিভিন্ন চোঙাকৃতি খণ্ডগুলি পাওয়া যাবে তারা পরস্পর বিচ্ছিন্ন। অনুরূপভাবে একই ভূমি D_i এর উপর অবস্থিত যদি M_i উচ্চতা বিশিষ্ট চোঙাকৃতি খণ্ড কল্পনা করেন তবে তার আয়তন হল $M_iA(D_i)$ এবং এরাও



বিচ্ছিন্ন, এখন 'i' এর সকল সম্ভাব্য মানের জন্য এই দুটি সমষ্টি $\sum_{i=1}^{N} m_iA(D_i)$ এবং $\sum_{i=1}^{N} M_iA(D_i)$ নির্ণয় করুন।

লক্ষ্য করুন $z = f(x, y)$ একটি তলের সমীকরণ নির্দেশ করে এবং V_D যদি $z = f(x, y)$ এবং $z = 0$ তলদুটি দ্বারা আবদ্ধস্থানের আয়তন বোঝায় তাহলে

$$\sum_{i=1}^{N} m_i A(D_i) \le V_D \le \sum_{i=1}^{N} M_i A(D_i)$$

D এর বিভাজনকে ক্রমশঃ সূক্ষ্ম থেকে সূক্ষ্মতর করে অর্থাৎ 't' এর সব মানের জন্য 'Di' এর সবচেয়ে বড় ব্যাসার্দ্ধ যদি শূন্যের দিকে এগোয় তবে

$max\ (M_i - m_i) \to 0$

যেহেতু

$$\sum_{i=1}^{N} M_i A(D_i) - \sum_{i=1}^{N} m_i A(D_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (M_i - m_i) A(D_i)$$

$$\le \max_i (M_i - m_i) \sum_{i=1}^{N} A(D_i)$$

$$= \max_i (M_i - m_i) A(D)$$

$$\to 0$$

$\therefore \quad \sum_{i=1}^{N} M_i A(D_i), \sum_{i=1}^{N} m_i A(D_i)$ এই দুটি সমষ্টির সীমাস্থমান সমান।

$$\therefore \quad V_D = \lim_{\max \delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i A(D_i) = \lim_{\max \delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} M_i A(D_i) \qquad \dots \qquad (1)$$

যেখানে δ_1, Di এর বৃহত্তম ব্যাসার্দ্ধ।

আবার দেখুন $\sum_{i=1}^{N} M_i A(D_i)$ এবং $\sum_{i=1}^{N} m_i A(D_i)$ এই সমষ্টিদ্বয়ের মান অবশ্যই 'D' অঞ্চলের বিভাজনের ধরনের উপর নির্ভরশীল। উপরে বর্ণিত ঐ বিশেষ বিভাজনটিকে যদি 'P' বলেন এবং 'D' অঞ্চলের সকল বিভাজনের সেটটিকে যদি Δ বলেন তাহলে $s_P = \sum_{i=1}^{N} m_i A(D_i)$ এবং $S_P = \sum_{i=1}^{N} M_i A(D_i)$ হলো 'D' অঞ্চলের 'P' বিভাজনের জন্য যথাক্রমে 'f' এর নিম্ন ও ঊর্ধসমষ্টি। যদি M ও m ঐ অঞ্চলে 'f' এর ল.উ.সী ও গ.ণি.সী হয় তবে স্পষ্টতই।

$$mA\ (D) \le s_p \le S_p \le MA\ (D)$$

(2) নং সমীকরণ থেকে বোঝা যাচ্ছে ... (2)

$\{s_p : P \in \Delta\}$ এবং $\{S_p : P \in \Delta]$ সেট দুটি সীমাবদ্ধ।

s_p সেটের ল.উ.সীমা ও S_P সেটের গ.ণি.সীমাকে যদি L ও U নামে অভিহিত করা হয় তবে L কে D অঞ্চলে 'f' এর নিম্ন সমাকল এবং 'U' কে ঐ একই অঞ্চলে 'f' এর ঊর্ধ্ব সমাকল বলা হয়।

একচলবিশিষ্ট অপেক্ষকের সাথে সাদৃশ্য রেখে একইরকম ভাবে বলতে পারেন

$$L = \underline{\iint_D} f(x, y)dD \text{ এবং } U = \overline{\iint_D} f(x, y)dD.$$

যদি $L = U = 1$ হয় তবে বলা হয় 'D' অঞ্চলে 'f' অপেক্ষকটি রিমান মতে সমাকলন যোগ্য

এবং $I = \iint_D f(x, y)dD$ ... (3)

(1) নং সমীকরণ থেকে আরও বলা যায়

$$mA(D) \le 1 \le MA(D)$$

সংজ্ঞা দেবার এই প্রক্রিয়া থেকেই বুঝতে পারছেন f এর অন্তর্গত চলরাশির সংখ্যা আরও বেশি হলেও একইভাবে রিমান সমাকলের ধারণাকে উন্নীত করা যাবে। যেমন $f(x, y, z)$ এই সীমাবদ্ধ অপেক্ষকটির জন্য বলতে পারেন

$$I = \iiint_D f(x, y)dD$$

কিন্তু মনে রাখতে হবে যে এখানে 'D' একটি ত্রিদেশীয় অঞ্চল এবং সমাকলনের প্রক্রিয়া ঘটানো হচ্ছে 'D' আয়তনের উপর। এইভাবে আপনারা যে কোনো সসীম সংখ্যক চলরাশি বিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে রিমান সমাকলনের ধারণাকে উন্নীত করতে পারেন।

একচল বিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রে যেমন দার্বোর উপপাদ্য প্রমাণ করেছেন ঠিক একইরকমভাবে এখানেও প্রমাণ করতে পারেন

$$\iint_D f(x, y)dD = \lim_{\max \delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} m_i A(D_i) = \lim_{\max \delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} M_i A(D_i) \quad \ldots \quad (4)$$

তাহলে সমীকরণ (1) ও (4) একত্র করে বলতে পারি

$$V_D = \iint_D f(x, y)dD \quad \ldots \quad (5)$$

আবার 'D' অঞ্চলে দ্বিচলবিশিষ্ট অপেক্ষকের সমাকলকে $\iint_D f(x, y)dxdy$ দিয়েও চিহ্নিত করা

যায়। যেহেতু সমাকলনে চলরাশিকে অন্য যে কোনো চলরাশি দিয়ে প্রতিস্থাপিত করা যায়, তাই বলতে পারেন—

$$\int\int_D f(x, y)dxdy \int\int_D f(u, v)dudv$$

6.5 দ্বিচল সমাকলের ধর্মাবলী

একচল বিশিষ্ট অপেক্ষকের মতো দ্বিচলবিশিষ্ট অপেক্ষকের ক্ষেত্রেও নীচের নিয়মগুলি প্রযোজ্য।

1. $\int\int_D Cf(x, y)dxdy = C\int\int_D f(x, y)dxdy, C$ একটি ধ্রুবক

2. $\int\int_D [Af(x, y) + B\phi(x, y)]dxdy = A\int\int_D f(x, y)dxdy + B\int\int_D \phi(x, y)dxdy$ [রৈখিক ধর্ম]

3. $\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f(x, y)dxdy + \iint_{D'} f(x, y)\,dxdy$

   যেখানে $D = D' \cup D''$

4. $f(x, y)$ এবং $\phi(x, y)$ উভয় অপেক্ষকই যদি 'D' অঞ্চলে সমাকলন যোগ্য হয় তবে $f(x, y)\ \phi(x, y)$ অপেক্ষকটিও 'D' অঞ্চলে সমাকলনযোগ্য।

5. 'D' অঞ্চলের সব বিন্দুর জন্য যদি $f(x, y) \geq \phi(x, y)$ হয় তাহলে

   $\iint_D f(x, y)\,dxdy \geq \iint_D \phi(x, y)\,dxdy$.

   উপরের ধর্মটিকে আবার অন্যভাবেও বলা যেতে পারে ; যথা—

   যদি 'D' অঞ্চলের সব বিন্দু $f(x, y) - \phi(x, y) \geq 0$ হয় তবে $\iint_D [f(x, y) - \phi(x, y)]dxdy \geq 0$

হবে।

একটি বিশেষ উদাহরণ—

যদি 'D' অঞ্চলের সর্বত্র $f(x, y) = 1$ হয় তবে

$\iint_D f(x, y)dxdy - A(D)$

এক্ষেত্রে সমাকলের মান 'D' ভূমিবিশিষ্ট একক উচ্চতার একটি চোঙের আয়তনকে নির্দেশ করে।

উপরের সব ধর্মগুলিকে রৈখিক সমাকলের মত ঠিক একইভাবে প্রমাণ করা যায়। তাই এই প্রমাণগুলি এখানে নতুন করে দেবার প্রয়োজন নেই।

6.6 মধ্যমমান উপপাদ্য

1. m ও M যদি 'D' অঞ্চলে $f(x, y)$ এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান হয়, তবে

$$mA(D) \le \iint_D f(x,y)dxdy \le MA(D)$$

অর্থাৎ, $$\iint_D f(x,y)dxdy \le \mu A(D) \qquad \text{.............(6)}$$

যেখানে, $m \le \mu \le m$

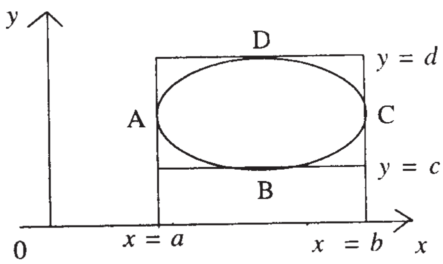
এখন $f(x, y)$ যদি সন্তত হয় তবে 'D' অঞ্চলে এমন একটি বিন্দু ξ, n থাকবে যাতে

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta)A(D)$$ হয়

$f(\xi,\eta)$ সংখ্যাটিকে D অঞ্চলে $f(x, y)$ এর মধ্যমমান বলে।

6.7 দ্বিচল সমাকলকে রৈখিক সমাকলে রূপান্তর

ধরুন xy সমতলের 'D' অঞ্চলে $f(x, y)$ একটি সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক। আরও মনে করুন 'D' অঞ্চলটিকে একটি আয়তাকার ক্ষেত্রে $(a \le x \le b)$, $(c \le y \le d)$ আবদ্ধ করা হল। a, b যথাক্রমে 'D' অঞ্চলে 'x' এর এবং c, d, y এর লঘিষ্ঠ ও গরিষ্ঠ মান। (পাশের ছবিটি লক্ষ্য করুন) এখন 'x' এর কোনো বিশেষ মানের জন্য $f(x, y)$ কে শুধুমাত্র 'y' এর অপেক্ষক বলে গণ্য করা যেতে পারে। সেই একচলবিশিষ্ট 'y' -এর অপেক্ষকটি যদি $[c, d]$ অন্তরে রিমান মতে সমাকলনযোগ্য হয় তবে,



$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = g(x).$$ ধরুন

এবার, $\int_a^b g(x)dx$ এর মান নির্ণয় করলেই $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ এর মান পাওয়া যাবে।

অর্থাৎ, $$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

অনুরূপভাবে $f(x, y)$ কে y-এর বিশেষ মানের জন্য শুধুমাত্র 'x' এর অপেক্ষক হিসাবে গণ্য করলে বলতে পারেন

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

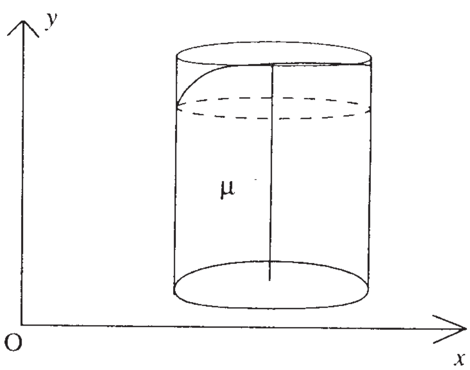
যেখানে $y = y_1(x)$ ABC রেখার, $y = y_2(x)$ ADC রেখার $x = x_1(y)$ BAD রেখার এবং $x_2 = x_2(y)$ BCD রেখার সমীকরণ।

এইভাবে একটি দ্বিতল সমাকলকে দুটি রৈখিক সমাকলের পরম্পরায় রূপান্তরিত করা যায়। অনুরূপভাবে একটি ত্রিতল সমাকলকে প্রথমে একটি রৈখিক ও একটি দ্বিতল পরে দ্বিতলটিকে দুটি রৈখিক সমাকলে রূপান্তরিত করে অবশেষে ত্রিতল সমাকলকে তিনটি রৈখিক সমাকলের পরম্পরায় রূপান্তরিত করা যায়।

অর্থাৎ, $$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b [\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} [\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz]dy]dx$$

6.8 দ্বিতল সমাকলের জ্যামিতিক তাৎপর্য

একচল বিশিষ্ট অপেক্ষকের সমাকল বা রৈখিক সমাকল যেমন $\int_a^b f(x)dx$, $y = f(x)$, $x = a$ ও $x = b$ রেখা দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে নির্দেশ করে একথা আপনারা আগেই জেনেছেন। তেমনি $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ এই দ্বিতল সমাকলটি 'D' ভূমিবিশিষ্ট একটি চোঙের আয়তনকে নির্দেশকরে যার উন্নতা (x, y) বিন্দুতে $f(x, y)$। এই আয়তন যদি 'D' ভূমিবিশিষ্ট কোনো সমোচ্চ চোঙের আয়তনের সমান হয় তবে সেই উচ্চতাকে 'D' অঞ্চলে $f(x, y)$ এর মধ্যমমান বলে। যেমন সমীকরণ 6-এ 'μ' হল D অঞ্চলে $f(x, y)$ এর মধ্যমমান।



6.9 সমাকলের পরিবর্ত প্রক্রিয়া (Transformation of areas & integrals)

সমাকলের সুবিধার্থে অনেক সময় অপেক্ষকের স্বাধীন চলরাশিকে অন্য কোন চলরাশি দ্বারা

প্রতিস্থাপিত করতে হয়। রৈখিক সমাকলের ক্ষেত্রে এই পরিবর্ত প্রক্রিয়ার সাথে আপনারা আগেই পরিচিত হয়েছেন।

মনে করুন (x, y) তল থেকে $(\xi\eta)$ তলে একটি ম্যাপিং হল—

$$T : \xi = f(x, y), \ \eta = g(x, y)$$

যেখানে (i) 'f' ও 'g' অপেক্ষক দুটি 'D' অঞ্চলে সন্তত এবং তাদের প্রথম ধাপ আংশিক অবকল অর্থাৎ f_x, f_y, g_x, g_y এরাও ঐ অঞ্চলে সন্তত।

(ii) 'T'-র জাকোবিয়ান অর্থাৎ $\dfrac{\delta(\xi,\eta)}{\delta(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\delta\xi}{\delta x} & \dfrac{\delta\xi}{\delta y} \\ \dfrac{\delta\eta}{\delta x} & \dfrac{\delta\eta}{\delta y} \end{vmatrix} \neq 0$

(iii) 'T' একটি 1-1 ম্যাপিং।

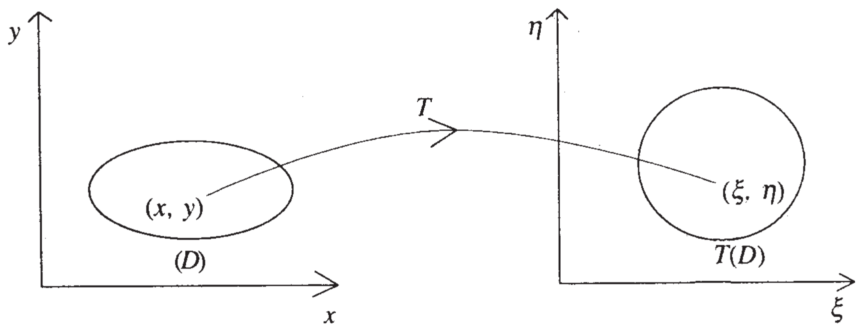
উপরের শর্তগুলি থেকে প্রমাণ করা যায় বিপরীত ম্যাপিং T^{-1}-এর অস্তিত্ব আছে এবং এর জাকোবিয়াম

$$\frac{\delta(x,y)}{\delta(\xi,\eta)} \neq 0$$

এইসব স্বীকার্যের উপর ভিত্তি করে বলতে পারেন

$$\iint_D F(x,y)dxdy = \iint_{T(D)} G(\xi,\eta)\frac{\delta(x,y)}{\delta(\xi,\eta)}d\xi d\eta$$

যেখানে $G(\xi, \eta)$ হল 'T' ম্যাপিঙে 'F' এর প্রতিচ্ছবি এবং $T(D)$ হল 'D' এর প্রতিচ্ছবি।



6.10 পোলার স্থানাঙ্কে দ্বিতল সমাকল

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক থেকে পোলার স্থানাঙ্কে প্রতিস্থাপনের সূত্রটি হল—

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$

এই প্রতিস্থাপনের জাকেরিয়াসটি হল—

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta r} & \frac{\delta x}{\delta \theta} \\ \frac{\delta y}{\delta r} & \frac{\delta y}{\delta \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore \iint_D F(x, y)dxdy = \iint_{T(D)} G(r, \theta)r\,dr\,d\theta$$

উদাহরণ ঃ

1. নীচের সমাকলগুলির মান নির্ণয় করুন

(a) $\iiint_r (x + y + z)dx\,dy\,dz,$ যেখানে Ω হল

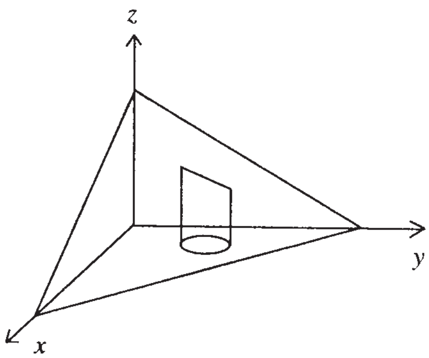
$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ প্রভৃতি স্থানাঙ্ক তল এবং $x + y + z = 1$ সমতলটি দ্বারা বেষ্টিত অঞ্চল।

(b) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy\,dx$ (সমাকলনের অঞ্চলটি উল্লেখ করুন।)

সমাধান ঃ 1*a*.

Ω অঞ্চলে xy সমতলে একটি ক্ষেত্র $dxdy$ কে ভূমি ধরে একটি চোঙ কল্পনা করলে তার উচ্চতা হবে $z = 1 - x - y$.

$\therefore$ Ω অঞ্চলে 'z' এর মান (x, y)-এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য '0' থেকে $(1 - x - y)$ এর মধ্যে থাকবে।



Ω অঞ্চলকে xy সমতলে প্রক্ষেপ করলে

$$\iiint_\Omega (x + y + z)dx\,dy\,dz = \iint_D dxdy \int_0^{1-x-y} (x + y + z)dz$$

হবে, যেখানে 'D', 'xy' সমতলে Ω অঞ্চলের প্রক্ষেপণ, অর্থাৎ $x = 0,\ y = 0$ এবং $x + y = 1$ সরলরেখাগুলি দ্বারা বেষ্টিত ত্রিভুজ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাকল

$$= \iint_D [x + y)(1 - x - y) + \frac{1}{2}(1 - x - y)^2]dx\,dy$$

$$= \iint_D (x + y) - (x + y)^2 + \frac{1}{2}[1 - 2(x + y) + (x + y)^2]\,dx\,dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x+y)^2\right] dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} [1-(x+y)^2]dy$$ [যেহেতু D অঞ্চলে y এর ম্‌ান x এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য 0 থেকে $1 - x$) এর মধ্যে থাকবে]

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[y - \frac{1}{3}(x+y)^3\right]_0^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 [(1-x) - \frac{1}{3}(1-x^3)]dx$$

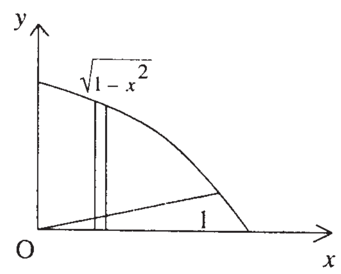
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{2}{3} - x + \frac{1}{3}x^3\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{8}.$$

সমাধান ঃ 1b.

এক্ষেত্রে D : অর্থাৎ সমাকলের অঞ্চলটি হলো $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্তটির ধনাত্মক চতুর্থাংশ।

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dx dx$$



$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{3/2} dx.$$

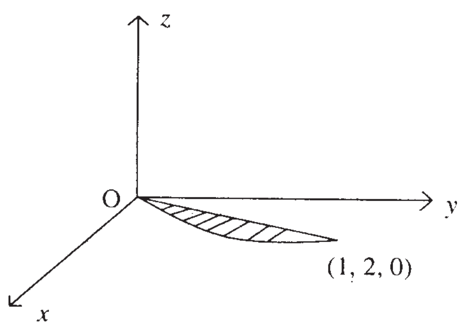
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta,$$ যেখানে $x = \sin\theta$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}.$$

2. xy তলে $y = 2x$ এবং $y = 2x^2$ রেখাদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত স্থানের উপরিভাগে $z = 7 - 3x^2 - y^2$ তল দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের আয়তন নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ দ্বিতল সমাকলের জ্যামিতিক তাৎপর্য থেকে একথা নিশ্চয়ই বুঝতে পারছেন যে নির্ণেয় আয়তনটি হবে—

$$\int_0^1 \int_{2x^2}^{2x} (7 - 3x^2 - y^2)\,dx\,dy$$



পাশের ছবিতে xy তলে $y = 2x$ এবং $y = 2x^2$ দ্বারা বেষ্টিত স্থানটি চিহ্নিত করা হয়েছে।

এখন $\displaystyle\int_{2x^2}^{2x} (7 - 3x^2 - y^2)\,dy$

$$= \left[7y - 3x^2y - \frac{1}{3}y^3\right]_{2x^2}^{2x}$$

$$= 7(2x - 2x^2) - 3x^2(2x - 2x^2) - \frac{1}{3}[(2x)^3 - (2x^2)^3]$$

$$= 14x - 14x^2 - \left(6 + \frac{8}{3}\right)x^3 + 6x^4 + \frac{8}{3}x^6$$

আবার, $\displaystyle\int_0^1 \left(14x - 14x^2 - \frac{26}{3}x^3 + 6x^4 + \frac{8}{3}x^6\right)dx$

$$= \left[7x^2 - \frac{14}{3}x^3 - \frac{26}{12}x^4 + \frac{6}{5}x^5 + \frac{8}{21}x^7\right]_0^1$$

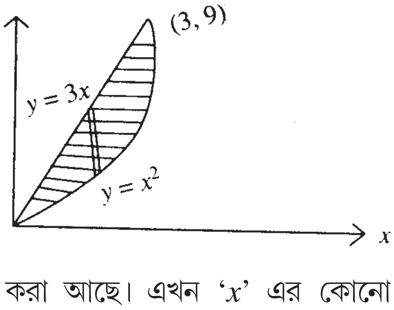
$$= \left(7 + \frac{6}{5} + \frac{8}{21}\right) - \left(\frac{14}{3} + \frac{13}{6}\right)$$

$$= \frac{367}{210}$$

$\therefore$ নির্ণেয় আয়তন $\dfrac{367}{210}$ একক।

3. নীচের সমাকলগুলি নির্ণয় করুন এবং প্রতি ক্ষেত্রে এই মানের জ্যামিতিক ব্যাখ্যা দিন।

$$\iint_D f(x, y)\,dx dy$$



(i) $D : y = x^2,\ y = 3x\ ;\ f(x, y) = x + y$

(ii) $D : y = 2x^2 - 2,\ y = x^2 + x,\ f(x, y) = 2xy$

(iii) $D : y^2 = x,\ x^2 = y,\ f(x, y) = x^2 + 4y^2$

সমাধান ঃ (i) পাশের ছবিটি লক্ষ্য করুন। xy তলে $y = x^2$, $y = 3x$ রেখাদ্বয় দ্বারা বেষ্টিত স্থানটি 'D' চিহ্নিত করা আছে। এখন 'x' এর কোনো

নির্দিষ্ট মানের জন্য 'y' এর মান x^2 থেকে $3x$ পর্য্যন্ত পরিবর্তিত হয় এবং 'D' অঞ্চলে 'x' পরিবর্তিত হতে পারে 0 থেকে 3 পর্য্যন্ত।

$$\therefore \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^3 \left[\int_{\frac{2}{x}}^{3x} (x+y)dy \right] dx.$$

$$= \int_0^3 \left[xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_{x^2}^{3x} dx$$

$$= \int_0^3 \left[x(3x - x^2) + \frac{1}{2}(9x^2 - x^4) \right] dx$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{15}{2}x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right) dx$$

$$= \left[\frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{10}x^5 \right]_0^3$$

$$= \frac{5}{2}.27 - \frac{81}{4} - \frac{243}{10}$$

$$= \frac{1350}{20} - \frac{405}{20} - \frac{486}{20}$$

$$= \frac{1350 - 891}{20} = \frac{459}{20}$$

(ii) ও (iii) অনুশীলনী হিসাবে দেওয়া থাকল।

উত্তর ঃ (ii) $\frac{189}{20}$ (iii) $\frac{3}{7}$.

4. মান নির্ণয় করুন—

$$\iiint_\Omega z dv$$

Ω : $z = x^2 + y^2$ অধিবৃত্তক এবং $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ গোলক দ্বারা বেষ্টিত স্থান।

সমাধান ঃ এখানে বেলনাকার স্থানাঙ্ক (r, θ, z) ব্যবহার করলে সুবিধা হবে। ঐ স্থানাঙ্কে অধিবৃত্তক এবং গোলকটির সমীকরণ হল—

$$z = r^2 \qquad \ldots (1)$$

এবং $r^2 + z^2 = 6 \qquad \ldots (2)$

এদের ছেদতলের সমীকরণ হল—

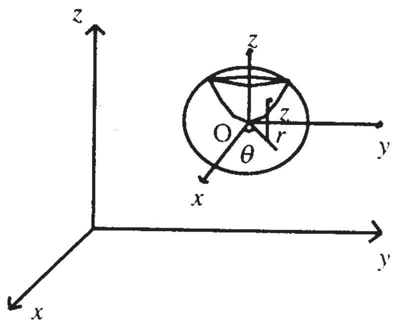
$$z^2 + z - 6 = 0$$

or, $(z + 3)(z - 2) = 0$

$\therefore$ $z = 2$ ($\because$ অধিবৃত্তদের উপর 'z' কখনই ঋণাত্মক নয়)

এখন (1) এবং (2) নং সমীকরণ থেকে বলতে পারেন $r^2 = 2$

অর্থাৎ, $z = 2$ সমতলে $r^2 = 2$ এই বৃত্তাকার রেখাই হল (1) ও (2) এর ছেদতল। এবার সমাকলে r, θ, z এবং সীমাগুলি নির্ণয় করার জন্য লক্ষ্য করুন 'r' এর কোনো বিশেষ মানের জন্য 'z' পরিবর্তিত হচ্ছে r^2 থেকে $\sqrt{6-r^2}$ পর্য্যন্ত। $\theta - 0$ থেকে 2π, $r - 0$ থেকে $\sqrt{2}$



$$\therefore \iiint_{\Omega} z dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{r^2}^{\sqrt{6-r^2}} z dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(6 - r^2 - r^4) dr.$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} (6r - r^3 - r^5) dr$$

$$= \pi\left[3r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{6}r^6\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \pi\left[6 - 1 - \frac{8}{6}\right]$$

$$= \frac{11}{3}\pi.$$

5. $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $z \ge 0$ এই অর্ধগোলকটির ভরকেন্দ্র নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ এখানে গোলকাকার স্থানাঙ্ক (r, θ, ϕ) ব্যবহার করা সুবিধাজনক।

$$x = r \sin\theta \cos\phi \quad y = r \sin\theta \sin\phi \quad z = r\cos\theta.$$

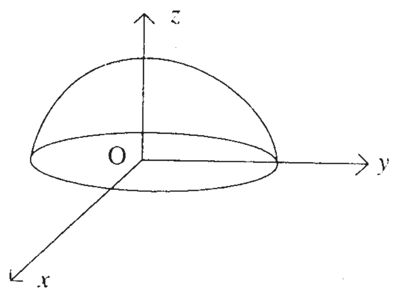
অঞ্চলটির প্রতিসাম্য থেকে নিশ্চয় বুঝতে পারছেন যে ভরকেন্দ্রের x ও y স্থানাঙ্ক '0' হবে। 'z' স্থানাঙ্ক হবে

$$\overline{Z} = \frac{\iiint z dv}{V}$$ [যেখানে V উক্ত অর্ধগোলকের আয়তন]

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r\cos\theta r\sin\theta \, r\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^R r^3 dr$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} 2\pi . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} R^4 = \frac{3}{8} R.$$



অনুশীলনী

1. চিত্রসহ সমাকলের অঞ্চল উল্লেখ করে মান নির্ণয় করুন।

(a) $\int_0^a \int_0^b xy(x^2 - y^2) dy\, dx$

(b) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2}{1 + y^2} dy\, dx$

(c) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - x^2} dy\, dx$

(d) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} (x + y) dx\, dy$

2. 'xy' সমতল ও $z = 2 - x^2 - y^2$ অধিবৃত্তক দ্বারা বেষ্টিত স্থানের আয়তন নির্ণয় করুন।

3. কেন্দ্র থেকে 'h' দূরত্বে অবস্থিত কোনো সমতল $a\,(> h)$ ব্যাসার্ধের একটি গোলককে যে দুটি অংশে ভাগ করে তার ক্ষুদ্রতর অংশটির আয়তন নির্ণয় করুন।

4. 'xy' সমতল ও $z = 1 - 4x^2 - y^2$ তল দ্বারা বেষ্টিত স্থানের আয়তন নির্ণয় করুন।

5. নীচের সমাকলটিতে উভয়ক্রম অনুসারে সমাকলের সীমা নির্ণয় করুন

$$\iint_D f(x, y)dx\,dy$$

(i) D : একটি আয়তক্ষেত্র যার শীর্ষবিন্দুগুলি হল O (0, 0); A (2, 0) ; B (2, 1) ; C (0, 1).

(ii) D একটি বৃত্তাংশ যার কেন্দ্র মূল বিন্দুতে এবং চাপের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হল (–1, 1) এবং (1, 1)

(iii) 'D' একটি বৃত্তাকার বলয় যার সাধারণ কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং ব্যাসার্ধদ্বয় 1, 2.

6. নীচের সমকলগুলি পরিবর্তিত ক্রম অনুসারে লিখুন—

(i) $\int_0^1 dx \int_{2x}^{x} f(x, y)dy$

(ii) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx$

(iii) $\int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y)dy$

7. পোলার স্থানাঙ্কে পরিবর্তন করে মান নির্ণয় করুন

(i) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)dy$

(ii) $\iint_S y\,dx\,dy$; S : 'a' ব্যাসবিশিষ্ট অর্ধবৃত্তাকার অঞ্চল যার কেন্দ্র $\left(a/2, 0\right)$ বিন্দুতে।

(iii) $\iint_S (x^2 + y^2)dx\,dy$

S : $x^2 + y^2 = 2ax$ বৃত্তটি দ্বারা বেষ্টিত অঞ্চল।

8. প্রদত্ত প্রতিস্থাপন সূত্র ব্যবহার করে নীচের সমাকলগুলির মান নির্ণয় করুন

(i) $\iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx.dy$, $\begin{smallmatrix} x = a.r.\cos\phi \\ y = b.r.\sin\phi \end{smallmatrix}$

$S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা বেষ্টিত অঞ্চল।

(ii) $\iint\limits_S \sqrt{xy(1-x-y)}\,dx\,dy, x+y=u$ এবং $x = uv$.

$S : x = 0, y = 0, x + y = 1$ সরলরেখাগুলি দ্বারা বেষ্টিত ত্রিভুজ।

9. একটি ঘনবস্তু, $x^2 + z^2 = a^2$ চোঙ এবং $y = 0, z = 0, y = x$ সমতল গুলি দ্বারা আবদ্ধ। ঐ ঘনবস্তুটির আয়তন নির্ণয় করুন।

10. একটি উপবৃত্তাকার অধিবৃত্তক $z = 2x^2 + y^2 + 1$

$x + y = 1$ সমতল এবং স্থানাঙ্কতল গুলি দ্বারা বেষ্টিত। এর আয়তন নির্ণয় করুন।

11. $x = \sin\phi \cos\theta\ y = \sin\phi \sin\theta$.

প্রতিস্থাপন সূত্র ব্যবহার করে নীচের সমাকলটিকে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কে রূপান্তরিত করুন।

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sin\phi}{\sin\theta}}\,d\phi\,d\theta$$

12. $z = mx$ এবং $z = nx$ তল দুটির মধ্যে অবস্থিত $x^2 + y^2 = a^2$ চোঙের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। $(m > n > 0)$.

13. $x^2 - y^2 = z^2$ শঙ্কুটির পৃষ্ঠতলের যে অংশ প্রথম অষ্টকে অবস্থিত এবং $y + z = a$ সমতল দ্বারা আবদ্ধ তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করুন। [ইঙ্গিত ঃ yz তলে প্রক্ষেপ করে সমাকল করুন।]

14. a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার তলের ভর নির্ণয় করুন যার ঘনত্ব কেন্দ্র থেকে দূরত্বের সাথে সমানুপাতী এবং পরিধিতে σ।

15. $r = a\ (1 + \cos\theta)$ বক্ররেখাটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ভরকেন্দ্র নির্ণয় করুন।

16. $x = 2, y = 2$ এবং $x + y = 2$ সরলরেখা তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের x-অক্ষ সাপেক্ষে জাড্য ভ্রামক নির্ণয় করুন।

6.11 সারাংশ

এই এককের 6.4-এ আপনি দ্বিচল বিশিষ্ট অপেক্ষকের সমাকলন সম্বন্ধে জ্ঞাত হচ্ছেন। 6.5-6.6-এ কিছু ধর্মাবলী দেওয়া হল। 6.7-এ দ্বিচল সমাকলের রৈখিক রূপে সমাধান করার পদ্ধতি দেওয়া আছে। 6.9-এ জ্যাকোবিয়ানের সাহায্যে পরিবর্ত প্রক্রিয়া জানতে পারবেন। এছাড়া আছে উদাহরণ ও অনুশীলনী।

6.12 সংকেতসহ অনুশীলনীর উত্তরমালা

1. (a) $\frac{a^2b^2}{8}(a^2 - b^2)$

(b) $\pi/12$

(c) $\pi/6$

(d) $3/20$

2. 2π

3. $\dfrac{2\pi}{3}(a^3 - h^3)$

4. $\pi/4$

5. (i) (a) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^2 f(x, y)dx$

(b) $\displaystyle\int_0^2 dx \int_0^1 f(x, y)dy$

(ii) (a) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x, y)dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{1\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)dy$

(iii) (a) $\displaystyle\int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)dx - \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)dy - \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dy$

6. (i) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{y/2}^{y} f(x, y)dx + \int_1^2 dy \int_{y/2}^{1} f(x, y)dx$

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy$

(iii) $\int_0^1 dy \int_P^{\pi-P} f(x, y)dx,\ P = \sin^{-1}y$ এর মুখ্য মান।

7. (i) $\int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\sec\theta} \pi\, r\theta\, dr + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\operatorname{cosec}\theta} \phi(r, \theta)dr$

(ii) $a^3/12$

(iii) $3/2\,\pi a^4$

8. (i) $\frac{2}{3}\pi ab$

(ii) $\frac{2\pi}{105}$

9. $a^3/3$

10. $3/4$

11. সংকেত ঃ জ্যাকোবিয়ান ট্রান্সফরমেশনের সাহায্য নিন।

12. $4(m - n)a^2$

13. $a^2/\sqrt{2}$

14. $\frac{2\pi\sigma a^2}{3}$

15. ভরকেন্দ্রের সংজ্ঞা ঃ $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\int xdm}{\int dm}, \frac{\int ydm}{\int dm}\right)$ উত্তর ঃ $\left(\frac{5a}{6}, 0\right)$

16. উত্তর ঃ 4 (জাড্য ভ্রামকের সংজ্ঞা *Ayres* এ দেখুন)

6.13 সহায়ক গ্রন্থ

(1) N. Piscunov : Calculus (vol-I & II), (Mir Publisher, Moscow)

(2) F. Ayres, Mendelson : Calculus (Schaum's series, Mc'graw Hill)

একক 7 ❑ প্রাচল স্বাপেক্ষে রিমান সমাকলের অন্তরকলন ও সমাকলন

গঠন

7.1 প্রস্তাবনা

একচলবিশিষ্ট অপেক্ষকের সেই চলরাশি সাপেক্ষে সমাকলনের ধারণা এবং তার মান নির্ণয়ের প্রক্রিয়ার সাথে আপনারা আগেই পরিচিত হয়েছেন। একাধিক চলবিশিষ্ট অপেক্ষককে অনুরূপ অঞ্চলে সমাকলের ধারণাও আপনারা আগের এককে জেনেছেন। কোনো অপেক্ষকে সমাকলের চলরাশি ছাড়া যদি অন্য কোনো চলরাশি থাকে তবে সেই চলরাশি সাপেক্ষে সমাকলনোত্তর অপেক্ষকটিকে অন্তরকলনের ধারণা সম্বন্ধে এখানে আলোচনাকরা হবে।

7.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি জানতে পারবেন—

- কোন শর্ত সাপেক্ষে সমাকলিত অপেক্ষকটিকে প্রাচল সাপেক্ষে অন্তরকলন বা সমাকলন করা যায়।
- সেই শর্তগুলি পূরণ হলে কেমন করে উল্লিখিত অন্তরকলন বা সমাকলন প্রক্রিয়া সম্পন্ন করা হয়।

7.3 প্রাসঙ্গিক ধারণাসমূহ

সমাকলনের চলরাশি ছাড়া অন্য কোনো চলরাশি যদি সমাকল্যে থাকে তবে সমাকলিত

অপেক্ষকটিকে ঐ চলরাশির অপেক্ষক হিসাবে গণ্য করা যায়। এই চলরাশিটিকে প্রাচল বলে। প্রয়োজনীয় শর্ত-আরোপ করে সমাকলিত অপেক্ষকটিকে প্রাচল সাপেক্ষে অন্তরকলন বা সমাকলন করা হয়।

7.4 সংজ্ঞা ও উপপাদ্যসমূহ

সংজ্ঞা ঃ মনে করুন a, b $(a < b)$ এবং c, d $(c < d)$ কয়েকটি বাস্তবসংখ্যা তাহলে (x, y) এর এই সেটটি $\{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ কে $R \times R$ অথবা R^2 তে একটি উন্মুক্ত আয়তক্ষেত্র বলা হয় এবং একে $R(a, b ; c, d)$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

অনুরূপভাবে (x, y) এর সেট

$\{(x, y) : a \leq x \leq b ; c \leq y \leq d)$ কে R^2 তে একটি বদ্ধ আয়তক্ষেত্র বলা হয় এবং $R[a, b ; c, d]$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

উপপাদ্য-1

মনে করুন a, b, c, d বাস্তব সংখ্যার জন্য 'E' সেটটি হল $\{(x, y) : a \leq x < b, c \leq y \leq d\}$ আরও মনে করুন $f : E \to R$ একটি সন্তত অপেক্ষক। তাহলে

$\phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx, c \leq y \leq d$ অক্ষেকটিও সন্তত হবে।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক $y_0 \in [c, d]$ $h \neq 0$ এমন একটি বাস্তব সংখ্যা যে $y_0 + h \in [c, d]$ তাহলে

$$\phi(y_0 + h) - \phi(y_0) = \int_a^b [f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)]dx.$$

ধরা যাক ε একটি ধনাত্মক সংখ্যা। এখন যেহেতু E বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে 'f' সন্তত কাজেই ঐ আয়তক্ষেত্র 'f' সমসন্তত। সুতরাং ε এর মান অনুসারে এমন একটি δ অবশ্যই পাওয়া যাবে যাতে,

$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \dfrac{\varepsilon}{b - a}$ যখন

$|x' - x''| < \delta, |y' - y''| < \delta$

এখন h এর মান যদি এমন করে চয়ন করেন যাতে $| h | < \delta$ হয় তাহলে

$$| \phi(y_0 + h) - \phi(y_0)|$$

$$= \left| \int_a^b \{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)\}dx \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon$$

এ থেকে প্রমাণ হয় $\phi(y)$, y_0 বিন্দুতে সম্ভব। কিন্তু যেহেতু y_0 $[c, d]$ অন্তরের যে কোনো বিন্দু অতএব সমগ্র $[c, d]$ অন্তরে $\phi(y)$ সন্তত।

উপাপদ্য-2

মনে করুন $f : E \to R$ একটি সন্তত অপেক্ষক এবং $f_y(x, y)$ অপেক্ষকটিও $E : [a \le x \le b \ ; \ c \le y \le d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে সন্তত। তাহলে $\phi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ অপেক্ষকটি $[c, d]$ অন্তরে 'y' এর সকল মানের জন্য অন্তরকলনযোগ্য এবং

$$\phi'(y) = \int_a^b f_y(x, y)dz$$

প্রমাণ ঃ মনে করুন $y_0 \in [c, d]$, $h \neq 0$ এমন একটি বাস্তব সংখ্যা যে $y_0 + h \in [c, d]$

তাহলে $\phi(y_0 + h) - \phi(y_0)$

$$= \int_a^b \{f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)\}dx.$$

যেহেতু $f_y(x, y)$ $R[a, b, c, d]$ তে সন্তত।

$\therefore \quad \psi(y) = \int_a^b f_y(x, y)dx$ এর সসীম আকারে মান আছে।

এখন $f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$

$$= hf_y(x, y_0 + \theta h), \ 0 < \theta < 1$$

$$\therefore \quad \frac{\phi(y_0 + h) - \phi(y_0)}{h} - \psi(y_0)$$

$$= \int_a^b [f_y(x, y_0 + \theta h) - f_y(x, y_0)\}dx$$

শর্ত অনুসারে $f_y(x, y)E$ তে সন্ততসুতরাং সমসন্তত। কাজেই যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε এর জন্য এমন একটি δ অবশ্যই পাওয়া যাবে যে

$$\left| f_y(x', y') - f_y(x'', y'') \right| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

যখন $| x' - x'' | < \delta$ এবং $| y' - y'' | < \delta$.

অতএব $\dfrac{\phi(y_0 + h) - \phi(y_0)}{h} - \psi(y_0) < \dfrac{\varepsilon}{b - a}(b - a) < \varepsilon$ যখন $| h | < \delta$

এ থেকে বোঝা যাচ্ছে $\phi'(y_0)$ এর অস্তিত্ব আছে এবং

$$\phi'(y_0) = \psi(y_0).$$

যেহেতু y_0 $[c, d]$ অন্তরের যে কোনো বিন্দু অতএব বলতে পারেন

$$\phi'(y) = \psi(y)\int_a^b f_y(x, y)dx$$

যখন $y \in [c, d]$

টীকা ঃ উপপাদ্য '2' থেকে আপনারা জানতে পারলেন কোন শর্তাধীনে এবং কেমন করে সমাকলিত অপেক্ষকটিকে প্রাচল সাপেক্ষে অন্তর কলন করা যায়। এর পরের উপপাদ্যে দেখবেন সমাকল্য ছাড়াও সমাকলের সীমাদ্বয়ও যদি প্রাচলের উপর নির্ভরশীল হয়তবে কেমন করে এই অন্তরকলন প্রক্রিয়া সম্পন্ন করা যায়।

উপপাদ্য-3

মনে করুন $f(x, y)$ এবং $f_y(x, y)$, $E = R[a, b, c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে সন্তত। আরও মনে করুন $g_1(y)$, $g_2(y)$ $[c, d]$ অন্তরে অন্তরকলনযোগ্য এবং $(g_1, (y), y)$ ও $(g_2(y), y)E$ এর সদস্য তবে

$$\phi(y) = \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)dx. \ [c, d] \text{ অন্তরে অন্তরকলনযোগ্য}$$

এবং $$\phi'(y) = \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f_y(x, y)dx + g_2'(y) \times f[g_2(y), y] - g_1'(y) f[g_1(y), y]$$

প্রমাণ ঃ মনে করুন $k > 0$ একটি বাস্তব সংখ্যা

তাহলে $\phi(y + k) - \phi(y)$

$$= \int_{g_1(y+k)}^{g_2(y+k)} f(x, y+k)dx - \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)dx$$

$g_1(y)$ $g_1(y + k)$ $g_2(y)$ $g_2(y + k)$

$$= \int_{g_1(y)}^{g_1(y+k)} f(x, y+k)dx + \int_{g_1(y+k)}^{g_2(y+k)} f(x, y+k)dx - \int_{g_1(y)}^{g_1(y+k)} f(x, y+k)dx$$

$$- \int_{g_1(y)}^{g_1(y+k)} f(x, y+k)dx + \int_{g_1}^{g_2(y+k)} f(x, y+k)dx - \int_{g_1(y)}^{g_2(y+k)} f(x, y)\,dx$$

$$= \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} [f(x, y+k) - f(x, y)]dx - [g_1(y + k) - g_1(y)]f(\xi, y + k)$$

$$+ [g_2(y + k) - g_2(y)]\, f(\eta, y + k)$$

[যেখানে ξ ও η যথাক্রমে $g_1(y + k)$ ও $g_1(y)$ এর মধ্যে এবং $g_2(y)$ থেকে $g_2(y + k)$ এর মধ্যে দুটি বিন্দু]

দুদিকে 'k' দিয়ে ভাগ করলে পাওয়া যায়—

$$\frac{\phi(y+k)-\phi(y)}{k} = \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}dx - \frac{g_1(y+k)-g_1(y)}{k}f(\xi, y+k)$$

$$+\frac{g_2(y+k)-g_2 y}{k}f(\eta, y+k)$$

এবার $k \to 0$ করলে পাবেন

$$\phi'(y) = \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f_y(x,y)dx - g_1'(y)f(x,y) + g_2'(y)f(x,y)$$

উপপাদ্য-4

$f(x, y)$ অপেক্ষকটি যদি $R[a, b : c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে সন্তত হয় তাহলে—

$$\int_c^d \left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy = \int_a^b \left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\} dx$$

অর্থাৎ রৈখিক সমাকলের পরম্পরায় সমাকল চলের ক্রম পরিবর্তন করা যায়।

প্রমাণ ঃ যেহেতু $f(x, y)$ অপেক্ষকটি $F[a,b\ ;\ c, d]$ তে সন্তত কাজেই 'y' এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য এটি $[a, b]$ অন্তরে সন্তত আবার 'x' এর কোনো নির্দিষ্ট মানের জন্য $[c, d]$ অন্তরে সন্তত।

সুতরাং উপপাদ্যে উল্লিখিত দুটি বহুসমাকলেরই অস্তিত্ব আছে।

ধরুন $\phi(t)$ এবং $\psi(t)$ দুটি অপেক্ষককে এভাবে সংজ্ঞায়িত করা হলো

$$\left.\begin{aligned}\phi(t) &= \int_c^t \left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy \\ \psi(t) &= \int_a^b \left\{\int_c^t f(x,y)dy\right\}dx\end{aligned}\right\} c \le t \le d.$$

অবশ্যই $\phi(c) = \psi(c) = 0$

$$\phi'(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

$$\psi'(t) = \int_a^b \left\{\frac{\delta}{\delta t}\int_c^t f(x,y)dy\right\}dx$$

$$= \int_a^b f(x,t)dx$$

$\therefore$ $[c, d]$ অন্তরের যে কোনো বিন্দু 't' এর জন্য $\phi'(t) = \psi'(t)$

কাজেই ϕ ও ψ অপেক্ষক দুটির মধ্যে বড়জোর একটি ধ্রুবকের তফাৎ থাকতে পারে।

কিন্তু $\phi(c) = \psi(c)$

$\therefore$ $\phi(t) = \psi(t), \quad t \in [c, d]$

এখন $t = d$ ধরলে

$$\int_c^d \left\{\int_a^b f(x,y)dx\right\}dy = \int_a^b \left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx$$

উদাহরণ ঃ

1. $|a| < 1$ হলে দেখান যে

$$\int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}dx = \pi \sin^{-1} a$$

সমাধান ঃ

ধরুন $f(x,a) = \dfrac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}$

যখন $0 \le x \le \pi,\ x \ne \dfrac{\pi}{2},\ -1 < a < 1$

লক্ষ্য করুন যখন $x \to \dfrac{\pi}{2}$

$$f(x, a) \to a$$

কাজেই $f\left(\dfrac{\pi}{2}, a\right) = a$ সংজ্ঞা ধরলে $f(x, a)$ অপেক্ষকটি $R[0, \pi\ ; -k, k]$, $k < 1$. এই বদ্ধ আয়তক্ষেত্র সন্তত।

আবার $\dfrac{\delta f}{\delta a} = \dfrac{1}{1+a\cos x}$ এই আয়তক্ষেত্র সর্বত্র সন্তত।

এখন $\phi(a) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1 + a\cos x)}{\cos x} dx$ হলে

$$\phi'(a) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + a\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$ (সমাকলন করে পাওয়া যায়)

যখন $| a | \leq k$

$\therefore \quad \phi(a) = \pi \sin^{-1} a + c,$

c = সমাকলন ধ্রুবক।

কিন্তু $\phi(a)$'র সংজ্ঞা থেকে বোঝা যায় যে $\phi'(0) = 0$

$\therefore \quad C = 0$

$$\therefore \quad \phi(a) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1 + a\cos x)}{\cos x} dx$$

$$= \pi \sin^{-1} a$$

2. $a > 0$ হলে দেখান যে

$$\int_0^{a} \frac{\log(1 + ax)}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \log(1 + a^2) \tan^{-1} a$$

সমাধান ঃ ধরুন $f(x, a) = \frac{\log(1 + ax)}{1 + x^2}$

যখন $0 \leq x \leq k$, $0 \leq a \leq k$, k একটি ধনাত্মক সংখ্যা।

$\therefore$ $f(x, a)$, $R[0, k ; 0, k]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে সন্তত।

আবার, $\frac{\delta f}{\delta a} = \frac{x}{(1 + ax)(1 + x^2)}$ অপেক্ষকটিও ঐ আয়তক্ষেত্রের সর্বত্র সন্তত।

কাজেই $\phi(a) = \int_0^{a} \frac{\log(1 + ax)}{1 + x^2} dx$ ....(1)

হলে $\phi(a) = \int_0^{a} \frac{xdx}{(1 + ax)(1 + x^2)} + \frac{\log(1 + a^2)}{1 + a^2}$ ....(2)

[উপপাদ্য 3 অনুসারে]

এখন $\frac{\delta f}{\delta a}$ অপেক্ষকটি আংশিক ভগ্নাংশে ভাঙ্গালে লেখা যায়

$$\frac{x}{(1+ax)(1+x^2)} = -\frac{a}{1+a^2}\cdot\frac{1}{1+ax} + \frac{1}{1+a^2}\cdot\frac{x}{1+x^2} + \frac{a}{1+a^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$\therefore$ সমীকরণ (2) থেকে বলতে পারেন

$$\phi'(a) = -\frac{1}{1+a^2}\int_0^a \frac{a}{1+ax}\,dx + \frac{1}{1+a^2}\int_0^a \frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{a}{1+a^2}\int_0^a \frac{dx}{1+x^2} + \frac{\log(1+a^2)}{1+a^2}$$

$$= \frac{-\log(1+a^2)}{1+a^2} + \frac{1}{2}\frac{\log(1+a^2)}{1+a^2} + \frac{a\tan^{-1}a}{1+a^2} + \frac{\log(1+a^2)}{1+a^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\log(1+a^2)}{1+a^2} + \frac{a\tan^{-1}a}{1+a^2}$$

সমাকলনের সাহায্যে পাবেন

$$\phi(a) = \frac{1}{2}\int\frac{\log(1+a^2)}{1+a^2}\,da + \int\frac{a\tan^{-1}}{1+a^2}\,da + c$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{\log(1+a^2)}{1+a^2}\,da + \frac{1}{2}\log(1+a^2)\tan^{-1}a$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\log(1+a^2)}{1+a^2}\,da + c \quad \text{(অংশাকারে সমাকলন)}$$

$$= \frac{1}{2}\log(1+a^2)\tan^{-1}a + c$$

সমীকরণ (1) এ দেখুন $\phi(0) = 0$.

$\therefore \ c = 0$

কাজেই $\phi(a) = \frac{1}{2}\log(1+a^2)\tan^{-1}a$

অনুশীলনী

1. দেখান যে

$$\int_0^a \frac{\log(1+ax)}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+a^2)\tan^{-1}a$$

এথেকে আরও প্রমাণ করুন

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}\log 2$$

2. প্রমাণ করুনঃ

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+\cos\alpha\cos x)}{\cos x}\, dx = \frac{\pi^2-4\alpha^2}{8},\ 0<\alpha<\pi$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+y\sin^2 x)}{\sin^2 x}\, dx = r\left[\sqrt{1+y}-1\right],\ y>0$

3. প্রমাণ করুন ঃ

(i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)d\theta = \pi\log\frac{a+b}{2}.\, a,\ b>0$

(ii) $a > b > 0$ হলে

$$\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right)\operatorname{cosec}\theta\, d\theta = \pi\sin^{-1}\frac{b}{a}$$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^y-1}{\log x}\, dx = \log(1+y)$ প্রমাণ করুন।

7.5 সারাংশ

এই এককে প্রাচল সাপেক্ষে একটি সমাকলের অন্তরকলন কি করে করতে হয় তা আমরা জানছি। আর পাচ্ছি দ্বিচল সমাকলের চলের ক্রমপরিবর্তনের নীতি।

7.6 সংকেতসহ উত্তরমালা

(1) উদাহরণ-1 (একক-7) এর সাহায্য নিন।

(2) (i), (ii) দুটি ক্ষেত্রেই উদাহরণ-1, 2 (একক-7) এর মত করে ভাবুন।

7.7 সহায়ক গ্রন্থ

(1) Robert G. Bartle : Elements of Real Analysis (2nd edition, John Wiley)

EMT–08
Block–2

একক 8 ❑ অযথার্থ রিমান সমাকল (Improper Riemann Integrals)

গঠন

8.1 প্রস্তাবনা

কোনো অপেক্ষকের রিমান সমাকলের অস্তিত্বের অন্যতম শর্ত হচ্ছে, ঐ অপেক্ষকটিকে একটি বদ্ধ অন্তরালে সীমাবদ্ধ হতে হবে (bounded in a closed interval)। অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx$, অপেক্ষক $f(x)$ এর রিমান সমাকল হলে, (i) সমাকল $f(x)$ এর $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালের কোথাও অসীম অসান্ততা (infinite discontinuity) নেই অথবা (ii) সমাকলের উর্ধ্বসীমা b কিংবা নিম্নসীমা a কোনটিই অসীম নয়। (i) অথবা (ii) শর্তের কোন একটি লঙ্ঘিত হলেই $\int_a^b f(x)dx$, রিমান সমাকলটিকে অযথার্থ বলা হবে। অযথার্থ রিমান সমাকল অভিসারী হলে এর মান নির্ণয় সম্ভব। উচ্চতর গণিত ও গাণিতিক পদার্থবিদ্যার বিভিন্ন শাখায় অযথার্থ অথচ অভিসারী রিমান সমাকলের বহুল প্রয়োগ দেখা যায়।

8.2 উদ্দেশ্য

বিভিন্ন ধরনের অযথার্থ সমাকল, এদের অভিসরণ এবং মান নির্ণয়ের পদ্ধতি উদাহরণ সহযোগে আলোচনা করা এই এককটির উদ্দেশ্য।

8.3 অযথার্থ সমাকলের সংজ্ঞা ও শ্রেণীবিভাগ

$\int_a^b f(x)dx$ নির্দিষ্ট সমাকলটি প্রধানত দুটি কারণে অযথার্থ হতে পারে।

I. নিম্নসীমা a অথবা উর্ধ্বসীমা b অথবা উভয়েই অসীম হলে।

II. $f(x)$ অপেক্ষকটির $[a, b]$ অন্তরালে সীমিত সংখ্যক অসীম অসান্ততা (finite number of infinite discontinuities) থাকলে।

8.3.1 I. (a) উর্ধ্বসীমা b অসীম। $\int_a^\infty f(x)dx$-এর সংজ্ঞা।

যদি $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$-এর অস্তিত্ব থাকে তাহলে এই সীমাস্থ মানকে $[a, \infty]$ অন্তরালে $f(x)$-এর অযথার্থ সমাকল বলা হয় এবং $\int_a^\infty f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ লেখা হয়। এক্ষেত্রে $\int_a^\infty f(x)dx$ অযথার্থ সমাকলটিকে অভিসারী (convergent) বলা হয়। যদি $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$-এর অস্তিত্ব না থাকে তাহলে $\int_a^\infty f(x)dx$ অযথার্থ সমাকলটিকে অপসারী (divergent) বলা হয়।

(b) নিম্নসীমা a অসীম। $\int_{-\infty}^b f(x)dx$-এর সংজ্ঞা।

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

এই অযথার্থ সমাকলটি অভিসারী হবে যদি ডানদিকের নির্দিষ্ট সমাকলটির সীমাস্থমানের অস্তিত্ব থাকে। অন্যথায় এটি হবে অপসারী।

(c) উর্ধ্বসীমা ও নিম্নসীমা উভয়েই অসীম। $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$-এর সংজ্ঞা।

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{C} f(x)dx + \int\limits_{C}^{\infty} f(x)dx$$

যেখানে C একটি যদৃচ্ছ সংখ্যা। $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ অযথার্থ সমাকলটিকে অভিসারী বলা হবে যদি ডানদিকের অযথার্থ সমাকল দুটির প্রত্যেকেই অভিসারী হয়।

উদাহরণ 1 : $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ এই অযথার্থ সমাকলটির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{B\to\infty} \int\limits_{0}^{B} \frac{dx}{1+x^2}$

$$= \lim_{B\to\infty} \left[\tan^{-1} x\right]_0^B = \lim_{B\to\infty} \tan^{-1} B = \frac{\pi}{2}$$

উদাহরণ 2 : $\int\limits_{0}^{\infty} e^x dx$ সমাকলটি কি অভিসারী?

সমাধান : $\int\limits_{0}^{\infty} e^x dx = \lim\limits_{B\to\infty} \int\limits_{0}^{B} e^x dx = \lim\limits_{B\to\infty} \left[e^x\right]_0^B \lim\limits_{B\to\infty} (e^B - 1) = \infty$

কাজেই সমাকলটির অস্তিত্ব নেই। সুতরাং সমাকলটি অভিসারী নয়, অপসারী।

উদাহরণ 3 : $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^2}$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^2} = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^2}$ (1)

এখন $\int\limits_{a}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^2}$ সমাকলটিতে $1 - 2x = u$ বসিয়ে পাই

$$dx = -\frac{1}{2} du$$

x	u
a	$1-2a$
0	1

অতএব $\int_{a}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^2} = -\frac{1}{2}\int_{1-2a}^{1} \frac{du}{u^2}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u}\right]_{1-2a}^{1} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{1-2a}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^2} = \lim_{a\to-\infty}\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{1-2a}\right] = \frac{1}{2}$$

অতএব $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^2}$ অযথার্থ সমাকলটি অভিসারী এবং এর মান $\frac{1}{2}$

উদাহরণ 4 : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ সমাকলটির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{a} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{a}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

$$\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{a} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{B\to\infty}\int_{a}^{B} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to\infty}}\int_{A}^{B} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to\infty}}[\tan^{-1} B - \tan^{-1} A]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

উদাহরণ 5 : দেখান যে, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4+1} = 0$

সমাধান : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4+1} = \lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to\infty}}\int_{A}^{B} \frac{x\,dx}{x^4+1}$

এখন $\int\limits_A^B \dfrac{x\,dx}{x^4+1}$ সমাকলটিতে $x^2 = t$ বসিয়ে পাই

$$xdx = \frac{1}{2}dt$$

x	t
A	A^2
B	B^2

$$\int\limits_A^B \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int\limits_{A^2}^{B^2}\frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\tan^{-1} t\right]_{A^2}^{B^2} = \frac{1}{2}\left[\tan^{-1} B^2 - \tan^{-1} A^2\right]$$

অতএব প্রদত্ত অযথার্থ সমাকল $= \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^4+1}$

$$= \lim_{\substack{B\to+\infty \\ A\to-\infty}} \frac{1}{2}\left[\tan^{-1} B^2 - \tan^{-1} A\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] = 0$$

8.3.2 দ্বিতীয় রকমের (Type II) অযথার্থ সমাকল। এক্ষেত্রে সমাকল্য অপেক্ষক $f(x)$-এর $[a, b]$ অন্তরালে সীমিত সংখ্যক অসীম অসান্তত্য আছে।

(a) যদি অপেক্ষক $f(x)$-এর, নিম্নসীমা a বিন্দুতে একমাত্র অসীম অসান্তত্য থাকে, তাহলে অযথার্থ সমাকল $\int\limits_a^b f(x)dx$-এর সংজ্ঞা লেখা হবে

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0+}\int\limits_{a+\lambda}^{b} f(x)dx, \qquad 0 < \lambda < b - a$$

(b) যদি অপেক্ষক $f(x)$-এর একমাত্র অসীম অসান্তত্য বদ্ধ অন্তরালের শেষপ্রান্ত b বিন্দুতে থাকে, তাহলে অযথার্থ সমাকল $\int\limits_a^b f(x)dx$ এর সংজ্ঞা লেখা হবে

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\mu\to 0+}\int\limits_a^{b-\mu} f(x)dx$$

(c) যদি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালের কোন অন্তঃস্থ বিন্দু c, $(a < c < b)$ $f(x)$ অপেক্ষকটির অসীম অসান্ততা থাকে, তাহলে $\int_a^b f(x)dx$-এর সংজ্ঞা লেখা হবে

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \to 0+ \\ \mu \to 0+}} \left[\int_a^{c-\mu} f(x)dx + \int_{c+\lambda}^b f(x)dx \right]$$

যদি ডানদিকের কোন একটি সমাকলের সীমাস্থ মান না থাকে তাহলে অযথার্থ সমাকল $\int_a^b f(x)dx$ হবে অপসারী। আবার $\lambda = \mu$ বসিয়ে যদি ডানদিকের সমাকল দুটির যোগফলের সীমাস্থ মান পাওয়া যায় তাহলে এই মানটিকে $\int_a^b f(x)dx$-এর কোশি মুখ্যমান' (Cauchy Principal Value) বলা হবে।

উদাহরণ 1 : সম্ভব হলে নিচের সমাকলটির মান নির্ণয় করুন

$$\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$$

সমাধান : এক্ষেত্রে $\frac{1}{2-x}$ অপেক্ষকটির $x = 2$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে এবং $x = 2$ বিন্দুটি এই সমাকলটির উর্ধ্বসীমা।

অতএব, $$\int_0^2 \frac{dx}{2-x} = \lim_{\mu \to 0+} \int_0^{2-\mu} \frac{dx}{2-x}$$

$$= \lim_{\mu \to 0+} [-\log(2-x)]_0^{2-\mu}$$

$$= \lim_{\mu \to 0+} [\log 2 - \log \mu]$$

এই সীমাস্থ মানের অস্তিত্ব নেই। ফলে প্রদত্ত সমাকলটি অপসারী।

উদাহরণ 2 : সম্ভব হলে $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$-এর মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : এক্ষেত্রে $\frac{1}{x^2}$ অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে।

অতএব, $$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$$

এখন $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{\varepsilon} = +\infty$ কাজেই $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ সমাকলটি অপসারী এবং এর মান নির্ণয় সম্ভব নয়।

উদাহরণ 3 : প্রমাণ করুন যে, সমাকলটির 'কোশি মুখ্যমান' বর্তমান, যদিও সংজ্ঞানুযায়ী সমাকলটি অপসারী।

সমাধান : $\frac{1}{x^3}$ অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে। ফলে

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{\mu\to 0+}\int_{-1}^{-\mu} \frac{1}{x^3}\,dx + \lim_{\lambda\to 0+}\int_\lambda^1 \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$= \lim_{\mu\to 0+}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{-\mu} + \lim_{\lambda\to 0+}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_\lambda^1$$

$$= \lim_{\mu\to 0+}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2\mu^2}\right] + \lim_{\lambda\to 0+}\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\lambda^2}\right]$$

যেহেতু $\lim\limits_{\mu\to 0+}\frac{1}{2\mu^2}$ এবং $\lim\limits_{\lambda\to 0+}\frac{1}{2\lambda^2}$ সীমা দুটির অস্তিত্ব নেই, প্রদত্ত সমাকলটি অপসারী এবং এর মান নির্ণয় সম্ভব নয়।

'কোশি মুখ্যমান'-এর জন্য আমরা পাই

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{\mu\to 0+}\left[\int_{-1}^{\mu} \frac{1}{x^3}\,dx + \int_\mu^1 \frac{1}{x^3}\,dx\right]$$

$$= \lim_{\mu\to 0+}\left[-\int_\mu^1 \frac{1}{x^3}\,dx + \int_\mu^1 \frac{1}{x^3}\,dx\right] = 0$$

উদাহরণ 4 : মান নির্ণয় করুন $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

এই সমাকলটি দুটি কারণে অযথার্থ। প্রথম কারণ এর উর্ধ্বসীমা অসীম এবং দ্বিতীয় কারণ সমাকল্য অপেক্ষকটির $x = 1$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে।

অতএব $$I = \int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{\substack{B\to\infty \\ \lambda\to 0+}} \int_{1+\lambda}^{B}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \lim_{\substack{B\to\infty \\ \lambda\to 0+}} \left[\sec^{-1} x\right]_{1+\lambda}^{B}$$

$$= \lim_{\substack{B\to\infty \\ \lambda\to 0+}} \left[\sec^{-1} B - \sec^{-1}(1+\lambda)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

উদাহরণ 5 : দেখান যে নিচে লেখা অযথার্থ সমাকল $\int_a^b \frac{dx}{x-c}, a < c < b$ অপসারী। কিন্তু এর 'কোশী মুখ্যমান' আছে। সেটি নির্ণয় করুন।

সমাধান : $\mathrm{I} = \int_a^b \frac{dx}{x-c}, a < c < b$

$$= \lim_{\substack{\lambda\to 0+ \\ \mu\to 0+}} \left\{ \int_a^{c-\mu} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\lambda}^{b} \frac{dx}{x-c} \right\}$$

$$= \lim_{\substack{\lambda\to 0+ \\ \mu\to 0+}} \left\{ \left[In(x-c)\right]_a^{c-\mu} + \left[In(x-c)\right]_{c+\lambda}^{b} \right\}$$

$$= \lim_{\substack{\lambda\to 0+ \\ \mu\to 0+}} \left\{ (In\mu - In|a-c|) - In(\lambda) + In|b-c| \right\}$$

$$= In\frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\lambda\to 0+ \\ \mu\to 0+}} In\frac{\lambda}{\mu}$$

যেহেতু $\lim_{\substack{\lambda\to 0+ \\ \mu\to 0+}} In\frac{\lambda}{\mu}$-এর অস্তিত্ব নেই, প্রদত্ত অযথার্থ সমাকলটি অপসারী। 'কোশি মুখ্যমান' এর জন্য $\lambda = \mu$ বসিয়ে পাই $(I)_{p.v.} = In\frac{b-c}{c-a}, a < c < b$

8.4 অযথার্থ সমাকলের মান নির্ণয়ের জন্য প্রয়োজনীয় একটি উপপাদ্য

উপপাদ্য : (i) একটি সমাকল্য অপেক্ষক $f(x)$, $0 < x \le a$ অন্তরালে সীমাবদ্ধ ও সমাকলনযোগ্য হয় এবং $x \to 0+$ হলেই একমাত্র $f(x) \to \infty$ হয় অথবা $f(x)$, $0 \le x < a$ অন্তরালে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য হয় এবং $x \to a -$ হলেই একমাত্র $f(x) \to \infty$ হয় এবং

(ii) $\int_0^a f(x)dx$ অভিসারী হয়, তাহলে

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

প্রমাণ : ধরি $f(x) \to \infty$ যখন $x \to a -$ এবং $\int_0^a f(x)dx$ অভিসারী। কাজেই সংজ্ঞা থেকে পাই, $\lim_{\mu\to 0+} \int_0^{a-\mu} f(x)dx$-এর অস্তিত্ব আছে এবং এর মান সীমিত। এই সমাকলে $x = a - z$ বসিয়ে পাই

$$\lim_{\mu\to 0+} \int_0^{a-\mu} f(x)dx = \lim_{\mu\to 0+} \int_\mu^a f(a-x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

8.4.1 মন্তব্য

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(2a-x)]dx$$

উপপাদ্যটি অযথার্থ ও অভিসারী সমাকল $\int_0^{2a} f(x)dx$-এর ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। যদি $f(x)$ অপেক্ষকটির কেবলমাত্র ঊর্ধ্বসীমা $x = 2a$ অথবা নিম্নসীমা $x = 0$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য থাকে।

8.4.2 উদাহরণ

1. নিচের সমাকলটি অভিসারী ধরে নিয়ে দেখান যে

$$\int_0^{\pi} \log(1+\cos\theta)d\theta = \pi \log\frac{1}{2}$$

সমাধান : এখানে

$$log\ (1 + cos\ \theta) \to -\infty \text{ যখন } \theta \to \pi$$

এবং

$$\int_0^{\pi} \log(1+\cos\theta)d\theta = \lim_{\mu\to 0+} \int_0^{\pi-\mu} \log(1+\cos\theta)d\theta$$

ফলে

$$\int_0^{2a} f(\theta)d\theta = \int_0^{a} [f(\theta) + f(2a-\theta)]d\theta$$

উপপাদ্যটি প্রয়োগ করে পাই

$$\int_0^{\pi} \log(1+\cos\theta)d\theta = \int_0^{\pi/2} [\log(1+\cos\theta) + \log(1-\cos\theta)]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(1-\cos^2\theta)d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \log\sin\theta\, d\theta$$

$$= 2l \text{ (ধরি)}$$

যেখানে

$$I = \int_0^{\pi/2} \log\sin\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\cos\theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad 2l = \int_0^{\pi/2} (\log\sin\theta + \log\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\sin\theta\cos\theta \, d\theta$$

[যেহেতু উভয় সমাকল অভিসারী]

$$= \int_0^{\pi/2} \log\frac{\sin 2\theta}{2} \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log\frac{1}{2}\, d\theta + \int_0^{\pi/2} \log\sin 2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2} + \int_0^{\pi/2} \log\sin 2\theta \, d\theta$$

এবার $\int_0^{\pi/2} \log\sin 2\theta \, d\theta$ এই অভিসারী সমাকলটির মান নির্ণয় করা হবে। এক্ষেত্রে লক্ষ্যণীয় যে, $logsin 2\theta$ অপেক্ষকটির সমাকলটির ঊর্ধ্বসীমা ও নিম্নসীমা উভয়ে ক্ষেত্রেই অসীম অসান্তত্য আছে।

অতএব $$\int_0^{\pi/2} \log\sin 2\theta \, d\theta = \lim_{\substack{\lambda\to 0+ \\ \mu\to 0+}} \int_{\lambda}^{\frac{\pi}{1}-\mu} \log\sin 2\theta \, d\theta$$

$2\theta = z$ বসিয়ে পাই,

$$\int_0^{\pi/2} \log\sin 2\theta \, d\theta = \lim_{\substack{\lambda\to 0+ \\ \mu\to 0+}} \frac{1}{2}\int_{2\lambda}^{\pi-2\mu} \log\sin z \, dz$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\pi/2} \log\sin 2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin\theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad 2I = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{\log\sin\theta + \log\cos\theta\}\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}2I$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ নির্ণেয় সমাকল $\qquad 2I = \pi\log\frac{1}{2}$

2 : প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী ধরে নিয়ে দেখান যে

$$I = \int_0^{\pi}\frac{x\tan x\,dx}{\sec x + \cos x} = \frac{\pi^2}{4}$$

সমাধান : $\frac{x\tan x}{\sec x + \cos x} = f(x)$ অপেক্ষকটির $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে। অতএব

$$\mathrm{I} = \lim_{\mu\to 0+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\mu} f(x)dx + \lim_{\lambda\to 0+}\int_{\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\pi} f(x)dx$$

$$= \lim_{\mu\to 0+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\mu}\frac{x\tan x}{\sec x + \cos x}dx + \lim_{\lambda\to 0+}\int_{\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\pi}\frac{x\tan x}{\sec x + \cos x}dx$$

$$= \lim_{\mu\to 0+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\mu}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx + \lim_{\lambda\to 0+}\int_{\frac{\pi}{2}+\lambda}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

প্রথম সমাকলটিতে $x = \pi - z$ এবং দ্বিতীয়টিতে $x = \pi - t$ বসিয়ে পাই

$$\mathrm{I} = \lim_{\mu\to 0+}\int_{\frac{\pi}{2}+\mu}^{\pi}\phi(\pi - z)\,dz + \lim_{\lambda\to 0+}\int_0^{\frac{\pi}{2}-\lambda}\phi(\pi - t)\,dt$$

$$= \lim_{\lambda\to 0+} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\lambda} \phi(\pi - x)dx + \lim_{\mu\to 0+} \int_{\frac{\pi}{2}+\mu}^{\pi} \phi(\pi - x)dx$$

$$= \int_0^{\pi} \phi(\pi - x)\, dx \qquad \text{যেখানে } \phi(x) = \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}$$

অর্থাৎ $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \tan x\, dx}{\sec x + \cos x} = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}$

অতএব $\displaystyle 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \text{একটি যথার্থ সমাকল।}$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} \right] dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \times 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$= \pi \times \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} \qquad z = cos\ x$$

$$= \pi \times \left[\tan^{-1} z\right]_0^1 = \pi \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

3 : $a + b > 0$ হলে দেখান যে,

$$\int_b^{\infty} \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}} = \frac{\pi}{\sqrt{a+b}}$$

সমাধান : এখানে $I = \displaystyle\int_b^{\infty} \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}$ সমাকলটির উর্ধ্বসীমা অসীম এবং সমাকল অপেক্ষকটির

$x = b$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে। অতএব অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের সংজ্ঞানুসারে সমাকল I অভিসারী হবে, যদি

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0+ \\ B \to \infty}} \int_{b+\lambda}^{B} \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}$$

সীমিত হয় এবং সেক্ষেত্রে

$$I = \lim_{\substack{\lambda \to 0+ \\ B \to \infty}} J \qquad \text{যেখানে } J = \int_{b+\lambda}^{B} \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}$$

এখন J সমাকলটিতে $x - b = t^2$ বসিয়ে পাই

$$J = 2\int_{\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{B-b}} \frac{dt}{t^2 + (a+b)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\left[\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{a+b}}\right]_{\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{B-b}} \qquad [\because a + b \neq 0]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a+b}}\left[\tan^{-1}\frac{\sqrt{B-b}}{\sqrt{a+b}} - \tan^{-1}\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{a+b}}\right]$$

অতএব
$$\lim_{\substack{\lambda \to 0+ \\ B \to \infty}} J = \frac{2}{\sqrt{a+b}}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{a+b}}$$

$\Rightarrow$ প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী এবং এর মান $\dfrac{\pi}{\sqrt{a+b}}$

8.5 প্রথম প্রশ্নাবলী

1. দেখান যে, $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$ সমাকলটি অভিসারী এবং এর মান 0

2. দেখান যে, $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ সমাকলটি অভিসারী এবং এর মান $\frac{\pi}{2}$

3. প্রমাণ করুন যে $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2(a+b)};\quad a, b > 0$

4. দেখান যে $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2};\qquad a > 0$

5. দেখান যে $\int_0^\pi \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}};\qquad a > b$

6. দেখান যে $0 < \alpha < \pi$ $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x\cos\alpha+1} = \frac{\alpha}{\sin\alpha}$;

7. প্রমাণ করুন যে $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab};\quad a, b > 0$

8. প্রমাণ করুন যে $\int_0^{\pi/2} \frac{x\sin x\cos x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4ab^2(a+b)};\qquad a, b > 0$

9. দেখান যে $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{2x}\left\{9+(2x)^{1/3}\right\}} = 3 - 9\tan^{-1}\frac{1}{3}$

10. নিচের সমাকলগুলো অভিসারী ধরে নিয়ে দেখান যে

(i) $\int_0^\pi \log(1-\cos x)\,dx = -\pi\log 2$

(ii) $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sec x + \operatorname{cosec} x} = \frac{\pi}{4}\left(1+\log\sqrt{2}+1\right)$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \log(\tan x + \cot x)dx = \pi \log 2$

(v) $\int_0^{\pi/2} \log \tan x dx = 0$

(vi) $\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$

11. দেখান যে

(i) $\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}$

(ii) $\int_0^1 \frac{x^3 \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{7}{9}$

(iii) $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{3}$

12. প্রমাণ করুন যে, n ধনাত্মক যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা হলে $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} d\theta = 0$

কিন্তু n অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে $In = \pi$

13. প্রমাণ করুন যে, সকল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n-এর জন্য $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x} dx = n\pi$

14. In = $\int_0^{\pi/2} \sin 2n \cot x dx, n \geq 1$ হ'লে দেখান যে, $I_{n+1} = I_n$ এবং $I_n = \frac{\pi}{2}$

15. প্রমাণ করুন যে (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+.....+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right\}=\frac{\pi}{2}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n-1}\sqrt{\frac{n+r}{n-r}}=\frac{\pi}{2}+1$

8.6 অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত

প্রথম রকমের (Type I) অযথার্থ সমাকল। সমাকল্য অপেক্ষক সীমাবদ্ধ অন্তরাল অসীম।

$\int_a^{\infty} f(x)dx$-এর অভিসরণের প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত।

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ বসিয়ে আমরা দেখি যে, অযথার্থ সমাকল $\int_a^{\infty} f(t)dt$-এর অভিসরণের শর্ত এবং $x\to\infty$ হলে, F (x) অপেক্ষকটির সীমাস্থ মানের অস্তিত্বের শর্ত অভিন্ন। তাই আমরা $\int_a^{\infty} f(t)dt$ অযথার্থ সমাকলটির অভিসরণের নিচে লেখা সংজ্ঞা পাই।

8.6.1 সংজ্ঞা

অযথার্থ সমাকল $\int_a^{\infty} f(t)dt$ অভিসারী হবে এবং এর মান হবে I যখন কোন পর্য্যাপ্ত ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ε দেওয়া থাকলে আমরা একটি ধনাত্মক সংখ্যা X পাব যাতে করে x > X হলেই

$$\left|I-\int_a^x f(t)dt\right|<\varepsilon$$

অসমতাটি সিদ্ধ হয়।

$x\to\infty$ হলে $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ অপেক্ষকটির সীমাস্থ মান নির্ণয়ের জন্য 'কোশি নির্ধারক' (Cauchy criterion) প্রয়োগ করে আমরা পরের পাতার উপপাদ্যটি পাই।

8.6.2 উপপাদ্য

$\int_a^\infty f(t)dt$ অযথার্থ সমাকলটির অভিসরণের একটি প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত হচ্ছে যে, যে-কোন পর্য্যাপ্ত ক্ষুদ্র ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর অনুসঙ্গী একটি ধনাত্মক সংখ্যা X পাওয়া যাবে, যাতে করে

$$\left|\int_{x'}^{x} f(t)dt\right| < \varepsilon$$

অসমতাটি x', x''-এর সেইসব মানের জন্য সিদ্ধ হয় যাদের জন্য $x'' > x' \geq \mathrm{X}$; অর্থাৎ

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x)dx\right| \to 0 \text{ যখন } \quad x',\ x'' \to \infty$$

মন্তব্য : যেহেতু

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{\infty} f(-t)dt = \int_{b}^{\infty} \phi(t)dt$$

$$(b = -\, a \text{ এবং } \phi\ (t) = f\ (-t) \text{ বসিয়ে})$$

উপরের উপপাদ্যটিকে $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ অযথার্থ সমাকলের ক্ষেত্রেও সম্প্রসারিত করা যেতে পারে।

8.6.3 নিঃশর্ত অভিসরণ বা পরম অভিসরণ

সংজ্ঞা ঃ অযথার্থ সমাকল $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ নিঃশর্তভাবে অভিসারী বলা হবে যখন,

(i) $f(x)$ অপেক্ষকটি যে-কোন অন্তরাল $(a,\ b)$ তে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য এবং

(ii) $\int_{a}^{\infty} |f(x)|\, dx$ সমাকলটি অভিসারী।

মন্তব্য : কোন অযথার্থ সমাকল $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ নিঃশর্তভাবে অভিসারী হলে এটি অভিসারী হবে। কিন্তু এর বিপরীত প্রতিজ্ঞাটি সত্য নয়।

উদাহরণ : প্রমাণ করুন যে

(i) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ অভিসারী

(ii) $\int\limits_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ অপসারী

সমাধান :

(i) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ অযথার্থ সমাকলটির সমাকল্য $\frac{\sin x}{x}$-এর $x = 0$ বিন্দুতে একটি দূরীকরণযোগ্য অসান্তত্য আছে। আমরা যদি এই অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতে মান 1 ধরে নিই, তাহলে এই অপেক্ষকটিকে সন্তত অপেক্ষক বলা যেতে পারে। আংশিক সমাকলন করে পাই

$$\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{x'}^{x''} + \int\limits_{x'}^{x''} -\frac{\cos x}{2} dx$$

$$= \frac{\cos x'}{x'} - \frac{\cos x''}{x''} - \int\limits_{x'}^{x''} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

অতএব $$\left|\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} dx\right| = \left|\frac{\cos x'}{x'} - \frac{\cos x''}{x''} - \int\limits_{x'}^{x''} \frac{\cos x}{x^2} dx\right|$$

$$\leq \frac{|\cos x'|}{x'} + \frac{|\cos x''|}{x''} + \left|\int\limits_{x'}^{x''} \frac{|\cos x|}{x^2} dx\right|$$

অর্থাৎ $$\leq \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} + \left|\int\limits_{x'}^{x''} \frac{dx}{x^2}\right|$$

$$\leq \left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}\right) + \left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}\right) = \frac{2}{x'} + \frac{2}{x''}$$

অর্থাৎ $$\left|\int\limits_{x'}^{x''} \frac{\sin x}{x} dx\right| \leq \frac{2}{x'} + \frac{2}{x''} \to 0 \quad \text{যখন} \quad x', x'' \to \infty$$

অতএব অযথার্থ সমাকল $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ অভিসারী।

(ii) এবার আমরা দেখাবো যে, $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ অপসারী

প্রথমে আমরা $\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$, যেখানে n একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। অযথার্থ সমাকলটির অভিসরণ নিয়ে আলোচনা করছি।

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx + \ldots + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

$$= \sum_1^n \int_{(r-1)\pi}^{r\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

কিন্তু $$\int_{(r-1)\pi}^{r\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{|\sin\{(r-1)\pi + t\}|}{(r-1)\pi + t} dt$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{(r-1)\pi + t} dt$$

[$\because \; |sin \; \{(r - 1) \; \pi + t\}|$

$= |\; (-1)^{r-1} \; sin \; t \,| = sin \; t$

যেহেতু $0 \leq t \leq \pi$]

যেহেতু $\quad 0 \leq t \leq \pi$

$\therefore \quad (r - 1) \pi \leq (r - 1) \pi + t \leq r\pi$

অর্থাৎ $$\frac{1}{(r-1)\pi + t} \geq \frac{1}{r\pi}$$

ফলে $$\int_{(r-1)\pi}^{r\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin t \, dt}{(r-1)\pi + t} \geq \frac{1}{r\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{2}{r\pi}$$

অতএব, $$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{\pi} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}$$

কিন্তু ডানদিকের শ্রেণীটি, (যখন $n \to \infty$) অপসারী।

ফলে, $\lim_{n\to\infty} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \infty$

যখন $x > n\pi, \int_0^{x} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx$

অতএব $\lim_{x\to\infty} \int_0^{x} \frac{|\sin x|}{x} dx = \infty$

অর্থাৎ $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ অযথার্থ সমাকলটি অপসারী।

8.6.4 সংজ্ঞা : শর্তাধীন অভিসরণ

কোন অযথার্থ সমাকল অভিসারী অথচ নিঃশর্তভাবে অভিসারী না হলে ঐ সমাকলটিকে শর্তাধীন (ভাবে) অভিসারী বলা হবে।

8.6.5 উপপাদ্য

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ সমাকলটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী হলে, এটি অভিসারী হবে।

প্রমাণ : $\int_a^{\infty} f(x)dx$ সমাকলটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী হবে, যদি $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ সমাকলটি অভিসারী হয়।

ধরি, $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ সমাকলটি অভিসারী। ফলে যে-কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর অনুসঙ্গী B(ε) পাওয়া যাবে, যার জন্য $\left|\int_{B'}^{B''} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$ অসমতাটি সিদ্ধ হবে B′, B″ > B(ε) হলে।

কিন্তু $\left|\int_{B'}^{B''} f(x)dx\right| \leq \left|\int_{B'}^{B''} |f(x)|dx\right|$

অসমতাটি সর্বদা সত্য।

এর ফলে পাই

$$\left|\int_{B'}^{B''} f(x)dx\right| \leq \left|\int_{B'}^{B''} |f(x)|dx\right| < \varepsilon \text{ যখন } B' > B'' > B\ (\varepsilon)$$

অতএব, $\int_a^{\infty} f(x)dx$ সমাকলটি অভিসরণের জন্য 'কোশি নির্ধারক' (Cauchy criterion)-এর শর্তসমূহ সিদ্ধ করে। ফলে, এই সমাকলটি অভিসারী এবং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

8.6.6 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের তুলনা পরীক্ষা

উপপাদ্য 1. $x \geq a$ হলে, যদি $f(x)$ একটি অঋণাত্মক সমাকলযোগ্য অপেক্ষক হয় এবং $\int_a^{B} f(x)dx$ B > a হলে উর্ধ্বসীমাবদ্ধ হয় তবে $\int_a^{\infty} f(x)dx$ অভিসারী হবে ; অন্যথায় এটি অসীমে অপসৃত হবে (diverges to ∞)।

প্রমাণ : $F(B) = \int_a^{B} f(x)dx, B > a$

প্রদত্ত শর্তানুসারে $F(B)$ একটি উর্ধ্বসীমাবদ্ধ ধনাত্মক ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক। কাজেই $\lim\limits_{B\to\infty} . F(B)$-এর অস্তিত্ব থাকবে এবং $\int_a^{\infty} f(x)dx$ হবে অভিসারী।

কিন্তু $F(B)$ উর্ধ্বসীমা না হলে, অসীমে অপসৃত হবে। ফলে $\int_a^{\infty} f(x)dx$ সমাকলটিও অসীমে অপসৃত হবে।

উপপাদ্য 2 : $x \geq a$ হলে যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ সমাকলনযোগ্য এমন অপেক্ষক হয় যে, $0 \leq f(x) \leq g(x)$, তাহলে

(i) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ অভিসারী হবে, যদি $\int_a^{\infty} g(x)dx$ অভিসারী হয়।

(ii) $\int_a^{\infty} g(x)dx$ অপসারী হবে, যদি $\int_a^{\infty} f(x)dx$ অপসারী হয়।

প্রমাণ :

(i) $\int_a^{x} f(x)dx \leq \int_a^{x} g(x)dx < \int_a^{\infty} g(x)dx$

এক্ষেত্রে $\int_a^\infty g(x)dx$ অভিসারী। ধরা যাক $\int_a^\infty g(x)dx = k$, ফলে উপপাদ্য 1 থেকে $\int_a^\infty f(x)dx$-এর অভিসারী প্রমাণিত হল।

(ii) $\int_a^x g(x)dx \geq \int_a^x f(x)dx$

কিন্তু $\int_a^x f(x)dx \to \infty$ যখন $x \to \infty$ ফলে $\int_a^\infty g(x)dx$ অসীমে অপসৃত হবে।

8.6.7 একটি প্রয়োজনীয় তুলনা-সমাকল (An Useful Comparison Integral)

দেখান যে, অযথার্থ সমাকল $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu}(a > 0)$ অভিসারী যখন $\mu > 1$ এবং অপসারী যখন $\mu \leq 1$

প্রমাণ : আমরা দেখি যে

$$\int_a^B \frac{dx}{x^\mu} = \frac{1}{1-\mu}\{B^{1-\mu} - a^{1-\mu}\}, \quad \text{যখন} \quad \mu \neq 1$$

এবং
$$\int_a^B \frac{dx}{x^\mu} = \log B - \log a, \quad \text{যখন} \quad \mu = 1$$

এবার B কে অসীমে চালনা করে (Making B tend to infinity) পাই

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu} = \frac{a^{1-\mu}}{\mu - 1}; \quad \text{যখন} \quad \mu > 1$$

$$= \infty \quad \text{যখন} \quad \mu \leq 1$$

$\Rightarrow$ অযথার্থ সমাকল $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu}$ অভিসারী, যখন $\mu > 1$

অপসারী, যখন $\mu \leq 1$

দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণ :

1. $\int_a^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ অভিসারী। কারণ $\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} < \frac{1}{x^2}$ যখন $x \geq a > 0$ এবং $\int_a^\infty \frac{1}{x^2}dx$ অভিসারী।

2. $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ অপসারী। কারণ $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{1}{x}$ যখন $x \geq 2$ এবং $\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ অপসারী।

3. $\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ অভিসারী। কারণ $\frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ যখন $x \geq a > 0$ এবং $\int_a^\infty \frac{1}{x^2} dx$ অভিসারী।

8.6.8 $\int_a^\infty f(x)dx$-এর অভিসরণের μ-পরীক্ষা (The μ-Test for the covergence of $\int_a^\infty f(x)dx$)

(i) ধরি $f(x)$ অপেক্ষকটি কোন ইচ্ছাধীন (a, b), $(a > 0)$ অন্তরালে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য। যদি 1 অপেক্ষা বৃহত্তর কোন সংখ্যা μ-এর জন্য $x^\mu f(x)$ সীমাবদ্ধ হয়, যখন $x \geq a$, তাহলে $\int_a^\infty f(x)dx$ নিঃশর্তভাবে অভিসারী হবে।

প্রমাণ : এখানে $|x^\mu f(x)| < A$, A একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা এবং $x \geq a > 0$

অতএব $$|f(x)| < \frac{A}{x^\mu}$$

কিন্তু, আমরা জানি যে, $\int_a^\infty \frac{dx}{x^\mu}$ অভিসারী।

ফলে, আমরা দেখি যে, $\int_a^\infty |f(x)|dx$ অভিসারী।

অতএব, $\int_a^\infty f(x)dx$ অভিসারী এবং এই অভিসরণ নিঃশর্ত।

(ii) ধরি $f(x)$ অপেক্ষকটি ইচ্ছাধীন অন্তরাল (a, b) তে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য, যেখানে, $a > 0$। 1 এর সমান অথবা 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন সংখ্যা μ-এর জন্য যদি $x^\mu f(x)$ অপেক্ষকটির ধনাত্মক নিম্নসীমা থাকে, যখন $x \geq a$, তাহলে $\int_a^\infty f(x)dx$ অসীমে অপসৃত হবে। অর্থাৎ

$$\int_a^\infty f(x)dx \to \infty$$

প্রমাণ : এখানে শর্তানুসারে $x^{\mu}f(x) \geq A > 0$, যখন $x \geq a$,

ফলে, $\dfrac{A}{x^{\mu}} \leq f(x)$

কিন্তু $\int_a^{\infty} \dfrac{dx}{x^{\mu}}$ অসীমে অপসৃত হয়, যখন $\mu \leq 1$

অতএব $\int_a^{\infty} f(x)dx$ অসীমে অপসৃত হবে। অর্থাৎ

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \to \infty$$

(iii) ধরি $f(x)$ অপেক্ষকটি একটি ইচ্ছাধীন অন্তরাল $[a, b]$ তে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য যেখানে, $a > 0$। যদি 1 থেকে ছোট অথবা 1 এর সমান কোন সংখ্যা μ-এর জন্য $x^{\mu}f(x)$ অপেক্ষকটির ঋণাত্মক ঊর্ধ্বসীমা থাকে, যখন $x \geq a$, তাহলে $-\int_a^{\infty} f(x)dx$ অসীমে অপসৃত হবে। অর্থাৎ

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \to -\infty$$

প্রমাণ : এখানে $-x^{\mu}f(x)$ অপেক্ষকটির ধনাত্মক নিম্নসীমা আছে, যখন $x \geq a$ অতএব, শর্তানুসারে $-x^{\mu}f(x) \geq A > 0$, যখন $x \geq a$,

ফলে, $\dfrac{A}{x^{\mu}} \leq -f(x)$

কিন্তু $\int_a^{\infty} \dfrac{dx}{x^{\mu}}$ অসীমে অপসৃত হয়, যখন $\mu \leq 1$

অতএব $-\int_a^{\infty} f(x)dx$ অসীমে অপসৃত হবে অর্থাৎ

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \to -\infty$$

কিন্তু $\lim\limits_{x\to\infty}(x^{\mu}f(x))$-এর অস্তিত্ব থাকলে $x^{\mu}f(x), x \geq a$-এর জন্য সীমাবদ্ধ হবে।

ধরি, $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\mu}f(x) = l$ এখন l ধনাত্মক হলে $x^{\mu}f(x)$-এর ধনাত্মক নিম্নসীমা থাকবে, যখন $x \geq X$; (যেখানে X একটি পর্যাপ্ত ধনাত্মক সংখ্যা) আবার l ঋণাত্মক হলে $x^{\mu}f(x)$-এর ঋণাত্মক ঊর্ধ্বসীমা থাকবে যখন $x \geq X$

উপরের (i) থেকে (iii) পর্যন্ত উপপাদ্যগুলি থেকে পরবর্তী উপপাদ্যটির প্রমাণ সিদ্ধ হয়।

উপপাদ্য : ধরি $f(x)$ অপেক্ষকটি একটি ইচ্ছাধীন অন্তরাল $[a, b]$ তে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য, যখন $a > 0$

1 অপেক্ষা বৃহত্তর কোন সংখ্যা μ যদি এমন হয় যে, $\lim\limits_{x\to\infty}(x^{\mu} f(x))$ বিদ্যমান, তাহলে $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ অভিসারী হবে।

1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথবা 1-এর সমান কোন সংখ্যা μ যদি এমন হয় যে, $\lim\limits_{x\to\infty}(x^{\mu} f(x))$ বিদ্যমান, কিন্তু সীমাস্থ মানটি শূন্য নয়, তাহলে $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ অপসারী।

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^{\mu} f(x)) = \pm\infty$ হলেও $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ অপসারী হবে।

8.6.9 দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণাবলী

1. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}dx$ অভিসারী, কারণ

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2 \times \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\right) = 1$$

2. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^3}{(a^2+x^2)^2}dx$ অপসারী, কারণ

$$\lim_{x\to\infty}\left(x \times \frac{x^3}{(a^2+x^2)^2}\right) = 1$$

3. $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{b^2x^2+c^2}dx$ অপসারী, কারণ

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{1/2}\times\frac{x^{3/2}}{b^2x^2+c^2}\right)=1$$

4. $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$ অভিসারী, কারণ

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2e^{-x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{e^{x^2}}\right)=0 \text{ এখানে } \mu = 2 > 1$$

5. $\int\limits_1^\infty \frac{\log x}{x^2}dx$ অভিসারী, কারণ

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{3/2}\frac{\log x}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{1/2}}=0 \text{ এখানে } \mu=\frac{3}{2}>1$$

6. $\int\limits_1^\infty \frac{x^m}{1+x^n}dx, n>0$ সমাকলটির অভিসরণের পরীক্ষা করুন।

উত্তর : এখানে

$$\frac{x^m}{1+x^n}=\frac{x^m}{x^n}\frac{1}{1+x^{-n}}=\frac{1}{x^{n-m}}g(x)$$

$$g(x)=\frac{1}{1+x^{-n}} \text{ এবং } \frac{1}{2}\le g(x)\le 1 \text{ এবং } x \ge 1$$

ফলে $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^{n-m}\frac{x^m}{1+x^n}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1$

অতএব, প্রদত্ত সমাকল, $n - m > 1$ হলে অভিসারী অন্যথা অপসারী।

7. $\int\limits_2^\infty \frac{x^2dx}{\sqrt{x^7+1}}$ সমাকলটি অভিসারী, কারণ

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{3/2}.\frac{x^2}{\sqrt{x^7+1}}\right)=1 \text{ এবং } \mu=\frac{3}{2}>1$$

8. $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

এখানে $\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = x^{-1/2}\frac{1}{1+x}$

এবং $x^{3/2}\left(x^{-1/2}\frac{1}{1+x}\right) = \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \to 1$ যখন $x \to \infty$

এখানে $\mu = \frac{3}{2} > 1$

অতএব, $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ সমাকলটি অভিসারী।

8.6.10 অযথার্থ সমাকল $\int_a^\infty f(x)dx$-এর অভিসরণের অন্য পরীক্ষাসমূহ

1. উপপাদ্য : যদি $\phi(x)$ অপেক্ষকটি $x \geq a$ হলে সীমাবদ্ধ এবং ইচ্ছাধীন $[a, b]$ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য হয় এবং অযথার্থ সমাকল $\int_a^\infty \psi(x)dx$ নিঃশর্তভাবে অভিসারী হয়, তাহলে $\int_a^\infty \phi(x)\psi(x)dx$ নিঃশর্তভাবে অভিসারী হবে।

প্রমাণ : $x \geq a$ হলে $\phi(x)$ সীমাবদ্ধ।

অতএব $|\phi(x)| < A$, যেখানে A একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা এবং $x \geq a$

আবার $\int_{x'}^{x''} |\phi(x)\psi(x)dx| = \int_{x'}^{x''} |\phi(x)||\psi(x)|dx$

$$< A\int_{x'}^{x''} |\psi(x)|dx \text{ যখন } x'' > x' > a \quad ....(1)$$

কিন্তু $\int_a^{\infty} \psi(x)dx$ নিঃশর্তভাবে অভিসারী

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} |\psi(x)|dx \text{ অভিসারী}$$

$$\Rightarrow \int_{x'}^{x''} |\psi(x)|dx \to 0 \quad \text{যখন} \quad x', x'' \to \infty$$

('কোশি নির্ধারক' অনুযায়ী)

ফলে (1) থেকে পাই

$$\int_{x'}^{x''} |\phi(x)\psi(x)|dx \to 0 \quad \text{যখন} \quad x', x'' \to \infty$$

অর্থাৎ $\int_a^{\infty} |\phi(x)\psi(x)|dx$ অভিসারী।

$$\Rightarrow \int_a^{\infty} \phi(x)\psi(x)dx \text{ নিঃশর্তভাবে অভিসারী}$$

উদাহরণ 1. প্রমাণ করুন যে

$$\int_a^{\infty} \frac{\sin x}{x^{1+n}} dx \text{ এবং } \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^{1+n}} dx$$

সমাকল দুটি n এবং a ধনাত্মক সংখ্যা হলে, নিঃশর্তভাবে অভিসারী।

প্রমাণ : এখানে $\sin x$ এবং $\cos x$, x-এর সব মানের জন্যই সীমাবদ্ধ। তাই $\sin x$ এবং $\cos x$, $x \geq a$ হলে সীমাবদ্ধ হবে। এবং এই অপেক্ষক দুটি যে-কোন সীমিত অন্তরালে সমাকলনযোগ্য।

আবার অভিসরণের μ-পরীক্ষা (μ-Test for Convergence) থেকে পাই প্রদত্ত শর্তে অর্থাৎ $a > 0,\ n > 0$ হলে $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^{1+n}}$ নিঃশর্তভাবে অভিসারী।

ফলে প্রদত্ত সমাকল দুটি উপরের উপপাদ্য অনুযায়ী নিঃশর্তভাবে অভিসারী।

উদাহরণ 2 : প্রমাণ করুন যে, a ধনাত্মক হলে

$$\int_a^{\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx \text{ নিঃশর্তভাবে অভিসারী।}$$

প্রমাণ : $\cos bx$, x-এর সব মানের জন্যই সীমাবদ্ধ তাই এই অপেক্ষকটি $x \geq a$ হলে সীমাবদ্ধ হবে এবং এটি ইচ্ছাধীন $[a, b]$ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য।

অভিসরণের μ-এর পরীক্ষা থেকে পাই,

$$\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-ax} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{ax}} = 0\ (a > 0)\ \ (\text{এখানে, } \mu = 2 > 1)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{\infty} e^{-ax}dx \quad a > 0 \text{ হলে নিঃশর্তভাবে অভিসারী।}$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{\infty} e^{-ax}\cos bx\, dx \text{ নিঃশর্তভাবে অভিসারী।}$$

উদাহরণ 3 : প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2 + x^2}\, dx \quad \text{নিঃশর্তভাবে অভিসারী}$$

উদাহরণ (1) এবং (2) এর অনুরূপভাবে নিজে করুন।

II. উপপাদ্য

ধরি, (i) $x \geq a$ হলে $\phi\ (x)$ সীমাবদ্ধ এবং সমক্রমী।

(ii) $\psi(x)$ ইচ্ছাধীন $[a, b]$ অন্তরালে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য এবং ঐ অন্তরালে সীমিত সংখ্যকবার চিহ্ন পরিবর্তন করে।

(iii) $\int_a^{\infty} \psi(x)dx$ অভিসারী

তাহলে $\int_a^{\infty} \phi(x)\psi(x)dx$ অভিসারী।

প্রমাণ : দ্বিতীয় মধ্যম-মান উপপাদ্য থেকে পাই

$$\int_{x'}^{x''} \phi(x)\psi(x)dx = \phi(x')\int_{x'}^{c} \psi(x)dx + \phi(x'')\int_{c}^{x''} \psi(x)dx \tag{1}$$

যেখানে $a < x' \leq c \leq x''$

$x \geq a$ হলে $\phi\ (x)$ সীমাবদ্ধ তাই এমন ধনাত্মক সংখ্যা M পাওয়া যাবে যে,

$$|\phi\ (x)| < M \qquad \text{যখন } x \geq a$$

অতএব

$$|\phi\ (x')| < M \text{ এবং } \qquad |\phi\ (x'')| < M \tag{2}$$

আবার $\int_a^{\infty} \psi(x)dx$ অভিসারী, এর ফলে আমরা এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা $X(\varepsilon)$ পাব যে,

$$\left|\int_{x'}^{x''} \psi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad \text{যখন } x'' > x' > X$$

এবারে আমরা (1) নং সম্পর্কের x', x'' সংখ্যা দুটিকে এমনভাবে নিই যে, $x'' > x' > X$

তাহলে
$$\left|\int_{x'}^{c} \psi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{এবং} \qquad \left|\int_{c}^{x''} \psi(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2M} \tag{3}$$

এবার (1), (2) এবং (3) থেকে পাই

$$\left|\int_{x'}^{x''}\phi(x)\psi(x)dx\right| \le M.\frac{\varepsilon}{2M} + M.\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \quad \text{যখন} \quad x'' > x' > X(\varepsilon)$$

অর্থাৎ $$\left|\int_{x'}^{x''}\phi(x)\psi(x)dx\right| \le \varepsilon, \qquad \text{যখন} \quad x'' > x' > X(\varepsilon)$$

অতএব 'কোশি নির্ধারক' অনুযায়ী প্রমাণিত হল যে, $\int_a^{\infty}\phi(x)\psi(x)dx$ অভিসারী।

উদাহরণ 1 : প্রমাণ করুন যে, $\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\sin x}{x}dx$ অভিসারী।

এখানে e^{-x} সমক্রমী অপেক্ষক। এবং $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ অভিসারী (আগে প্রমাণ করা হয়েছে)

অতএব $\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{\sin x}{x}dx$ অভিসারী।

উদাহরণ 2 : দেখান যে $\int_a^{\infty}(1-e^{-x})\frac{\cos x}{x}dx, a > 0$ হলে অভিসারী।

8.7 দ্বিতীয় রকমের (Type II) অযথার্থ সমাকলের অভিসরণ (Convergence of Improper Integrals of Type II)

যে সমস্ত অযথার্থ সমাকলের সমাকল্যের সীমিত সংখ্যক অসীম অসান্তত্য থাকে চলের প্রতিস্থাপন দ্বারা সেই সমাকলগুলোকে আমরা অসীম সীমাবিশিষ্ট অযথার্থ সমাকলে পরিবর্তিত করতে পারি। অর্থাৎ চলের প্রতিস্থাপন দ্বারা দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকলকে প্রথম রকমের অযথার্থ সমাকলে পরিবর্তিত করা যায় এবং আমাদের শুধু সমাকলন-অন্তরালের কোন প্রান্তবিন্দুতে অসীম অসান্তত্য জনিত অযথার্থ সমাকলের আলোচনা করলেই চলবে।

ধরি $\int_a^b f(x)dx$ অযথার্থ সমাকলটির $x = a$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে।

তাহলে, সংজ্ঞানুসারে

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0+} \int_{a+\lambda}^b f(x)dx, \qquad 0 < \lambda < b - a$$

ডানদিকের সমাকলে $x - a = \frac{1}{u}$ বসিয়ে পাই

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0+} \int_{(b-a)^{-1}}^{\lambda^{-1}} \frac{1}{u^2} f\left(a + \frac{1}{u}\right) du$$

$$= \int_{1/(b-a)}^{\infty} \frac{1}{u^2} f\left(a + \frac{1}{u}\right) du$$

যদি সমাকলটির অস্তিত্ব থাকে।

অনুরূপভাবে, যদি $f(b - 1) = \infty$ হয়, তাহলে

$x = b - \frac{1}{u}$ বসিয়ে পাই

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{(b-a)}^{\infty} -1 \frac{1}{u^2} f\left(b - \frac{1}{u}\right) du$$

উদাহরণ : নিচের দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকলগুলিকে প্রথম রকমের অযথার্থ সমাকলে পরিবর্তিত করে এগুলির অভিসরণের পরীক্ষা করুন :

(i) $\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x}}$

(ii) $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$

(iii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

(iv) $\int_0^1 \frac{dx}{x(1+x)}$

সমাধান :

(iii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ এখানে $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ অপেক্ষকটির $x = 0$ এবং $x = 1$ উভয়সীমাতেই অসীম অসান্তত্য আছে।

তাই $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ আকারে লিখি।

এবং $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\lambda\to 0+} \int_{\lambda}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} + \lim_{\mu\to 0+} \int_{1/2}^{1-\mu} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

ডানদিকের প্রথম সমাকলে $x = \frac{1}{u}$ এবং দ্বিতীয় সমাকলে $1 - x = \frac{1}{v}$ বসিয়ে পাই

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \lim_{\lambda\to 0+} \int_2^{1/\lambda} \frac{1}{u^2} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{u}\left(1-\frac{1}{u}\right)}} + \lim_{\mu\to 0+} \int_2^{1/\mu} \frac{1}{v^2} \frac{dv}{\sqrt{\frac{1}{v}\left(1-\frac{1}{v}\right)}}$$

$$= \int_2^{\infty} \frac{1}{u\sqrt{u-1}}\, du + \int_2^{\infty} \frac{1}{v\sqrt{v-1}}\, dv$$

$$= 2\int_2^{\infty} \frac{1}{u^{3/2}\sqrt{1-\frac{1}{u}}}\,du$$

যেহেতু $\lim\limits_{u\to\infty}\left[u^{3/2}\frac{2}{u^{3/2}\sqrt{1-\frac{1}{u}}}\right] = 2$ এবং $\frac{3}{2} > 1$

অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের μ-পরীক্ষা থেকে পাই সমাকলটি অভিসারী।

(iv) এখানে সমাকল্যটির $x = 0$ বিন্দুতে অসীম অসান্ততা আছে এবং

$$\int_0^1 \frac{dx}{x(1+x)} = \lim_{\lambda\to 0+}\int_{\lambda}^{1}\frac{dx}{x(1+x)}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0+}\int_1^{1/\lambda}\frac{1}{u^2}\frac{du}{\frac{1}{u}\left(1+\frac{1}{u}\right)} \quad \left[\ x = \frac{1}{u} \text{ বসিয়ে }\right]$$

$$= \int_1^{\infty}\frac{du}{u+1}$$

এখন $\lim\limits_{u\to\infty}\left(u.\frac{1}{u+1}\right) = 1$ এবং $\mu = 1$

ফলে, অভিসরণের μ-পরীক্ষা দ্বারা পাই যে প্রদত্ত সমাকলটি অপসারী।

(i) ও (ii) নিজে করুন।

8.7.1 দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের সংজ্ঞা, 'কোশি নির্ধারক' এবং অন্যান্য উপপাদ্য

সংজ্ঞা : ধরি $f(x)$ অপেক্ষকটি $[a, b]$, $a < x \leq b$ অন্তরালে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য

এবং এর একমাত্র $x = a$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে। অযথার্থ সমাকল $\int_a^b f(x)dx$ অভিসারী হবে এবং এর মান হবে, I, যদি যে-কোন প্রদত্ত ক্ষুদ্রসংখ্যা ε-এর জন্য এরূপ একটি ধনাত্মক সংখ্যা $\delta = \delta\,(\varepsilon)$ নির্ণয় করা সম্ভব যাতে করে

$$\left| I - \int_{a+\lambda}^{b} f(x)dx \right| < \varepsilon \qquad \text{যখন } 0 < \lambda < \delta\,(\varepsilon)$$

কোশি-নির্ধারক : অযথার্থ সমাকল $\int_a^b f(x)dx$-এর অভিসরণের একটি প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হচ্ছে, কোন প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর জন্য এরূপ একটি ধনাত্মক সংখ্যা $\delta = \delta(\varepsilon)$ নির্ণয় করা সম্ভব যাতে করে

$$\left| \int_{a+\lambda}^{a+\mu} f(x)dx \right| < \varepsilon, \qquad \text{যখন } 0 < \lambda < \mu < \delta\,(\varepsilon)$$

উদাহরণ : $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}}\,dx$-এর অভিসরণের পরীক্ষা করুন।

উত্তর : (0, 1) অন্তরালে

$$\left| \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| = \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{x}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$$

এবং

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[2x^{1/2}\right]_\varepsilon^1$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right] = 2$$

অর্থাৎ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ অভিসারী

$\therefore$ $\int_0^1 \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| dx$ অভিসারী এবং $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ নিঃশর্তভাবে অভিসারী।

8.7.2 দ্বিতীয় তুলনা-সমাকল (প্রথম তুলনা-সমাকল 8.6.7-এ বর্ণিত হয়েছে)

$\int_{a+}^{b} \frac{dx}{(x-a)^P}$ সমাকলটি $0 < p < 1$, হলে অভিসারী

$1 \le p < \infty$ হলে অপসারী

$-\infty < p \le 0$ হলে যথার্থ

প্রমাণ : $p \neq 1$ হলে $\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{1}{1-p}\left\{(b-a)^{1-p} - \varepsilon^{1-p}\right\}$

এবং $p = 1$ হলে $\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x-a} = [\log(b-a) - \log\varepsilon]$

অতএব $\int_{a+}^{b} \frac{dx}{(x-a)^P} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$, যখন $0 < p < 1$

$= \infty$, যখন $p \ge 1$

এবং $p \le 0$ হলে সমাকলটি যথার্থ।

নিঃশর্ত এবং শর্তাধীন অভিসরণ :

সংজ্ঞা : ধরি একটি সীমিত অন্তরাল (a, b)-এর একমাত্র a বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকটির অসীম

অসান্তত্য আছে। $\int_a^b f(x)dx$ অযথার্থ সমাকলটিকে নিঃশর্তভাবে অভিসারী বলা হবে যদি অপেক্ষকটি যে কোন ইচ্ছাধীন অন্তরাল $[a + \lambda, b]$ তে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য হয়, যেখানে $0 < \lambda < b - a$ এবং $\int_a^b |f(x)|dx$ অভিসারী হয়। কিন্তু যদি $\int_a^b f(x)dx$ অভিসারী হয় অথচ $\int_a^b |f(x)|dx$ অপসারী হয় তাহলে বলা হবে $\int_a^b f(x)dx$ শর্তাধীনভাবে অভিসারী।

উপপাদ্য : অযথার্থ সমাকল $\int_a^b f(x)dx$ যার সমাকল্য $f(x)$-এর একমাত্র a বিন্দুতেই অসীম অসান্তত্য আছে, নিঃশর্তভাবে অভিসরী হলে ঐ সমাকলটি অভিসারী হবে।

প্রমাণ : যেহেতু $\int_a^b |f(x)|dx$ অভিসারী, কোশি নির্ধারক অনুসারে এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা $\delta(\varepsilon)$ পাওয়া যাবে যে

$$\left|\int_{a+\lambda}^{a+\mu} |f(x)|\, dx\right| < \varepsilon \qquad \text{যখন} \qquad 0 < \lambda < \mu < \delta\ (\varepsilon)$$

আবার আমরা জানি যে

$$\left|\int_{a+\lambda}^{a+\mu} f(x)dx\right| \le \left|\int_{a+\lambda}^{a+\mu} |f(x)|\, dx\right|$$

ফলে
$$\left|\int_{a+\lambda}^{a+\mu} f(x)dx\right| < \varepsilon \qquad \text{যখন} \qquad 0 < \lambda < \mu < \delta\ (\varepsilon)$$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx$ অভিসারী।

8.7.3 তুলনা পরীক্ষাসমূহ

দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের পরীক্ষাগুলির প্রথম রকমের অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের পরীক্ষাগুলির সঙ্গো খুবই সাদৃশ্য আছে। এই অনুচ্ছেদে পরীক্ষাগুলি বর্ণিত হচ্ছে।

উপপাদ্য 1 : ধরি, $f(x)$ অপেক্ষকটি ইচ্ছাধীন অন্তরাল $(a + \lambda.\ b)$ তে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য। যেখানে, $0 < \lambda < b - a$. যদি $0 < \mu < 1$ হলে, $(x - a)^{\mu} f(x)$ অপেক্ষকটি সীমাবদ্ধ হয়, যখন $a < x \leq b$ তাহলে $\int_a^b f(x)dx$ নিঃশর্তভাবে অভিসারী হবে।

উপপাদ্য 2 : ধরি, $f(x)$ অপেক্ষকটি ইচ্ছাধীন অন্তরাল $(a + \lambda.\ b)$ তে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য। যেখানে, $0 < \lambda < b - a$। 1 অপেক্ষা বৃহত্তর কিংবা 1-এর সমান কোন সংখ্যা μ-এর জন্য যদি $(x - a)^{\mu} f(x)$-এর একটি ধনাত্মক নিম্নসীমা থাকে, যখন $a < x \leq b$ তাহলে $\int_a^b f(x)dx \to \infty$ আবার এক্ষেত্রে যদি $(x-a)^{\mu} f(x)$ -এর একটি ঋণাত্মক উর্ধ্বসীমা থাকে তাহলে $\int_a^b f(x)dx \to -\infty$

উপপাদ্য 3 : ধরি, $f(x)$ অপেক্ষকটি ইচ্ছাধীন অন্তরাল $(a + \lambda.\ b)$ তে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য। যেখানে, $0 < \lambda < b - a$। 1 থেকে ছোট কোন ধনাত্মক সংখ্যা μ-এর জন্য যদি $\lim_{x \to a+} (x-a)^{\mu} f(x)$-এর অস্তিত্ব থাকে, তাহলে $\int_a^b f(x)dx$ নিঃশর্তভাবে অভিসারী হবে। এক্ষেত্রে, $\mu \geq 1$ হলে এবং $\lim_{x \to a+} (x-a)^{\mu} f(x) \neq 0$ হলে $\int_a^b f(x)dx$ অপসারী হবে।

যদি $x \to a + 0 \Rightarrow (x-a)^{\mu} f(x) \to +\infty \qquad \mu \geq 1$

অথবা $(x - a)^{\mu} f(x) \to \infty$

তাহলেও $\int_a^b f(x)dx$ অপসারী হবে।

$x = a$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকটির অসীম অসান্তত্য থাকলে, এই পরীক্ষাটিকে $\int_a^b f(x)dx$ অযথার্থ সমাকলটির অভিসরণের μ-পরীক্ষা বলা হয়।

উদাহরণ 1. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$ অভিসারী।

এখানে $\frac{\log x}{\sqrt{x}}$ অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে।

এবং

$$\lim_{x\to 0+}(x-0)^{3/4}\frac{\log x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\log x}{x^{-1/4}} \quad \left(\text{আকার } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{4}x^{-5/4}}$$

$$= \lim_{x\to 0+}(-4x^{1/4}) = 0$$

এখানে $\mu = \frac{3}{4} < 1$

ফলে, প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী।

উদাহরণ 2. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\log x}dx$ অপসারী।

এখানে $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$ অপেক্ষকটির $x = 1$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে।

এবং $\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^{\mu}\sqrt{x}}{\log x} \quad \left(\text{আকার } \frac{\infty}{\infty}\right)$

$$= \lim_{x\to 1+}\frac{\mu(x-1)^{\mu-1}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)^{\mu}}{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{array}{ll} = 1 & \text{যখন} \quad \mu = 1 \\ = 0 & \text{যখন} \quad \mu \geq 1 \end{array} \quad \Rightarrow \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\log x}dx \text{ সমাকলটি অপসারী।}$$

8.8 দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণাবলী

1. প্রমাণ করুন যে, নিম্নলিখিত অযথার্থ সমাকলগুলি অভিসারী নয়।

(i) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}$

(ii) $\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\, dx$

(iii) $\int_a^{b} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}}$

(iv) $\int_0^{1} \frac{dx}{x^2(1+x)^3}$

প্রমাণ : (i) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}$ $x = 0$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে।

আবার $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{2\sin^2 \frac{x}{2}}$

$$= 2 \lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}}\right]^2 = 2$$

অতএব, দ্বিতীয় রকম অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের μ-পরীক্ষা অনুযায়ী ($\mu = 2 > 1$) প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী নয়।

(ii) $\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\, dx$, $x = 0$ বিন্দুতে এবং $x = \pi$ বিন্দুতে সমাকল্যের অসীম অসান্তত্য আছে।

তাই

$$\int_{0+}^{\pi-} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx = \int_{0+}^{\pi/2} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi-} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx$$

$$= I_1 + I_2$$

যেখানে

$$I_1 = \int_{0+}^{\pi/2} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx$$

এবং

$$\lim_{x\to 0+} (x-0)^{1/2} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sin x} = 1$$

ফলে, অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের μ-পরীক্ষা থেকে পাই I_1 অভিসারী (যেহেতু $\mu = \frac{1}{2} < 1$)

আবার

$$I_2 = \int_{\pi/2}^{\pi-} \frac{\sqrt{x}}{\sin x}\,dx$$

$x = \pi$ বিন্দুতে সমাকল্যের অসীম অসান্তত্য আছে।

এবং

$$\lim_{x\to\pi-} (\pi - x)\frac{\sqrt{x}}{\sin x} \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ আকার}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pi-} \frac{(\pi - x)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{\cos x} = \sqrt{\pi}$$

অতএব, অভিসরণের μ-পরীক্ষা থেকে পাই I_2 অপসারী ($\mu = 1$)

ফলে $I = I_1 + I_2$ অপসারী।

(iii) $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}}$ এখানে সমাকল্য $\frac{1}{(x-a)\sqrt{b-x}}$-এর $x - a$ এবং $x = b$ উভয় বিন্দুতেই অসীম অসান্তত্য আছে।

তাই

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}} \text{ কে লিখি}$$

$$I = \int_a^c \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}} + \int_c^b \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}}$$

যেখানে $a < c < b$, c, $[a, b]$ অন্তরালের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু।

ধরি

$$I_1 = \int_a^c \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}}, \; x = a \text{ বিন্দুতে সমাকল্যের অসীম অসান্তত্য।}$$

এবং

$$\lim_{x \to a+} (x-a)\frac{1}{(x-a)\sqrt{b-x}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$$

অতএব, অভিসরণের μ-পরীক্ষা থেকে পাই, I_1 অপসারী

আবার

$$\int_c^b \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}} = I_2 \text{ ধরে দেখি}$$

I_2 সমাকলের সমাকল্যের $x = b$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে।

এখানে

$$\lim_{x\to b-}(b-x)^{1/2}\frac{1}{(x-a)\sqrt{b-x}} = \frac{1}{b-a};\ \mu = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ I_2 \text{ অভিসারী।}$$

ফলে, $I + I_1 + I_2 =$ অপসারী।

(iv) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2(1+x)^3}$, $x = 0$ সমাকল্যের বিশিষ্ট বিন্দু

এবং

$$\lim_{x\to 0} x^2 \frac{1}{x^2(1+x)^3} = 1 \text{ (এখানে } \mu = 2 > 1)$$

$\Rightarrow$ প্রদত্ত সমাকল অপসারী।

2. প্রমাণ করুন যে, $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$, $m > 0$, $n > 0$ হলে অভিসারী।

প্রমাণ : $m \geq 1$, $n \geq 1$ হলে সমাকলটি যথার্থ।

$x = 0$ বিন্দুটিতে অসীম অসান্তত্য আছে যখন $m < 1$

আবার $x = 1$ বিন্দুটিতে অসীম অসান্তত্য থাকবে যখন $n < 1$

ধরি, $m < 1$ এবং $n < 1$, আমরা প্রদত্ত সমাকলটিকে নিচের দুটি সমাকলেরে যোগফল আকারে লিখি

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

$$= \int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx + \int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

অর্থাৎ $I = I_1 + I_2$

যেখানে $I_1 = \int_0^{1/2} x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$

এবং $I_2 = \int_{1/2}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$

I_1-এর 0 বিন্দুতে এবং I_2-এর 1 বিন্দুতে অসীম অসান্ততা আছে।

0 বিন্দুতে অভিসরণের জন্য

$$\lim_{x\to} . x^{\mu} . x^{m-1}(1-x)^{n-1} \text{ নির্ণয় করা যাক।}$$

$$= \lim_{x\to 0} x^{\mu+m-1}(1-x)^{n-1}\text{-এর অস্তিত্ব থাকবে}$$

যখন, $\quad \mu + m - 1 > 0 \quad \Rightarrow \mu > 1 - m$

$\Rightarrow 1 - m < \mu$

আবার, I_1 অভিসারী হবে, যখন $\mu < 1$

অতএব, I_1 অভিসারী হবে, যখন $1 - m < \mu < 1 \Rightarrow m > 0$

1 বিন্দুতে অভিসরণের পরীক্ষার জন্য

$$\lim_{x\to 1-} x^{m-1}(1-x)^{n-1+\mu} \text{ নির্ণয় করা যাক।}$$

এর সীমাস্থ মানের অস্তিত্ব থাকবে যখন $n - 1 + \mu > 0$

অর্থাৎ যখন $\mu > 1 - n$

যখন $1 - n < \mu$

আবার, অভিসরণের μ-পরীক্ষার শর্ত থেকে পাই

I_2 অভিসারী হবে যদি $\mu < 1$ হয়

অর্থাৎ $1 - n < \mu < 1$ হয় $\Rightarrow n > 0$ হয়

তাহলে প্রমাণ হল যে, প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী যখন $m > 0$ এবং $n > 0$

মন্তব্য : $m > 0$, $n > 0$ হলে অভিসারী সমাকল

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \text{ কে বিটা অপেক্ষক বলা হয়।}$$

এবং লেখা হয়

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx, \quad m > 0,\ n > 0$$

3. প্রমাণ করুন যে, $\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ অভিসারী যদি এবং একমাত্র যদি $a > 0$ হয়।

প্রমাণ : ধরি $f(x) = xa^{-1}, e^{-}x$, এখানে $f(x)$-এর $x = 0$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য থাকবে যদি $a < 1$ হয়। আবার সমাকলটির উর্ধ্বসীমা অসীম। এক্ষেত্রে আমরা প্রদত্ত সমাকলটিকে দুটি সমাকলের যোগফল আকারে লিখে পাই,

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx + \int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$$

$$= I_1 + I_2$$

যেখানে, $I_1 = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$-এর সমাকল্যের $x = 0$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে। এই বিন্দুতে অভিসরণের μ-পরীক্ষা প্রয়োগ করি।

$$\lim_{x \to 0+} x^{\mu+a-1}e^{-x} = 0 \text{ যদি এবং একমাত্র যদি } \mu + a - 1 > 0 \text{ হয়}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - a < \mu \text{ হয়}$$

আবার, দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের μ-পরীক্ষার শর্ত থেকে পাই I_1 অভিসারী হবে যদি এবং একমাত্র যদি $\mu < 1$ হয়।

অতএব, I_1 অভিসারী হবে যদি এবং একমাত্র যদি $1 - a < \mu < 1 \Leftrightarrow a > 0$

$I_2 = \int_1^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ সমাকলটির অভিসরণের পরীক্ষা

আমরা জানি যে

$$e^x > x^{a+1} \quad a\text{-এর যে-কোন মানের জন্য}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} > e^{-x}x^{a-1}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-x}x^{a-1} < \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < e^{-x}x^{a-1} < \frac{1}{x^2} \qquad x\text{-এর সকল মানের জন্য}$$

$$\therefore \quad 0 < e^{-x}x^{a-1} < \frac{1}{x^2} \qquad \text{যখন } x \geq 1$$

আবার, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ অভিসারী।

অতএব, $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$ অভিসারী হবে (8.6.6 পরিচ্ছেদে তুলনা পরীক্ষা, উপপাদ্য 2 দ্রষ্টব্য) a-এর সব মানের জন্য।

অতএব, $\int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ অভিসারী হবে, যদি এবং একমাত্র যদি $a > 0$ হয়।

4. প্রমাণ করুন যে, $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{1+n}} dx$ সমাকলটি $0 < n < 1$ হলে অভিসারী।

প্রমাণ : $n = 0$ হলে সমাকল্য $\frac{\sin x}{x^{1+n}} = \frac{\sin x}{x}$

যেহেতু, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$x = 0$ বিন্দুতে সমাকল্যের দূরীকরণযোগ্য অসান্তত্য আছে।

ফলে, এক্ষেত্রে $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{1+n}} dx$ সমাকলটি যথার্থ।

আবার, $n < 0$ হলে ধরা যাক, $n = -m$ যেখানে $m > 0$

এক্ষেত্রে, সমাকল্য $= \frac{\sin x}{x^{1-m}} = x^m \frac{\sin x}{x}$

এবং $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^{1-m}} = \lim_{x \to 0} x^m \frac{\sin x}{x} = 0$

অতএব, $f(x) = \frac{\sin x}{x^{1+n}}$ অপেক্ষকটি এক্ষেত্রে $x = 0$ বিন্দুতে সন্তত। তাই দেখা যাচ্ছে সমাকলটি $n \leq 0$ হলে যথার্থ।

আবার, যেহেতু $\lim_{x \to 0} x^n \frac{\sin x}{x^{1+n}} = 1$

অভিসরণের μ-পরীক্ষা থেকে পাই, $0 < n < 1$ হলে সমাকলটি অভিসারী এবং $n \geq 1$ হলে এটি অপসারী।

5. দেখান যে

$$\int_0^{\pi/2} \cos 2nx \log \sin x \, dx$$

সমাকলটি অভিসারী এবং এর মান $= -\dfrac{\pi}{4n}$

প্রমাণ : সমাকল্য $f(x) \cos 2nx \log \sin x$-এর $x = 0$ বিন্দুতেই একমাত্র অসীম অসান্তত্য আছে। দ্বিতীয় রকম (Type II) অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের μ-পরীক্ষার প্রয়োগ করে পাই

$$\lim_{x \to 0+} x^{\mu} \cos 2nx \log \sin x$$

$$= \lim_{x \to 0+} \cos 2nx \frac{\log \sin x}{x^{-\mu}} \quad \left(\text{অনির্ণেয় আকার } \frac{\infty}{\infty}\right) \text{ যখন } \mu > 0$$

এখন, $$\lim_{x \to 0+} \frac{\log \sin x}{x^{-\mu}} \quad \left(\text{আকার } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{\sin x} \cos x\right) \Big/ -\mu x^{-\mu-1}$$

$$= -\lim_{x \to 0+} \frac{x^{\mu+1}}{\sin x} \cos x$$

$$= -\lim_{x \to 0+} \frac{x}{\sin x} . x^{\mu} . \cos x$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} . \lim_{x \to 0+} x^{\mu} . \lim_{x \to 0+} \cos x$$

$$= 0 \qquad \text{যখন} \qquad \mu > 0$$

অতএব, $\lim\limits_{x\to 0+} \cos 2nx \dfrac{\log \sin x}{x^{-\mu}}$

$$= \lim_{x\to 0+} \cos 2nx . \lim_{x\to 0+} \frac{\log \sin x}{x^{-\mu}}$$

$$= 1\cdot 0 = 0$$

ফলে, ধনাত্মক অথচ 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এমন সংখ্যা μ পাওয়া যাচ্ছে যে,

$$\lim_{x\to 0} x^{\mu} f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী।

এখন আংশিক সমাকল করে পাই

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \cos 2nx \, dx = \left[\frac{1}{2n} \sin 2nx \log \sin x\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2m} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx \cos x}{\sin x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2nx \cos x}{\sin x} dx$$

$$\left[\text{প্রমাণ করুন যে } \lim_{x\to 0+} \sin 2nx \log \sin x = 0\right]$$

$$= -\frac{1}{4n} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x}{\sin x} dx \qquad \text{(A)}$$

যেহেতু,

$$\sin(2m+1)x - \sin x = \sum_1^m [\sin(2r+1)x - \sin(2r-1)x]$$

$$= \sum_1^m 2 \cos 2rx \sin x$$

অতএব

$$\frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} = 1 + \sum_{1}^{m} 2\cos 2rx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} + \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}$$

$$= 2 + \sum_{1}^{n} 2\cos 2rx + \sum_{1}^{n-1} 2\cos 2rx$$

সমাকল্যের এই মান (A) তে বসিয়ে এবং সমাকল করে পাই

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos 2nx \log \sin x dx = -\frac{2}{4n}\,\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4n}$$

[লক্ষ্য করুন যে

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos 2rx\, dx = \left[\frac{\sin 2rx}{2r}\right]_{0}^{\pi/2} = 0]$$

6. $\int_{0}^{1} x^{n-1} \log x\, dx$ সমাকলটি অভিসরণ বা অপসরণ বিষয়ে আলোচনা করুন।

প্রমাণ : যেহেতু $\lim\limits_{x\to 0+} x^r \log x = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\log x}{x^{-r}} \qquad (r > 0)$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x(-r)x^{-r-1}}$$

$$= -\lim_{x\to 0+} \frac{1}{r} x^r = 0 \qquad \text{যখন } r > 0$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকলটি $n > 1$ হলে একটি যথার্থ সমাকল।

আবার আমরা জানি যে

$$\int_{x}^{1} \log t\, dt = [t(\log t - 1)]_{x}^{1} = x(1 - \log x) - 1$$

অতএব $\int_0^1 \log x\, dx = \lim_{x \to 0}[x(1 - \log x) - 1] = -1$

আবার

$$\lim_{x \to 0+}[x^{\mu} . x^{n-1} \log x]$$

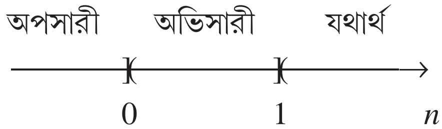
$$= \lim_{x \to 0+}[x^{\mu+n-1} \log x] = 0 \text{ যখন } \mu > 1 - n$$

এবং যখন $0 < n < 1$, আমরা একটি ধনাত্মক অথচ 1 অপেক্ষা বৃহত্তর একটি সংখ্যা μ পাবো যেটি $\mu > 1 - n$ শর্তটিকে সিদ্ধ করবে।

অতএব, $0 < n \le 1$ হলে $\int_0^1 x^{n-1} \log x\, dx$ সমাকলটি অভিসারী।

সর্বশেষে $\lim_{x \to 0+}(x . x^{n-1} \log x) = \lim_{x \to 0+} x^n \log x = \infty$ যখন $n \le o$

অতএব $\int_0^1 x^{n-1} \log x\, dx$ সমাকলটি $n \le 0$ হলে অপসারী।



7. $\int_{0+}^{1/2} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha} dx$ সমাকলটির অভিসরণের পরীক্ষা করুন।

প্রমাণ : ধরি

$$f(x) = \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha}, \; 0 < x \le \frac{1}{2}$$

$f(x)$ অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতে অসীম অসান্ততা আছে।

এখন, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha}$

$= 0$ যখন $\alpha < 0$

এবং $f(x) = 1,$ যখন $\alpha = 0$

অতএব, প্রদত্ত সমাকলটি $\alpha \le 0$ হলে যথার্থ।

আবার, $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\mu} f(x) = \lim\limits_{x \to 0+} x^{\mu} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha}$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\left(\log \frac{1}{x}\right)^{\alpha}}{x^{-\mu}}$$

$$= \lim_{u \to \infty} \frac{(\log u)^{\alpha}}{u^{\mu}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$ যখন $\alpha > 0,\ \mu > 0$

$$\lim_{x \to 0+} x^{\mu} f(x) = \lim_{u \to \infty} \frac{\alpha (\log u)^{\alpha - 1}}{\mu u^{\mu}} = 0$$ যখন $0 < \alpha < 1$

$\alpha > 1$ হলে

$$\lim_{x \to 0+} x^{\mu} f(x) = \lim_{u \to \infty} \frac{\alpha (\log u)^{\alpha - 1}}{\mu u^{\mu}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{u \to \infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)(\log u)^{\alpha - 2}}{\mu^2 u^{\mu}} = 0$$ যখন $\alpha < 2$

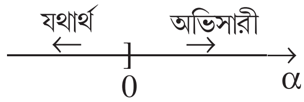
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে α, যে-কোন ধনাত্মক সংখ্যা হলে

$\lim\limits_{x \to 0+} x^{\mu} f(x) = 0$ যখন $\mu > 0$

অতএব 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এমন ধনাত্মক সংখ্যা μ পাওয়া যাবে যে,

$$\lim_{x\to 0+} x^{\mu} f(x) = 0 \qquad \text{যখন} \qquad \alpha > 0$$

ফলে, প্রদত্ত সমাকলটি $\alpha > 0$ হলে অভিসারী। অর্থাৎ $\alpha \le 0$ হলে সমাকল যথার্থ এবং $\alpha > 0$ হলে অভিসারী।



8. $\int\limits_{0+}^{1/3} \left[\log\left(\log \frac{1}{x}\right)\right]^{\alpha} dx$ সমাকলটির অভিসরণের পরীক্ষা করুন।

প্রমাণ : ধরি $f(x) = \left[\log\left(\log \frac{1}{x}\right)\right]^{\alpha}$

$f(x)$ অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতেই একমাত্র অসীম অসান্তত্য আছে।

এখন, $$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\left[\log\left(\log \frac{1}{x}\right)\right]^{\alpha}$$

$$= \lim_{u\to\infty}[\log(\log u)]^{\alpha}$$

$$= 0 \qquad \text{যখন} \qquad \alpha < 0$$

এবং $f(x) = 1$ যখন $\alpha = 0$

অতএব, প্রদত্ত সমাকলটি $\alpha \le 0$ হলে যথার্থ।

আবার $$\lim_{x\to 0+} x^{\mu} f(x) = \lim_{x\to 0+} x^{\mu}\left[\log\left(\log \frac{1}{x}\right)\right]^{\alpha}$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{[\log(\log u)]^{\alpha}}{u^{\mu}} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \text{যখন } \alpha > 0,\ \mu > 0$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{\alpha[\log(\log u)]^{\alpha-1}}{\mu u^{\mu-1} u \log u}$$

$$= \lim_{u\to\infty} \frac{\alpha[\log(\log u)]^{\alpha-1}}{\mu u^{\mu} \log u}$$

$$= 0 \qquad \text{যখন} \quad \alpha \le 1,\ \mu > 0$$

$\alpha > 1$ হলে

$$\lim_{x\to 0+} x^{\mu} f(x) = \lim_{u\to\infty} \frac{\alpha[\log(\log u)]^{\alpha-1}}{\mu u^{\mu} \log u} \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{u\to} \frac{\alpha(\alpha-1)[\log(\log u)]^{\alpha-2}}{\mu u^{\mu}\{1+\mu \log u\} \log u}$$

$$= 0 \qquad \text{যখন} \quad \alpha \le 2,\ \mu > 0$$

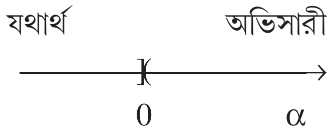
অনুরূপভাবে দেখানো যেতে পারে যে

$$\lim_{x\to 0+} x^{\mu} f(x) = 0 \qquad \text{যখন} \quad \alpha > 0,\ \text{এবং}\ \mu > 0$$

অতএব, যখন $\alpha > 0$, আমরা এমন একটি ধনাত্মক অথচ 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর সংখ্যা μ পাবো যে

$$\lim_{x\to 0+} x^{\mu} f(x) = 0$$

অর্থাৎ প্রদত্ত সমাকলটি $\alpha > 0$ হলে অভিসারী।



9. প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \log \sin x \, dx$$

সমাকলটি অভিসারী এবং এর মান হচ্ছে $\dfrac{2}{e}$

প্রমাণ : এখানে সমাকল্য অপেক্ষক *sin x log sin x*-এর $x = 0$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে।

এখন, $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{\pi/2} \sin x \log \sin x \, dx$

সমাকলটিকে আংশিক সমাকলন পদ্ধতিতে সমাকলন করে পাই

$$I(\lambda) = [-\cos x \log \sin x]_{\lambda}^{\pi/2} + \int_{\lambda}^{\pi/2} \cos x \cot x \, dx$$

$$= \left[\cos \lambda \log \sin \lambda - \cos \frac{\pi}{2} \log \sin \frac{\pi}{2}\right] + \int_{\lambda}^{\pi/2} \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} dx$$

$$= \cos \lambda \log \sin \lambda + \int_{\lambda}^{\pi/2} (\operatorname{cosec} x - \sin x) dx$$

$$= \cos \lambda \log \sin \lambda + \left[\cos x + \log \tan \frac{x}{2}\right]_{\lambda}^{\pi/2}$$

$$= \cos \lambda \log \sin \lambda + \left[\left(\cos \frac{\pi}{2} + \log \tan \frac{\pi}{2}\right) - \left(\cos \lambda + \log \tan \frac{\lambda}{2}\right)\right]$$

$$= \cos \lambda \log \sin \lambda - \cos \lambda - \log \tan \frac{\lambda}{2}$$

$$= \cos \lambda \log\left(2 \sin \frac{\lambda}{2} \cos \frac{\lambda}{2}\right) - \cos \lambda - \log \frac{\sin \frac{\lambda}{2}}{\cos \frac{\lambda}{2}}$$

$$= \cos \lambda \left\{\log 2 + \log \sin \frac{\lambda}{2} + \log \cos \frac{\lambda}{2}\right\} - \cos \lambda - \log \sin \frac{\lambda}{2} + \log \cos \frac{\lambda}{2}$$

$$= \cos \lambda (\log 2 - 1) + \log \sin \frac{\lambda}{2} (\cos \lambda - 1) + \log \cos \frac{\lambda}{2} (\cos \lambda + 1)$$

অর্থাৎ

$$I(\lambda) = \left(\log \frac{2}{e}\right)\cos\lambda + 2\cos^2\frac{\lambda}{2}\log\cos\frac{\lambda}{2} - 2\sin^2\frac{\lambda}{2}\log\sin\frac{\lambda}{2}$$

এখন

$$\lim_{\lambda\to 0+} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0+}\left[\left(\log \frac{2}{e}\right)\cos\lambda + 2\cos^2\frac{\lambda}{2}\log\cos\frac{\lambda}{2} - 2\sin^2\frac{\lambda}{2}\log\sin\frac{\lambda}{2}\right]$$

$$= \log\frac{2}{e} - \lim_{\lambda\to 0+} 2\sin^2\frac{\lambda}{2}\log\sin\frac{\lambda}{2}$$

$$= \log\frac{2}{e} - 2\lim_{\lambda\to 0+}\frac{\log\sin\frac{\lambda}{2}}{\operatorname{cosec}^2\frac{\lambda}{2}}$$

আবার

$$\lim_{\lambda\to 0+}\frac{\log\sin\frac{\lambda}{2}}{\operatorname{cosec}^2\frac{\lambda}{2}} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{\lambda\to 0+}\frac{\frac{1}{2}\cot\frac{\lambda}{2}}{-2\operatorname{cosec}^2\frac{\lambda}{2}\cot\frac{\lambda}{2}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0+} -\frac{1}{2}\frac{1}{\operatorname{cosec}^2\frac{\lambda}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\lambda\to 0}\sin^2\frac{\lambda}{2} = 0$$

অতএব

$$\lim_{\lambda \to 0+} I(\lambda) = \log \frac{2}{e}$$

অতএব, প্রদত্ত সমাকলটি অভিসারী এবং এর মান $\log \frac{2}{e}$

মন্তব্য : দ্বিতীয় রকম (Type II) অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের μ-পরীক্ষা দ্বারাও সমাকলটির অভিসরণ প্রমাণ করা যায়।

10. আংশিক পদ্ধতিতে সমাকলন করে পাওয়া যায়

$$\int_1^x \cos t \log t dt = \sin x \log x - \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$$

প্রমাণ করুন যে

$$\int_1^\infty \cos x \log x \, dx$$

সমাকলটির অসীম দোলন (Infinite oscillation) আছে।

আরো দেখান যে,

$$\int_o^1 \cos x \log x \, dx \text{ অভিসারী এবং}$$

$$\int_0^1 \cos x \log x \, dx = -\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

প্রমাণ :
$$\int_1^\infty \cos x \log x \, dx = \lim_{x \to \infty} \int_1^x \cos t \log t \, dt$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\sin x \log x - \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \right]$$

কিন্তু
$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \to \infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt \text{ অভিসারী}$$

[8.6.3 পরিচ্ছেদ দেখুন]

এবং $\sin\ x\ log\ x$ অপেক্ষকটি $x \to \infty$ হলে অসীমভাবে দোদুল্যমান হয়।

[ধরি x চলটি $\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2}\right\}_1^{\infty}$ অনুক্রমটি অবলম্বন করে অসীমে অপসরণ করে ($x \to \infty$ over the sequence $\left\{(2n-1)\frac{\pi}{2}\right\}$)

তাহলে

$$\lim_{x\to\infty} \sin x \log x = \lim_{n\to\infty} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2}\log(2n-1)\frac{\pi}{2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\log(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

এ থেকে দেখা যাচ্ছে যে, $\sin x \log x$ অপেক্ষকটি $-\infty$ থেকে $+\infty$-এর মধ্যে দোদুল্যমান হচ্ছে।]

অতএব, $\int_1^{\infty} \cos x \log x \, dx$ সমাকলটির অসীম দোলন আছে।

দ্বিতীয় অংশ

$$\int_x^1 \cos t \log t \, dt = [\sin t \log t]_x^1 - \int_x^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$$
$$= -\sin x \log x - \int_x^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$$

অতএব,

$$\lim_{x\to 0+} \int_x^1 \cos t \log t \, dt = -\lim_{x\to 0+}\left[\sin x \log x + \int_x^1 \frac{\sin t}{t}\, dt\right] \quad (1)$$

কিন্তু

$$\lim_{x\to 0+} \sin x \log x = \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{\operatorname{cosec} x} \quad \left[\text{আকার } \frac{\infty}{\infty}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0+} - \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{cosec} x \cot x}$$
$$= -\lim_{x\to 0+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(\tan x)$$
$$= -\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0+}(\tan x)$$

$= 1 \times 0 = 0$

এবং $\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt =$ একটি যথার্থ সমাকল।

অতএব, (1) থেকে পাই, $\int_0^1 \cos t \log t \, dt$

সমাকলটি অভিসারী এবং এর মান $= -\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$

8.9 সারাংশ

প্রধানতঃ দুটি কারণে কোন সমাকল অযথার্থ হতে পারে :

(1) সমাকলটির অন্তরাল অসীম হলে।

(2) সমাকলটির সমাকল্যের সীমিত সংখ্যক অসীম অসান্তত্য থাকলে।

প্রথম রকমের (Type I) অযথার্থ সমাকল :

(i) $\int_a^\infty f(x)dx$ এখানে উর্ধ্বসীমা অসীম।

(ii) $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ এখানে নিম্নসীমা অসীম।

(iii) $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ উভয় সীমাই অসীম।

এদের সংজ্ঞা :

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx$$

(c একটি যদৃচ্ছ সংখ্যা)

দ্বিতীয় রকমের (Type II) অযথার্থ সমাকল :

(i) $\int_{a+}^{b} f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0+} \int_{a+\lambda}^{b} f(x)dx$ এখানে $f\ (a-) = \pm\ \infty$

(ii) $\int_{a}^{b-} f(x)dx = \lim_{\mu \to 0+} \int_{a}^{b-\mu} f(x)dx$ এখানে $f\ (b-) = \pm\ \infty$

উপরের ক্ষেত্রদুটিতে সমাকল্যের উর্ধ্বসীমা অথবা নিম্নসীমায় অসীম অসান্তত্য আছে। যদি উভয় সীমাতেই অসীম অসান্তত্য থাকে, তাহলে

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0+} \int_{a+\lambda}^{c} f(x)dx + \lim_{\mu \to 0+} \int_{c}^{b-\mu} f(x)dx$$

(c একটি যদৃচ্ছ সংখ্যা)

আবার যদি $(a,\ b)$ অন্তরালের কোন অন্তঃস্থ বিন্দু c তে সমাকল্যের অসীম অসান্তত্য থাকে তাহলে

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\mu \to 0+} \int_{a}^{c-\mu} f(x)dx + \lim_{\lambda \to 0+} \int_{c+\lambda}^{b} f(x)dx$$

অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত

প্রথম রকমের অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের 'কোশি নির্ধারক' $\int_{a}^{\infty} f(t)dt$ অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের একটি প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত হচ্ছে, যে-কোন পর্য্যাপ্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্র সংখ্যা ε-এর অনুসঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা $X(\varepsilon)$ পাওয়া যাবে যে

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(t)dt\right| < \varepsilon \qquad \text{যখন} \qquad x'' > x' \geq X(\varepsilon)$$

অর্থাৎ $$\left|\int_{x'}^{x''} f(t)dt\right| \to 0 \qquad \text{যখন} \qquad x', x'' \to \infty$$

দ্বিতীয় রকমের (Type II) অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের 'কোশি নির্ধারক'

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{যেখানে} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$$

সমাকলটির অভিসরণের একটি প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হচ্ছে, যে-কোন পর্য্যাপ্ত ধনাত্মক ক্ষুদ্রসংখ্যা ε-এর অনুসঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা $\delta \equiv \delta(\varepsilon)$ নির্ণয় করা সম্ভব যে,

$$\left|\int_{a+\lambda}^{a+\mu} f(x)dx\right| < \varepsilon \qquad \text{যখন} \qquad 0 < \lambda < \mu < \delta(\varepsilon)$$

অর্থাৎ $$\left|\int_{a+\lambda}^{a+\mu} f(x)dx\right| \to 0 \qquad \text{যখন} \qquad \lambda, \mu \to 0$$

নিঃশর্ত ও শর্তাধীন অভিসরণ

A. $\int_a^\infty f(x)dx$ অযথার্থ সমাকলটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী হবে যখন

(1) $f(x)$ অপেক্ষকটি সীমাবদ্ধ এবং যে-কোন অন্তরাল (a, b) তে সমাকলনযোগ্য, এবং

(2) $\int_a^\infty |f(x)|dx$ সমাকলটি অভিসারী।

B. অযথার্থ সমাকল $\int_a^b f(x)dx$, যেখানে $\lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$ সমাকলটিকে নিঃশর্তভাবে অভিসারী বলা হবে যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি সীমাবদ্ধ এবং যে-কোন ইচ্ছাধীন অন্তরাল $(a + \lambda, b)$-তে সমাকলনযোগ্য হয়, যেখানে $0 < \lambda < b - a$ এবং $\int_a^b |f(x)|dx$ অভিসারী হয়।

শর্তাধীন অভিসরণ

কোন অযথার্থ সমাকল অভিসারী অথচ নিঃশর্তভাবে অভিসারী না হলে ঐ সমাকলটিকে শর্তাধীনভাবে অভিসারী বলা হবে।

অপসরণ (Divergence)

কোন অযথার্থ সমাকল অভিসারী না হলে অপসারী হবে। [ঐ সমাকলটির সীমিত দোলন (Finite oscillation) বা অসীম দোলন (Infinite oscillation) থাকলেও ওটি অপসারী হবে।]

অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের তুলনা পরীক্ষা

A. প্রথম রকমের অযথার্থ সমাকল $\int_a^\infty f(x)dx$

$x \geq a$ হলে যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ সমাকলনযোগ্য এমন অপেক্ষক হয় যে,

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

তাহলে

(*i*) $\int_a^\infty f(x)dx$ অভিসারী হবে যদি $\int_a^\infty g(x)dx$ অভিসারী হয়।

(*ii*) $\int_a^\infty g(x)dx$ অপসারী হবে যদি $\int_a^\infty f(x)dx$ অপসারী হয়।

B. দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকল $\int_{a+}^b f(x)dx$

(ধরি $f(x)$ এবং $g(x)$ অপেক্ষক দুটির একমাত্র a বিন্দুতেই অসীম অসান্তত্য আছে)

যদি $f(x)$ এবং $g(x)$ (a, b) $(a < x \leq b)$ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য এরূপ অপেক্ষক হয় যে

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

তাহলে

$\int_a^b f(x)dx$ অভিসারী হবে যদি $\int_a^b g(x)dx$ অভিসারী হয়।

এবং $\int_a^b g(x)dx$ অপসারী হবে যদি $\int_a^b f(x)dx$ অপসারী হয়।

অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের μ-পরীক্ষা

A. প্রথম রকমের অযথার্থ সমাকল $\int_a^\infty f(x)dx$

নিঃশর্ত অভিসরণ

$$\lim_{x\to\infty} x^\mu f(x) = A, \qquad \mu > 1$$

B. দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকল $\int_{a+}^b f(x)dx$

নিঃশর্ত অভিসরণ

$$\lim_{x\to a+} (x-a)^\mu f(x) = A, \qquad 0 < \mu < 1$$

অযথার্থ সমাকলের অপসরণের (Divergence) μ-পরীক্ষা

A. প্রথম রকমের অযথার্থ সমাকল $\int_a^\infty f(x)dx$

$$\lim_{x\to\infty} x^\mu f(x) = A \neq 0 \quad (\text{অথবা } A = \pm\infty)\ \mu \le 1$$

B. দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকল $\int_{a+}^b f(x)dx$

$$\lim_{x\to a+} (x-a)^\mu f(x) = A \neq 0 \quad (\text{অথবা } A = \pm\infty)\ \mu \ge 1$$

8.10 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. দেখান যে

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

সমাকলটি অভিসারী।

2. দেখান যে

$$\int_1^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x}\,dx$$

সমাকলটি অভিসারী যখন $m < 1$

3. দেখান যে

$$\int_1^\infty \frac{\log x}{x^2}\,dx$$

সমাকলটি অভিসারী।

4. প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x^m}{(\sin x)^n}\,dx$$

সমাকলটি অভিসারী যদি এবং একমাত্র যদি $n < m + 1$ হয়।

5. প্রমাণ করুন যে, $0 < p < 1$ হলে

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$$

সমাকলটি অভিসারী।

6. দেখান যে, $2n > 2m + 1$ হলে

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\,dx$$

সমাকলটি অভিসারী।

7. প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

অভিসারী।

8. দেখান যে

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^5} dx$$

সমাকলটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী।

9. দেখান যে

$$\int_0^{1} \frac{\sec x}{x} dx$$

সমাকলটি অভিসারী নয়।

10. প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^{\pi/2} (\cos x)^I (\sin x)^m dx$$

সমাকলটি অভিসারী যদি এবং একমাত্র যদি $I > - 1$, $m > -1$ হয়।

11. দেখান যে

$$\int_0^{2} \frac{\log x}{\sqrt{2-x}} dx$$

সমাকলটি অভিসারী।

12. $x = e^{-u}$ বসিয়ে দেখান যে

$$\int_0^{1} x^{m-1} (\log x)^n dx$$

অভিসারী যদি $m > 0$ এবং $n > -1$ হয়।

এবং অনুরূপ একটি প্রতিস্থাপন দ্বারা দেখান যে

$$\int_1^\infty x^{m-1}(\log x)^n\,dx$$

অভিসারী হবে যদি $m < 0$ এবং $n > -1$ হয়।

13. আংশিক পদ্ধতিতে সমাকলন করে দেখান যে

$$\int_{x'}^{x''} \cos x^2 dx = \frac{1}{2x''}\sin x''^2 - \frac{1}{2x'}\sin x'^2 + \frac{1}{2}\int_{x'}^{x''}\frac{\sin x^2}{x^2} - dx$$

যখন $x'' > x' > 0.$ এ থেকে প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx \text{ অভিসারী।}$$

14. প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$$

অভিসারী।

15. দেখান যে

$$\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

অভিসারী নয়।

16. প্রমাণ করুন যে

$$\int_a^\infty \frac{(1-e^{-x})\cos x}{x^2}\,dx$$

সমাকলটি $a > 0$ অভিসারী।

[ঈঙ্গিত :

$$\text{প্রদত্ত সমাকল} = \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx - \int_a^\infty e^{-x}\,\frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$$\equiv I_1 + I_2$$

এখন $\quad |I_1| \le \int_a^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$

$$i.e. \leq \int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \quad I_1 \leq \frac{1}{a} \quad (\because a > 0)$$

আবার $$I_2 = -\int_a^\infty e^{-x}\,\frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

এখন e^{-x} ক্রমহ্রাসমান অপেক্ষক এবং $\int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ সমাকলটি অভিসারী। তাই I_2 অভিসারী।]

17. দেখান যে

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$$

সমাকলটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী।

[ঈঙ্গিত : অভিসরণের μ-পরীক্ষা প্রয়োগ করুন। $\mu = \frac{5}{4}$]

সহায়ক পাঠ্যপুস্তকাবলী :

1. *Introduction to the Theory of Fourier Series and Integrals,* H. S., Carslaw, Dover Publication, 1930.
2. *Advanced Calculas,* D*avid* V. Widder, Prentice Hall of India Private Limited, 1974.
3. *A Course of Mathematical Analysis,* Shanti Narayan, S. Chand & Co., 1958.
4. *Integral Calculus—An Introduction to Analysis,* Maity and Ghosh. Central Educational Enterprise. 1989
5. *Integral Calculus,* Dr. J. C. Chaturvedi, Students' Friends & Co., 1961
6. *Multiple Integrals, Field Theory and Series—An Advanced Course in Higher Mathematics,* Budak and Fomin. Mir Publishers. Moscow, 1973.

একক 9 ❑ প্রাচল সাপেক্ষে অসীম সমাকলের অন্তরকলন ও সমাকলন (Differntiation and Integration of an Infinite Integrals with Respect to a parameter)

গঠন

9.1 প্রস্তাবনা

$f(x, y)$ একটি দ্বিচল অপেক্ষক হলে, এর সমাকল $\int_a^b f(x,y)\,dx$ কে y-প্রাচলের অপেক্ষক বলা যায়। অনেক সময় $\int_a^b f(x,y)\,dx$ সমাকলটির মান প্রাথমিক অপেক্ষকগুলির সাহায্যে নির্ণয় করা সম্ভব হয় না। অথচ $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ ধরে, উভয়পক্ষে y-সাপেক্ষে অন্তরকলন করে (শর্ত সাপেক্ষে) পাই $F'(y) = \int_a^b f\,y(x,y)\,dx$। এখন ডানদিকের সমাকলটির মান নির্ণয় সম্ভব হলে $F'(y)$ পাওয়া গেল। এবারে $F'(y)$ কে সমাকলন করে নিলে $F(y) \equiv \int_a^b f(x,y)\,dx$ -এর মান পাওয়া সম্ভব। এখানে 'সমাকলন চিহ্নের ভিতরে' অন্তরকলন করার কথা বলা হল। অনুরূপভাবে শর্তসাপেক্ষে 'সমাকলন চিহ্নের ভিতরে' সমাকলন করাও সম্ভব।

$\int_a^b f(x,y)\,dx$ অযথার্থ বা অসীম সমাকল হলেও অনুরূপ পদ্ধতি প্রয়োগে (শর্তসাপেক্ষে) সমাকলন চিহ্নের ভিতরে সমাকলন এবং অন্তরকলন করা সম্ভব।

9.2 উদ্দেশ্য

এই এককটিতে যে শর্তগুলি পালিত হলে কোনো অসীম সমাকলকে সমাকলন চিহ্নের ভিতরে অন্তরকলন ও সমাকলন করতে পারা যায় সেই শর্তগুলির আলোচনা করা হবে।

9.3 প্রাচলের অপেক্ষকরূপে নির্দিষ্ট সমাকল

ধরি $u = f(x,y)$, $R[a, b; c, d] \equiv a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ আয়তক্ষেত্রে সংজ্ঞিত x এবং y চলের অপেক্ষক এবং এই অপেক্ষকটি $0 \leq y \leq d$ অন্তরালে অবস্থিত y-এর প্রত্যেক মানের জন্য x চল সাপেক্ষে $a \leq x \leq b$ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য। তাহলে $J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$

সমাকলটিকে $c \leq y \leq d$ অন্তরালে প্রাচল y-এর অপেক্ষক বলা যেতে পারে।

9.3.1 উপপাদ্য

$f(x, y)$অপেক্ষকটি বদ্ধ আয়তক্ষেত্র $R[a, b; c, d]$-তে সন্তত হলে $J(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ সমাকলটি $[c.\ d]$ অন্তরালে প্রাচল y-এর সন্তত অপেক্ষক হবে।

প্রমাণ ঃ ধরি $y,\ y + k$ $[c, d]$ অন্তরালে অবস্থিত দুটি বিন্দু। তাহলে

$$J(y+k) - J(y) = \int_a^b [f(x, y+k) - f(x,y)]dx \ldots\ldots\ldots (1)$$

ধরি $\varepsilon > 0$ একটি প্রদত্ত সংখ্যা।

$f(x, y)$ অপেক্ষকটি R আয়তনক্ষেত্রে সন্তত, অতএব এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যাবে যে

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ যখন } |x_2 - x_1| \leq \delta$$

$$\text{এবং } |y_2 - y_1| \leq \delta$$

উপরের সম্বন্ধটিতে $x_1 = x_2 = x$

এবং $y_2 = y + k,\ y_1 = y$ বসিয়ে পাই

$$|f(x,y+k) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{যখন} \quad |k| \le \delta$$

অতএব (1) থেকে পাই

$$|J(y+k) - J(y)| = \left|\int_a^b [f(x,y+k) - f(x,y)]dx\right|$$

$$\le \int_a^b |f(x,y+k) - f(x,y)|\, dx$$

$$\le \left[\frac{\varepsilon}{b-a}\right](b-a) = \varepsilon \quad \text{যখন} \quad |k| \le \delta$$

অতএব $J(y)$ $[c, d]$ অন্তরালে y-প্রাচলের একটি সন্তত অপেক্ষক।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

$$J(y_0) = \lim_{y \to y_0} J(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\, dx = \int_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,y)\, dx$$

$$= \int_a^b f(x,y_0)\, dx$$

$$c \le y_0 \le d$$

9.3.2 উপপাদ্য

প্রাচলের অপেক্ষকরূপে নির্দিষ্ট সমাকলের ঐ প্রাচল সাপেক্ষে অন্তরকলন (On Differentiation of an Integral Dependent on a Parameter with respect to the Parameter)

যদি $f(x, y)$ এবং $f_y(x, y)$ $R[a, b; c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে সন্তত হয় তাহলে $J(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx$ সমাকলটি $c \le y \le d$ অন্তরালে y-এর একটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক

এবং

$$\frac{dJ}{dy} = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b f_y(x,y)\, dx$$

সম্বন্ধটি $[c, d]$ অন্তরালে y-এর সব মানের জন্যই সিদ্ধ।

প্রমাণ ঃ আমরা দেখাবো যে

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} = \int_a^b f_y(x,y)\,dx$$

লাগ্‌রাঞ্জের মধ্যম মান উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$\frac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} = \int_a^b [f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]\,dx$$

$$= \int_a^b f_y(x,y+\theta\Delta y)\,dx, \text{ যেখানে } 0 < \theta < 1$$

অর্থাৎ $\dfrac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} - \displaystyle\int_a^b f_y(x,y)\,dx$

$$= \int_a^b [f_y(x,y+\theta\Delta y)-f_y(x,y)]\,dx \text{ ....(1)}$$

এখন $f_y(x, y)$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্র $R[a, b; c, d]$ তে সন্তত হওয়ায় এটি ঐ আয়তক্ষেত্রে সমসন্তত (uniformly continuous) হবে এবং ফলে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে তার অনুসঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা $\delta(\varepsilon)$ পাওয়া যাবে যে, যখন $|\Delta(y)| < \delta(\varepsilon)$

$$|f_y(x,y+\Delta y)-f_y(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

অসমতাটি $x \in [a, b]$ এবং $y, y + \Delta y \in [c, d]$ হলে সিদ্ধ হবে। যেহেতু $0 < \theta < 1$, $y + \Delta\varepsilon \in [c, d]$ হলে $y + \theta\, \Delta y \in [c, d]$ হবে এবং

$$|f_y(x,y+\Delta y)-f_y(x,y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

অসমতাটি সিদ্ধ হবে।

অতএব (1) থেকে পাই $\left|\dfrac{J(y+\Delta y)-J(y)}{\Delta y} - \displaystyle\int_a^b f_y(x,y)dx\right|$

$$= \left|\int_a^b [f_y(x,y+\theta\Delta y)-f_y(x,y)]\,dx\right|$$

$$\leq \int_a^b \left| f_y(x, y+\Delta y) - f_y(x, y) \right| dx$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

যখন $|\Delta y| < \delta(\varepsilon)$ । অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

9.3.3 উপপাদ্য

প্রাচলের উপর নির্ভরশীল কোনো সমাকলের ঐ প্রাচল সাপেক্ষে সমাকলন (On Integration of an Internal Dependent on a Parameter with respect to the Parameter)

যদি $f(x, y)$ অপেক্ষকটি $R : [a, b; c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে সন্তত হয় তাহলে

$$\int_c^b J(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$$

অর্থাৎ $J(y)$ সমাকলটিকে y-এর সাপেক্ষে সমাকলন করতে হলে আমরা $\int_a^b f(x, y)\, dx$ সমাকলের সমাকল্য $f(x, y)$ কে $[c,d]$ অন্তরালে y-এর সাপেক্ষে সমাকলন করতে পারি।

প্রমাণ ঃ $f(x,y)$ অপেক্ষকটি $R[a, b; c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে x, y চল দুটির সন্তত অপেক্ষক। ফলে এটি $[a, b]$ অন্তরালে x-এর সন্তত অপেক্ষক এবং $[c, d]$ অন্তরালে y-এর সন্তত অপেক্ষক এবং উপপাদ্য 9.3.1 থেকে পাই যে $\int_a^b f(x, y)\, dx$ এবং $\int_c^d f(x, y)\, dy$ সমাকল দুটি সন্তত। এজন্য উপরের দ্বি-সমাকল দুটির অস্তিত্ব বর্তমান।

ধরি $\phi(t) = \int_c^t \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy$ এবং $\psi(t) = \int_a^b \left\{ \int_c^t f(x, y) dy \right\} dx$

তাহলে $\phi(c) = \psi(c) = 0$

এখন $\phi'(t) = \int_a^b f(x, t)\, dx$

এবং $\psi'(t) = \int_a^b \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_c^t f(x, y)\, dy \right\} dx$ (উপপাদ্য 9.3.2 থেকে)

$$= \int_a^b f(x, t)\, dx$$

অতএব $\phi'(t) = \psi'(t) \Rightarrow \phi(t) = \psi(b) + A$, A ধ্রুবক।

আবার যেহেতু $\phi(c) = \psi(c) = 0$

$$\therefore\ A = 0$$

এবং $\phi(t) = \psi(t) \Rightarrow \phi\ (d) = \psi(d)$

অর্থাৎ $\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$

9.3.4 উপপাদ্য

1. $a > 0, |b| \le a$ হলে

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)}$$

সমাকলটির মান নির্ণয় করুন এবং এর থেকে দেখান যে

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}} \quad \text{এবং} \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos x\,dx}{(a+b\cos x)^2} = -\frac{\pi b}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

সমাধান ঃ

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{a+b\cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+b\cos x} + \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a-b\cos x}$$

প্রথমটিতে $u = \tan\ (x\ /\ 2)$ এবং দ্বিতীয়টিতে $v = \tan\ (x\ /\ 2)$ বসিয়ে পাই

$$I = \int_0^1 \frac{2du}{u^2(a-b)+(a+b)} + \int_0^1 \frac{2dv}{v^2(a+b)+(a-b)}$$

$$= \frac{2}{(a-b)} \int_0^1 \frac{du}{u^2 + \dfrac{a+b}{a-b}} + \frac{2}{a+b} \int_0^1 \frac{dv}{v^2 + \dfrac{a-b}{a+b}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,u \right]_0^1 + \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\,v \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

অতএব

$$I=\int_0^{\pi}\frac{dx}{a+b\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \qquad (1)$$

উভয়পক্ষে a-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$\frac{dI}{da}=-\int_0^{\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}=-\frac{1}{2}\pi(a^2-b^2)^{-3/2}(2a)$$

$$=-\frac{\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

অর্থাৎ

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}=\frac{\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

উপরের (1) সম্বন্ধটিকে b সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$-\int_0^{\pi}\frac{dx\cos x}{(a+b\cos x)^2}=-\frac{1}{2}\pi(a^2-b^2)^{-3/2}(-2b)=\frac{\pi b}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\frac{\cos x dx}{(a+b\cos x)^2}=\frac{\pi b}{(a^2-b^2)^{3/2}}$$

2. প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^{\pi/2}\log(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)d\theta=\pi\log\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ধরি $\phi(a,b)=\int_0^{\pi/2}\log(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)\,d\theta$

অতএব

$$\frac{\partial}{\partial a}\phi(a,b)=\int_0^{\pi/2}\frac{2a\cos^2\theta}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}d\theta \qquad (1)$$

$$=2a\int_0^{\infty}\frac{dt}{(1+t^2)(a^2+b^2t^2)} \qquad (t\ =\ \tan\ \theta \text{ বসিয়ে})$$

$$= \frac{2a}{b^2} \lim_{B\to\infty} \int_0^B \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+k^2)}, \quad \left(k^2 = \frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$= \frac{2a}{b^2} \lim_{B\to\infty} \frac{1}{k^2-1} \int_0^B \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2+k^2}\right) dt$$

$$= \frac{2a}{b^2} \frac{b^2}{a^2-1} \lim_{B\to\infty} \left[\tan^{-1} t - \frac{1}{k} \tan^{-1} \frac{t}{k}\right]_0^B$$

$$= \frac{2a}{a^2-1} \lim_{B\to\infty} \left[\tan^{-1} B - \frac{1}{k} \tan^{-1} \frac{B}{k}\right]$$

$$= \frac{2a}{a^2-1} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{\pi a}{a^2-1} \frac{a-b}{a} = \frac{\pi}{a+b}$$

(1) নং সমীকরণে $b = a$ বরিয়ে পাই

$$\frac{\partial}{\partial a}[\phi(a,b)]b = a = \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{2}{a} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2a}$$

অতএব দেখা যাচ্ছে যে

$$\frac{\partial}{\partial a} \phi(a,b) = \frac{\pi}{a+b}$$

সম্বন্ধটি a, b এর সব মানের জন্যই সত্য। a-এর সাপেক্ষে সমাকলন করে পাই

$$\phi(a,b) = \pi \log(a+b) + c, (c \text{ ধ্রুবকটি } a \text{ নিরপেক্ষ}) \quad (2)$$

আবর

$$\phi(a,b)=\int_0^{\pi/2}\log(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\log\left[a^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+b^2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\log[a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta]\,d\theta$$

$$=\phi\ (b,\ a)$$

এ থেকে প্রমাণ হচ্ছে সমীকরণ (2) তে c ধ্রুবকটি b নিরপেক্ষ। অর্থাৎ c ধ্রুবকটি a এবং b নিরপেক্ষ।

এখন $\phi(1,1)=\int_0^{\pi/2}\log(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,d\theta$

$$=0$$

আবার সমীকরণ (2) তে $a = 1 = b$ বসিয়ে পাই

$$\phi(1,1)=\pi\log 2+0$$

$\Rightarrow 0 = \pi\ log\ 2 + c$ বা, $c = -\pi\log 2$

অতএব $\phi(a,b)=\pi\log(a+b)-\pi\log 2=\pi\log\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

3. $a > b$ হলে দেখান যে

$$\int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right)\operatorname{cosec}\theta\ d\theta=\pi\sin^{-1}\frac{b}{a}$$

ধরি, $\phi(a,b)=\int_0^{\pi/2}\log\left(\dfrac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right)\operatorname{cosec}\theta\,d\theta$

এখানে $\phi\ (a,\ b)$ সমাকলটির সমাকলোর $\theta\ = 0$ বিন্দুতে একটি দূরীকরণযোগ্য অসান্তত্য আছে কারণ

$$\lim_{\theta\to 0+}\log\left(\frac{a+b\sin\theta}{a-b\sin\theta}\right)\frac{1}{\sin\theta}\quad\left(\frac{0}{0}\ \text{আকার}\right)$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\dfrac{a - b\sin\theta}{a + b\sin\theta} \dfrac{(a - b\sin\theta)b\cos\theta + (a + b\sin\theta)b\cos\theta}{(a - b\sin\theta)^2}}{\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{2ab\cos\theta}{\left(a^2 - b^2\sin^2\theta\right)\cos\theta} = 2\frac{b}{a}$$

অতএব ϕ (a, b সমাকলটি একটি যথার্থ সমাকল।

b-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$\frac{\partial}{\partial b}\phi(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\sin\theta}{a + b\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{a - b\sin\theta}\right]d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2a\,d\theta}{a^2 - b^2\sin^2\theta}$$

$$= 2a\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{a^2 + (a^2 - b^2)\tan^2\theta}$$

$$= 2a\int_0^{\infty} \frac{du}{a^2 + (a^2 - b^2)u^2}$$

$$= \frac{2a}{a^2 - b^2}\int_0^{\infty} \frac{du}{u^2 + \dfrac{a^2}{a^2 - b^2}}$$

$$= \frac{2a}{a^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}}\,\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

b সাপেক্ষে সমাকলন করে পাই

$\phi(a,b) = \pi\sin^{-1}\dfrac{b}{a} + A$ (b নিরপেক্ষ ধ্রুবক)

যখন $b = 0$, ϕ $(a, b) = 0$ $\pi \times 0 + \mathrm{A}$

$\Rightarrow A = 0$

অতএব $\phi(a,b) = \pi \sin^{-1} \dfrac{b}{a}$

4. দেখান যে

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+y\sin^2 x)}{\sin^2 x} dx = \pi[\sqrt{1+y} - 1]$$

সমাধান ঃ এখানে সহজেই দেখানো যায় যে $x = 0$ বিন্দুতে সমাকলের অসান্তত্যটি দূরীকরণযোগ্য। অতএব প্রদত্ত সমাকলটি একটি যথার্থ সমাকল।

ধরি

$$\phi(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+y\sin^2 x)}{\sin^2 x} dx$$

y-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$\phi'(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+y\sin^2 x}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+y)t^2+1}, \quad (t = \tan x)$$

$$\phi'(y) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y}}$$

অতএব $\phi(y) = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(1+y)^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c$

$$= \pi\sqrt{1+y} + c$$

আবার $\phi(0) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\log(1+0.\sin^2 x)}{\sin^2 x} = dx = 0$

$\therefore\ 0 = \phi(0) = \pi + c \Rightarrow c = -\pi$

ফলে $\phi(y) = \pi\sqrt{1+y} - \pi$

$$= \pi\left[\sqrt{1+y} - 1\right]$$

9.3.5 উপপাদ্য

কোনো নির্দিষ্ট সমাকল এবং এর সীমা দুটি একটি প্রাচলের অপেক্ষক হলে, ঐ প্রাচল সাপেক্ষে সমাকলটির অন্তরকলন।

যদি $R[a, b; c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে $f(x, y)$ এবং $f_y(x, y)$ সন্তত হয় এবং $x_1(y)$, $x_2(y)$ $[c, d]$ অন্তরালে অন্তরকলনযোগ্য এমন দুটি অপেক্ষক হয় যে $[c, d]$ অন্তরালে অবস্থিত y-এর সকল মানের জন্য $(x_1(y), y)$ এবং $(x_2(y), y)$ বিন্দু দুটি ঐ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে অবস্থিত হয় তাহলে

$$J(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx$$

y-এর সাপেক্ষে $[c, d]$ অন্তরাল অন্তরকলনযোগ্য এবং

$$J'(y) = \int_{x_1(y)}^{x^2(y)} f_y(x, y) dy + f(x_2(y), y)\frac{dx_2}{dy} - f(x_1(y), y)\frac{dx_1}{dy}$$

প্রমাণ ঃ $J(y)$ অপেক্ষকটিকে আমরা নিচের আকারে লিখতে পারি।

$$J(y) = F(x_1(y), x_2(y), y)$$

$$\equiv F(u, v, y) \quad \text{যেখানে} \quad u = x_1(y),\ v \equiv x_2(y)$$

$$= \int_u^v f(x, y)\, dx$$

এখানে $F(u, v, y)$ অপেক্ষকটির $(a \le u \le b,\ a \le v \le b,\ c \le y \le d)$ আংশিক অন্তরকলগুলি হল

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^v f_y(x, y)\, dx$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে একটি অস্তিত্ব আছে এবং এটি সন্তত।

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\int_u^v f(x, y)dx = f(v, y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\int_u^v f(x, y)dx = -f(u, y)$$

এখন সংযোজক-অপেক্ষকের অন্তরকলনের সূত্র প্রয়োগ করে পাই

$$J'(y) = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y}$$

[$\because$ প্রদত্ত শর্তানুসারে u, v অপেক্ষক দুটি অন্তরকলনযোগ্য।]

$$= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dy} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{dy}$$

$$= \int_u^v f(x, y)\, dx + f(v, y)\frac{dv}{dy} - f(u, y)\frac{du}{dy}$$

$$= \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)dx + f(x_2(y), y)\frac{dx_2}{dy} - f(x_1(y), y)\frac{dx_1}{dy}$$

উদাহরণ ঃ দেখান যে

$$\int_0^a \frac{\log(1+ax)}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\log(1+a^2)\tan^{-1} a$$

অতঃপর দেখান যে

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\log^2$$

$\int_0^a \frac{\log(1+ax)}{1+x^2}dx$ সমাকলটিকে $\phi(a)$ লিখে অন্তরকলন করে পাই

$$\phi'(a)\int_0^a \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\log(1+ax)}{1+x^2}\right)dx + \frac{1.\log(1+a.a)}{1+a^2}$$

$$= \int_0^a \frac{x}{(1+ax)(1+x^2)}dx + \frac{\log(1+a^2)}{1+a^2}$$

এখন $\frac{x}{(1+ax)(1+x^2)} = \frac{a}{(1+a^2)(1+ax)} + \frac{x+a}{(1+a^2)(1+x^2)}$

অতএব $\phi'(a) = -\frac{1}{(1+a^2)}[\log(1+ax)]_0^a + \frac{1}{2(a^2+1)}[\log(1+x^2)]_0^a$

$$+\frac{a}{1+a^2}[\tan^{-1} x]_0^a + \frac{\log(1+a^2)}{1+a^2}$$

$$= -\frac{1}{1+a^2}\log(1+a^2) + \frac{1}{2(1+a^2)}\log(1+a^2)$$

$$+\frac{1}{(1+a^2)}\log(1+a^2) + \frac{a}{1+a^2}\tan^{-1}a$$

$$= \frac{1}{2(1+a^2)}\log(1+a^2) + \frac{a}{1+a^2}\tan^{-1}a$$

উভয়পক্ষে a-এর সাপেক্ষে সমাকলন করে পাই

$$\phi(a) = \frac{1}{2}\tan^{-1}a\log(1+a^2) - \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+a^2}.2a\tan^{-1}a\,da \quad +\int\frac{a}{1+a^2}\tan^{-1}a\,da + c$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}a\log(1+a^2) + c$$

এখন $\phi(0) = 0 = \frac{1}{2}\tan^{-1}0.\log 1 + c \Rightarrow c = 0$

অতএব $\phi(a) = \frac{1}{2}\tan^{-1}a\log(1+a^2)$

উপরের সম্বন্ধটিতে $a = 1$ বসিয়ে পাই

$$\phi(1) = \frac{\pi}{8}\log 2$$

অন্যদিকে $\phi(1) = \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$

অতএব $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\log 2$

9.4 প্রাচলের উপর নির্ভরশীল অযথার্থ সমাকল

ধরি $u = f(x, y)$ অপেক্ষটি $0 \le x < \infty$, $c \le y \le d$ হলে সংজ্ঞিত এবং $[c, d]$ অন্তরালে স্থিত y-এর প্রত্যেক মানের জন্য $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ সমাকলটি অভিসারী। তাহলে $J(y) \equiv \int_a^\infty f(x,y)\,dx$

সমাকলটি $[c, d]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত y-এর একটি অপেক্ষক এবং এক্ষেত্রে

$$J(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{1\to\infty}\int_a^1 f(x,y)\,dx$$

আবার যদি $u = f(x, y)$ অপেক্ষকটি, $a < x \le b$, $c \le y \le d$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে সংজ্ঞিত এবং $f(x, y) \to \infty$ যখন $x \to a +$ এবং $[c, d]$ অন্তরালে স্থিত y-এর প্রত্যেক মানের জন্য যদি

$$J^*(y) = \int_{a+}^{b} f(x,y)\,dx = \lim_{\lambda\to 0+}\int_{a+\lambda}^{b} f(x,y)\,dx$$

সমাকলটি অভিসারী হয় তাহলে $J^*(y)$, $[c, d]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত y-এর একটি অপেক্ষক।

প্রাচলের উপর নির্ভরশীল অযথার্থ সমাকলগুলিকে প্রাচল সাপেক্ষে অন্তরকলন ও সমাকলন করতে হলে দেখতে হবে এরা সমঅভিসারী (uniformal convergent) কিনা, এবং একমাত্র সেক্ষেত্রেই এই অপেক্ষকগুলিকে যথার্থ সমাকলের মত প্রাচল সাপেক্ষে অন্তরকলন ও সমাকলন করতে পারা যায়।

9.4.1 অযথার্থ সমাকলের সমঅভিসরণ (Uniform Convergence of Improper Integrals)

প্রথম রকমের অযথার্থ সমাকল $\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$

ধরি, উপরের সমাকলটি $[c, d]$ অন্তরালে স্থিত y-এর সকল মানের জন্য অভিসারী এবং এর মান $F(y)$; এবং $S_R(y) \equiv \int_a^R f(x,y)\,dx$

সংজ্ঞা 1 ঃ $\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ সমাকলটি $[c, d]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত $F(y)$ অপেক্ষকটিতে সমভাবে অভিসারী হবে, যদি এবং একমাত্র যদি, কোনো যদৃচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা s-এর অনুসঙ্গী এবং $c \le y \le d$ তে অবস্থিত y-এর উপর অনির্ভরশীল এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা Q পাওয়া যায় যে

যখন $R > Q$ তখন $|F(y) - S_R(y)| < \varepsilon;\quad c \le y \le d$

দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকল $\int_{a+}^{b} f(x,y)dx;\quad c \le y \le d$

ধরি, উপরের সমাকলটি $[c, d]$ অন্তরালে স্থিত y-এর সকল মানের জন্য অভিসারী এবং এর মান $F(y)$ এবং $S_r(y) = \int_r^b f(x,y)dx;\quad a < r \le b$

সংজ্ঞা 2 ঃ $\int_{a+}^{b} f(x,y)\,dx$ সমাকলটি $[c,\ d]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত $F(y)$ অপেক্ষকটিতে সমভাবে অভিসারী হবে, যদি এবং একমাত্র যদি, কোনো যদৃচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর অনুসঙ্গী এবং $c \leq\ y \leq d$ তে অবস্থিত y-এর উপর অনির্ভরশীল এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা q পাওয়া যায় যে

যখন $a < r < q$ তখন $\left|F(y) - S_r(y)\right| < \varepsilon;\quad c \leq y \leq d$

উদাহরণ 1 ঃ দেখান যে $\int_0^{\infty} e^{-xy}dx$ অযথার্থ সমাকলটি $\frac{1}{y},\quad 1 \leq y \leq 2$ অপেক্ষকে সমভাবে অভিসারী।

সমাধান ঃ $\int_0^{\infty} e^{-xy}dx = \lim\limits_{l\to\infty}\int_0^{1} e^{-xy}dx = \lim\limits_{l\to\infty}\left[\frac{e^{-xy}}{-y}\right]_0^{l} = \frac{1}{y} \equiv F(y)$

এবং $\quad S_R(y) = \int_o^{r} e^{-xy}dx = \frac{1}{y} - \frac{e^{-Ry}}{y}$

ফলে, $\left|F(y) - S_R(y)\right| = \left|\frac{1}{y} - \left(\frac{1}{y} - \frac{e^{-Ry}}{y}\right)\right| = \frac{e^{-Ry}}{y}$

এখন যেহেতু $1 \leq y \leq 2$

$$\therefore e^{R} \leq e^{Ry} \Rightarrow e^{-Ry} \leq e^{-R} \text{ এবং } \frac{1}{y} \leq 1$$

ফলে $\frac{e^{-Ry}}{y} \leq e^{-R}$

অতএব $\left|F(y) - S_R(y)\right| < \varepsilon \Rightarrow e^{-R} < \varepsilon$

এবং $e^{-R} < \varepsilon$ যখন $R > \log\frac{1}{\varepsilon} = Q$

অতএব $\varepsilon > 0$ প্রদত্ত হলে আমরা y-এর উপর অনির্ভরশীল এমন ধনাত্মক সংখ্যা Q পাচ্ছি যে

$$\left|F(y) - S_R(y)\right| < \varepsilon \text{ যখন } R > Q$$

অর্থাৎ $\int_0^{\infty} e^{-xy}dx$ সমাকলটি

$\frac{1}{y},\quad (1 \leq y \leq 2)$ অপেক্ষকে সমভাবে অভিসারী।

উদাহরণ 2 ঃ দেখান যে $\int_0^\infty xe^{-xt}dt$ সমাকলটি $0 \le x \le 1$ অন্তরাল সমভাবে অভিসরণ করে না, যদিও এটি প্রদত্ত অন্তরালের প্রতি বিন্দুতে অভিসারী।

সমাধান ঃ এখানে $S_R(x) = \int_0^R xe^{-xt}dt$

$$= \int_0^{xR} e^{-u}du, \ (\ u = xR \text{ বসিয়ে})$$

(লক্ষ্য করুন যে $x > 0$ এবং $R > 0$ হলে $u > 0$)

$$= [-e^{-u}]_0^{xR} = 1 - e^{-xR}$$

এবং $= F(x) = \int_0^\infty xe^{-xt} dt = \lim\limits_{R\to\infty}\int_0^R xe^{-xt}dt$

$$= \lim_{R\to 0}[1 - e^{-xR}] = 1 \quad \text{যখন } 0 < x \le 1$$

এবং $\qquad F(x) = 0 \qquad$ যখন $x = 0$

অতএব $|F(x) - S_R(x)| = e^{-xR} \qquad 0 < x \le 1$

$\qquad = 0 \qquad x = 0$

$\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ ধরা যাক। যদি প্রথম সংজ্ঞায় বর্ণিত Q সংখ্যাটির অস্তিত্ব থাকে তাহলে $R > Q$ হলে

$|F(x) - S_R(x)| = e^{-xR} < \dfrac{1}{2}$ অসমতাটি $0 < x \le 1$ অন্তরালে সিদ্ধ হওয়া উচিত। কিন্তু R-এর সকল ধনাত্মক মানের জন্য $\lim\limits_{x\to 0+} e^{-xR} = 1$ হওয়ার ফলে উপরের অসমতাটি $0 < x \le 1$ অন্তরালে সিদ্ধ নয়।

মন্তব্য ঃ $0 \le x \le 1$ অন্তরালটিকে যদি $0 < \delta \le y \le 1$ অন্তরালে পরিবর্তিত করা হয় যেখানে $\delta < 1$, তাহলে $F(x) = \int_0^\infty xe^{-xt}dt$ সমাকলটি $0 < \delta \le y \le 1$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী হবে।

কারণ, এখন $e^{-xR} < \varepsilon \Rightarrow e^{xR} > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\Rightarrow R > \frac{1}{x} 1n \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow R > \frac{1}{\delta} 1n \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{যখন } 0 < \delta \le x \le 1$$

অতএব $\varepsilon > 0$ হলে আমরা x-এর উপর অনির্ভরশীল এমন ধনাত্মক সংখ্যা $Q = \frac{1}{\delta} 1n \frac{1}{\varepsilon}$ পাচ্ছি যে $|F(x) - S_R(x)| < \varepsilon$ যখন $R > Q$ এবং $0 < \delta \le x \le 1$

অতএব $F(x) = \int_0^\infty xe^{-xt} dt$ সমাকলটি এই পরিবর্তিত অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

উদাহরণ 3 ঃ $J(y) = \int_0^1 yx^{y-1} dx$ সমাকলটি $0 \le y \le 1$ অন্তরালের প্রত্যেক বিন্দুতে অভিসারী কিন্তু এটি এই অন্তরালে সমভাবে অভিসারী নয় ; প্রমাণ করুন।

প্রমাণ ঃ $J(y)$ সমাকলটির সমাকল্যের $x = 0$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য আছে।

অতএব $J(y) \lim_{\lambda \to 0+} \int_\lambda^1 yx^{y-1} dx$

$$= \lim_{\lambda \to 0+} [x^y]_\lambda^1 = \lim_{\lambda \to 0+} [1 - \lambda^y]$$

$$= 1 - \lim_{\lambda \to 0+} \lambda^y$$

$$= 1 - 0 = 1 \quad \text{যখন } 0 < y \le 1$$

এবং $J(y)) = 0$ যখন $y = 0$

অতএব প্রমাণিত হল যে $J(y)$ সমাকলটি $0 \le y \le 1$ অন্তরালের প্রত্যেক বিন্দুতে অভিসারী।

আবার $S_r(y) = \int_r^1 yx^{y-1} dx, \quad 0 < r \le 1$

$$= 1 - r^y$$

অতএব $|J(y) = -S_r(y)| = r^y, \quad 0 < y \leq 1$

$\quad = 0 \qquad\qquad y = 0$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$ ধরা যাক। যদি দ্বিতীয় সংজ্ঞায় বর্ণিত q সংখ্যাটির অস্তিত্ব থাকে তাহলে $0 < r < q$ হলে $|J(y) - S_r(y)| = r^y < \frac{1}{2}$ অসমতাটি $0 < y \leq 1$ অন্তরালে সিদ্ধ হওয়া উচিত। কিন্তু r-এর 1 থেকে ছোট সব ধনাত্মক মানের জন্য $\lim_{y \to 0+} r^y = 1$ হওয়ার ফলে উপরের অসমতাটি $0 < y \leq 1$ অন্তরালে সিদ্ধ নয়।

মন্তব্য ঃ $0 \leq y \leq 1$ অন্তরালের পরিবর্তে যদি $0 < \delta_0 \leq y \leq 1, \delta_0 < 1$ অন্তরালটি নেওয়া হয়, তাহলে

$J(y) = \int_0^1 yx^{y-1}dx$ সমাকলটি $0 < \delta_0 \leq y \leq 1$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী হবে।

কারণ, এক্ষেত্রে $|J(y) - S_r(y)| = r^y$

এবং $0 < \varepsilon < 1$ প্রদত্ত হলে, $x^y < \varepsilon$

$$\Rightarrow r < \varepsilon^{1/y} < \varepsilon^{1/\delta_0} \quad \text{যখন } 0 < \delta_0 \leq y \leq 1$$

অতএব $0 < \varepsilon < 1$ প্রদত্ত হলে আমরা y-এর উপর নির্ভরশীল নয় এমন ধনাত্মক সংখ্যা $q = \varepsilon^{1/\delta_0}$ পাচ্ছি যে $|J(y) - S_r(y)| < \varepsilon$ অসমতাটি সিদ্ধ হচ্ছে যখন $0 < r < q$ এবং $0 < \delta_0 \leq y \leq 1$

অতএব $\int_{0+}^1 yx^{y-1}dx$ সমাকলটি এই পরিবর্তিত অন্তরালে সমঅভিসারী।

9.4.2 সম-অভিসরণের পরীক্ষাসমূহ (Tests for Uniform Convergence)

1. বায়ারস্ট্রাসের M-পরীক্ষা (The Weirstrass M-Test)

উপপাদ্য 1 ঃ যদি

1. $f(x,y)$ $a \leq x < \infty$, $c \leq y \leq d$ হলে সন্তত হয়
2. $M(x)$ $a \leq x < \infty$ অসীম অন্তরালে সন্তত হয়

3. $|f(x,y)| \le M(x)$ যখন $a \le x < \infty,\ c \le y \le d$

4. $\int_a^{\infty} M(x)dx$ অভিসারী হয়

তাহলে $\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx \quad c \le y \le d$ অন্তরালে সম-অভিসারী হবে।

প্রমাণ ঃ $J(y) \equiv \int_0^{\infty} f(x,y)\,dx$ এবং $S_R(y) \equiv \int_a^{R} f(x,y)\,dx$ ধরে পাই

$$|J(y) - S_R(y)| \le \int_R^{\infty} |f(x,y)| dx \le \int_R^{\infty} M(x)\,dx$$

যেহেতু, শেষের সমাকলটি $c \le y \le d$ অন্তরালস্থিত y-এর উপর নির্ভরশীল নয় এবং $R \to \infty$ হলে, এর সীমাস্থমান 0 অতএব প্রথম রকমের অযথার্থ সমাকলের সম-অভিসরণের সংজ্ঞা থেকে পাওয়া যায় যে $J(y)$ সমাকলটি $c \le y \le d$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

উপপাদ্য 2 ঃ যদি

1. $f\ (x,y)$ $a < x \le b,\ c \le y \le d$ হলে সন্তত হয়
2. $M(x)$ $\quad a < x \le b$ অন্তরাল সন্তত হয়
3. $|f(x,y)| \le M(x)$ যখন $a < x \le b, \quad c \le y \le d$
4. $\int_{a+}^{b} M(x)\,dx$ অভিসারী হয়

তাহলে $\int_{a+}^{b} f(x,y)dx \quad c \le y \le d$ অন্তরালে সমঅভিসারী হবে।

এই উপপাদ্যের প্রমাণটি প্রথম উপপাদ্যের প্রমাণের অনুরূপ হওয়াতে এখানে বর্জিত হল।

উদাহরণ 1ঃ প্রমাণ করুন যে $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \quad \cos xy\,dx \quad -\infty < y < \infty$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

প্রমাণ ঃ এখানে $\left|e^{-x^2} \cos yx\right| \le e^{-x^2}$, y-এর সকল মানের জন্য এবং $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ অভিসারী।

আবার $f\ (x,y) \equiv e^{-x^2}\ \cos\ xy,\ 0 \le x \le \infty,\ -\infty < y < \infty$ হলে সন্তত

এবং $M(x) \equiv e^{-x^2}$ $\quad 0 \le x < \infty$ অন্তরালে সন্তত

অতএব $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos yx dx - \infty < y < \infty$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

উদাহরণ 2 ঃ দেখান যে $\int_{-1}^1 \frac{\cos yx}{\sqrt{1-x^2}} dx - \infty < y < \infty$ অন্তরালে সম-অভিসারী।

এখানে $f(x, y) \equiv \frac{\cos yx}{\sqrt{1-x^2}}$; $|f(x,y)| \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \equiv M(x)$ এবং $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ অভিসারী।

আবার $f(x,y)$ $-\infty < y < \infty$, $-1 \le x \le 1$ হলে সন্তত

এবং $M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $-1 < x < 1$ অন্তরালে সন্তত।

অতএব $\int_{-1}^1 \frac{\cos yx}{\sqrt{1-x^2}} dx - \infty < y < \infty$ অন্তরালে সম-অভিসারী।

11. প্রাচলের উপর নির্ভরশীল অযথার্থ সমাকলের সম-অভিসরণের কোশি নির্ধারক। (Cauchy criterion for the uniform Convergence of an lmproper integral Dependent on a parameter)

A. প্রথম রকমের অযথার্থ সমাকল $\int_a^\infty f(x,y)dx, \quad c \le y \le d$

উপপাদ্য 1 ঃ y-প্রাচলের উপর নির্ভরশীল অযথার্থ সমাকল $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ এর $[c, d]$ অন্তরালে সম-অভিসরণের একটি প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হচ্ছে যে, পূর্বনির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর অনুসঙ্গী এবং $[c, d]$ অন্তরালে y-এর উপর অনির্ভরশীল এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা $X \equiv X(\varepsilon)$ পাওয়া যাবে যে $x'' > x' > X(\varepsilon)$ হলে

(1) $$\left| \int_{x'}^{x''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$ অসমতাটি সিদ্ধ হবে।

প্রমাণ ঃ প্রয়োজনীয়তা ধরি, সমাকলটি $[c, d]$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী এবং ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত। তাহলে $[c, d]$ অন্তরালে y-এর উপর অনির্ভরশীল এমন একটি সংখ্যা $X(\varepsilon)$ পাওয়া যাবে যে

$x' > X(\varepsilon)$ এবং $x'' > X(\varepsilon)$ হলে

$$\left|\int_{x'}^{\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ এবং } \left|\int_{x''}^{\infty} f(x,y)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

অসমতা দুটি সিদ্ধ হয়।

অতএব $x'' > x' > X(\varepsilon)$ হলে

$$\left|\int_{x''}^{x'} f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_{x'}^{\infty} f(x,y)\,dx - \int_{x''}^{\infty} f(x,y)\,dx\right| \le \left|\int_{x'}^{\infty} f(x,y)\,dx\right| + \left|\int_{x''}^{\infty} f(x,y)dx\right|$$

অর্থাৎ

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x,y)dx\right| \le \left|\int_{x'}^{\infty} f(x,y)dx\right| + \left|\int_{x''}^{\infty} f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

পর্যাপ্ততা। শর্তটি যথেষ্ট।

যদি $\left|\int_{x'}^{x''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$ শর্তটি $x' > X(\varepsilon)$, $x'' > X(\varepsilon)$ হলে সিদ্ধ হয়, যেখানে $X(\varepsilon)$ [c, d] অন্তরালে y-এর উপর নির্ভরশীল নয় তাহলে $\int_{a}^{\infty} f(x,y)\,dx$ সমাকলটি [c,d] অন্তরালে y-এর সব মানের জন্যই অভিসারী হবে। [অযথার্থ সমাকলের অভিসরণের 'কোশি-নির্ধারক' দ্রষ্টব্য]

অতএব $\left|\int_{x'}^{x''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$ অসমতাটিতে x' কে অসীমে অপসৃত করে পাই

$$\left|\int_{x'}^{\infty} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$

এবং এটি সিদ্ধ হচ্ছে যখন $x' > X(\varepsilon)$ এবং $X(\varepsilon)$ [c, d] অন্তরালে y-এর উপর অনির্ভরশীল।

ফলে প্রমাণিত হল যে অযথার্থ সমাকলটি [c, d] অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

B. দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকল $\int_{a+}^{b} f(x,y)dx$, $c \le y \le d$ এখানে $f(x,y) \to \pm\infty$ যখন $x \to a+$

উপপাদ্য 2 : y-প্রাচলের উপর নির্ভরশীল, দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকল $\int_{a+}^{b} f(x,y)dx$-এর $[c, d]$ অন্তরালে সম-অভিসরণের একটি প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হচ্ছে যে পূর্বনির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর অনুসঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা $\delta(\varepsilon)$ পাওয়া যাবে (যেটি $[c, d]$ অন্তরালে y-এর উপর নির্ভরশীল নয়) যে

$$\left|\int_{a+\lambda}^{a+\mu} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$$ অসমতাটি $0 < \lambda < \mu < \delta$ হলে সিদ্ধ হয়।

এর প্রমাণটি উপপাদ্য 1-এর অনুরূপ হওয়ায় বর্জিত হল।

III. ধরি $\phi\ (x, y)$ অপেক্ষকটি $x \geq a,\ c \leq y \leq d$ শর্তে সীমাবদ্ধ এবং $[c, d]$ অন্তরালে y-এর সব মানের জন্য x-এর একটি সমক্রমী অপেক্ষক এবং $\psi(x)$ অপেক্ষকটি কোন যদৃচ্ছ অন্তরাল (a, a') তে সীমাবদ্ধ এবং সীমিত সংখ্যক বারেক বেশী চিহ্ন পরিবর্তন করে না এবং $\int_a^{\infty} \psi(x)dx$ -এর অস্তিত্ব বর্তমান, তাহলে $\int_a^{\infty} \phi(x,y)\psi(x)dx$ অযথার্থ সমাকলটি $[c, d]$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

প্রমাণ : উপরের উপপাদ্যে বর্ণিত শর্তে দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$\int_{x'}^{x''} \phi(x,y)\psi(x)dx = \phi(x',y)\int_{x'}^{\lambda} \psi(x)dx + \phi(x'',y)\int_{\lambda}^{x''} \psi(x)dx$$ যেখানে λ নিচের অসমতাটি সিদ্ধ করে

$$a < x' < \lambda < x''$$

কিন্তু $x \geq a$ এবং $c \leq y \leq d$ হলে $\phi(x, y)$ সীমাবদ্ধ এবং $\int_a^{\infty} \psi(x)dx$ সমাকলটি অভিসারী। তাই

$$\left|\int_{x'}^{x''} \phi(x,y)\psi(x)dx\right| \leq |\phi(x',y)|\left|\int_{x'}^{\lambda} \psi(x)dx\right| + |\phi(x'',y)|\left|\int_{\lambda}^{x''} \psi(x)dx\right|$$

সম্বন্ধটি থেকে পাই যে

$\int_a^{\infty} \phi(x,y)\psi(x)dx$ অযথার্থ সমাকলটি $[c, d]$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

উদাহরণ : নিচের অযথার্থ সমাকলগুলির সমঅভিসরণ প্রতিপাদন করুন।

(i) $\int_0^\infty \frac{y\,dx}{x^2+y^2}$, $(0 < c \le y \le d)$

(ii) $\int_0^\infty e^{-yx} \sin x\, dx$, $(y \ge k > 0)$

(iii) $\int_0^\infty e^{-xy} dx$, $(y \ge k > 0)$

(iv) $\int_0^\infty e^{-x/y} dx$, $0 < y \le Y$, (Y একটি ইচ্ছাধীন ধনাত্মক সংখ্যা)

(v) $\int_0^1 \log \frac{x}{t}\, dt \quad a \le x \le b,\ a > 0,\ b < +\infty$

সমাধান :

(i) $\left|\frac{y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{c}{x^2+d^2} = M(x)$ এবং $\int_0^\infty M(x)dx = \int_0^\infty \frac{c}{x^2+d^2}\, dx$

সমাকলটি অভিসারী। আবার

$$f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad 0 \le x < \infty, \quad c \le y \le d$$

হলে সন্তত। এবং

$$M(x) = \frac{c}{x^2+d^2} \qquad 0 < x < \infty \text{ অন্তরালে সন্তত।}$$

অতএব প্রদত্ত সমাকলটি $0 < c \le y \le d$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

(ii) $\left|e^{-yx} \sin x\right| \le \left|e^{-kx} \sin x\right|$

যেহেতু $y \ge k > 0$, $\le e^{-kx} = M(x)$ এবং $\int_0^\infty e^{-kx} dx$ অভিসারী।

আবার $e^{-xy}\sin x$ $0 < x < \infty$, $0 < k < y$ হলে সন্তত এবং $M(x) = e^{-kx}$, $0 < x < \infty$ অন্তরালে সন্তত।

অতএব প্রদত্ত সমাকলটি $0 < k < y$ অন্তরালে সমঅভিসারী।

(iii) (ii)-এর অনুরূপ

(iv) $\int_0^\infty e^{-x/y}dx,\quad 0 < y \le Y$

$$f(x,y) = e^{-x/y} \Rightarrow |f(x,y)| = \left|e^{-x'y}\right| \le e^{-x/y} = M(x)$$

এবং $\int_0^\infty e^{-x/Y}dx$ সমাকলটি অভিসারী।

অতএব বায়ারস্ট্রাসের M-পরীক্ষা থেকে প্রদত্ত সমাকলটির সমঅভিসরণ প্রতিপাদিত হল।

(v) এখানে $f(x,t) = \log\dfrac{x}{t}$, $a \le x \le b$, $a > 0$, $b < +\infty$, $0 < t \le 1$

অতএব $\quad |f(x,t)| \le \log\dfrac{b}{t} = M(t)$

এবং
$$\begin{aligned}
\int_0^1 M(t)dt &= \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_\varepsilon^1 \log\frac{b}{t}\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\log b - (t\log t - t)_\varepsilon^1\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left[(\log b + 1) + \varepsilon\log\varepsilon - \varepsilon\right] \\
&= \log(be) + \lim_{\varepsilon\to 0+}(\varepsilon\log\varepsilon - \varepsilon) \\
&= \log(be) + \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\log\varepsilon}{1/\varepsilon} \\
&= \log(be) + \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1/\varepsilon}{1/\varepsilon^2} \\
&= \log\ be
\end{aligned}$$

অর্থাৎ $\int_0^1 M(t)dt$ অভিসারী।

এবং $f(x, t) = \log x/t,\ 0 < t \le 1\ a \le x \le b,\ a > 0,\ b < +\infty$ হলে সন্তত।

$$M(t) = \log b/t, \quad 0 < t < 1 \text{ অন্তরালে সন্তত।}$$

ফলে বায়ারস্ট্রাসের M-পরীক্ষা থেকে এই সমাকলটির সম-অভিসরণ প্রতিপাদিত হয়।

9.5 সম-অভিসরণের প্রয়োগ (Applications of Uniform Convergence)

এই পরিচ্ছেদে প্রাচলের উপর নির্ভরশীল অযথার্থ সমাকল দ্বারা সংজ্ঞিত অপেক্ষকের সান্তত্য, অন্তরকলনযোগ্যতা এবং সমাকলনযোগ্যতা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

9.5.1 সান্তত্য (Continuity)

উপপাদ্য 1 : সন্তত অপেক্ষকের সম-অভিসারী অযথার্থ সমাকল নিজেই সন্তত অপেক্ষক।

ধরি (1) $J(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$, যেখানে $f(x, y)$ অপেক্ষকটি $R : [a, B; c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে সন্তত এবং B ইচ্ছাধীন সংখ্যা।

এবং (2) $\int_a^\infty f(x, y)dx$ $[c, d]$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী। তাহলে প্রমাণ করতে হবে যে $J(y)$ $[c, d]$ অন্তরালে y-এর একটি সন্তত অপেক্ষক।

প্রমাণ : ধরি ε একটি প্রদত্ত ধনাত্মক সংখ্যা। তাহলে $\frac{1}{3}\varepsilon$ সংখ্যাটির অনুসঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা X পাওয়া যাবে যে

$$(1) \quad \left|\int_B^\infty f(x, y)dx\right| = \left|J(y) - \int_a^B f(x, y)dx\right| < \frac{1}{3}\varepsilon \text{ যখন } B > X$$

এবং X সংখ্যাটি $[c, d]$ অন্তরালে y-এর উপর অনির্ভরশীল। এখন, প্রদত্ত শর্ত থেকে পাই

$$\int_a^B f(x, y)dx \text{ অথবা } \int_a^X f(x, y)dx$$

$[c, d]$ অন্তরালে y-এর সন্তত অপেক্ষক (উপপাদ্য 9.3.1 দ্রষ্টব্য)। অতএব $\frac{1}{3}\varepsilon$ সংখ্যাটি প্রদত্ত হলে এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যাবে যে

(2) $\left|\int_a^X f(x, y+\Delta y)dx - \int_a^X f(x,y)dx\right| < \frac{1}{3}\varepsilon$ যখন $|\Delta y| < \delta$

আবার $J(y) = \int_a^X f(x,y)dx + \int_X^\infty f(x,y)dx$

অতএব $J(y+\Delta y) - J(y)$

$$= \left\{\int_a^X f(x, y+\Delta y)dx - \int_a^X f(x,y)dx\right\}$$

$$+\left\{\int_X^\infty f(x, y+\Delta y)dx - \int_X^\infty f(x,y)dx\right\}$$

$\Rightarrow$ $|J(y+\Delta y) - J(y)|$ {(1) এবং (2) থেকে পাই }

$$\le \left|\int_a^X f(x, y+\Delta y)dx - \int_a^X f(x,y)dx\right|$$

$$+\left|\int_X^\infty f(x, y+\Delta y)dx\right| + \left|\int_X^\infty f(x,y)dx\right|$$

অর্থাৎ $\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ যখন $|\Delta y| < \delta$

অর্থাৎ $|J(y+\Delta y) - J(y)| < \varepsilon$ যখন $|\Delta y| < \delta$

অতএব $J(y)$ $[c, d]$ অন্তরালে y-এর একটি সন্তত অপেক্ষক।

9.5.2 সমাকলনযোগ্যতা (Integrability)

উপপাদ্য 2 : যদি (1) $R : [a, B ; c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে $f(x, y)$ একটি সন্তত অপেক্ষক হয় (B ইচ্ছাধীন সংখ্যা) এবং (2) অযথার্থ সমাকল $J(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ $[c, d]$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী হয়, তাহলে $J(y)$ অপেক্ষকটিকে 'সমাকলন চিহ্নের ভিতরে' সমাকলন করা সম্ভব। অর্থাৎ

$$\int_c^d \left\{\int_a^\infty f(x,y)dx\right\} dy = \int_a^\infty \left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\} dx$$

প্রমাণ : ধরি, কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত। তাহলে $\dfrac{\varepsilon}{d-c}$ ধনাত্মক সংখ্যাটির অনুসঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা $X(\varepsilon)$ পাওয়া যাবে যে

$$\left|\int_B^{\infty} f(x,y)dx\right| = \left|J(y) - \int_a^B f(x,y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c} \qquad \text{যখন } B > X(\varepsilon)$$

তাহলে

$$\int_c^d \left\{\int_B^{\infty} f(x,y)dx\right\}dy \le \int_c^d \left(\left|\int_B^{\infty} f(x,y)dx\right|\right)dy$$

$$< \int_c^d \frac{\varepsilon}{d-c}dy = \frac{\varepsilon}{d-c} \times (d-c) = \varepsilon$$

অতএব

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^B f(x,y)dx\right)dy + \int_c^d \left(\int_B^{\infty} f(x,y)dx\right)dy$$

$$= \int_a^B \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx + \int_c^d \left(\int_B^{\infty} f(x,y)dx\right)dy$$

ডানদিকের প্রথম দ্বি-সমাকলটি যথার্থ বলে এটিতে সমাকলনের ক্রম বদল করা সম্ভব এবং করা হয়েছে। ফলে,

$$\left|\int_c^d J(y)dy - \int_a^B \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx\right| = \left|\int_c^d \left(\int_B^{\infty} f(x,y)dx\right)dy\right|$$

$$\le \int_c^d \left(\left|\int_B^{\infty} f(x,y)dx\right|\right)dy$$

$$< \varepsilon \text{ যখন } B > X(\varepsilon)$$

∴ প্রমাণটি সম্পূর্ণ হল।

9.5.3 অযথার্থ সমাকলের অন্তরকলন

উপপাদ্য 3. যদি (*i*) $R : [a, B; c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে $f(x, y)$ এবং $f_y(x, y)$ সন্তত হয়

(B যদৃচ্ছ), (ii) $J(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ [c, d] অন্তরালে সম-অভিসারী হয় এবং (iii) $\int_a^\infty f_y(x,y)dx$ [c, d] অন্তরালে সম-অভিসারী হয় তাহলে

$$J'(y) = \frac{a}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y))\,dx$$

প্রমাণ : ধরি, $\phi(y) = \int_a^\infty f_y(x,y)dx$

তাহলে 9.5.1 অনুচ্ছেদে বর্ণিত উপপাদ্য থেকে পাই, $\phi(y)$ $c \le y \le d$ অন্তরালে সন্তত এবং 9.5.2 উপপাদ্য অনুসারে পাই

$$\begin{aligned}
\int_c^h \phi(y)dy &= \int_c^h \left\{\int_a^\infty f_y(x,y)dx\right\}dy \qquad c \le h \le d \\
&= \int_a^\infty \left\{\int_c^h f_y(x,y)dy\right\}dx \\
&= \int_a^\infty [f(x,h) - f(x,c)]dx \\
&= J\ (h) - J(c) \\
&\Rightarrow J'\ (h) = \phi(h) \qquad c \le h \le d
\end{aligned}$$

অর্থাৎ $\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx$

উদাহরণ 1 : প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^\infty \frac{e^{-pt} - e^{qt}}{t}dt = \log\frac{q}{p}, \qquad 0 < p < q$$

প্রমাণ : $\int_0^\infty e^{-xt}dt$ সমাকলটি $p \le x \le q$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী। কারণ

$p \le x \Rightarrow \left|e^{-xt}\right| < e^{-pt}, t > 0$ এবং $\int_0^\infty e^{-pt}dt$ সমাকলটি অভিসারী।

আবার e^{-xt} অপেক্ষকটি $p \le x \le q$, $0 \le t < \infty$ হলে সন্তত এবং e^{-pt} অপেক্ষকটি $0 \le t < \infty$ অসীম অন্তরালে সন্তত।

এখন
$$\log\frac{q}{p} = \int_p^q \frac{1}{x}\,dx = \int_p^q \left(\int_0^\infty e^{-xt}dt\right)dx$$

$$= \int_o^\infty \left(\int_p^q e^{-xt}dx\right)dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-xp} - e^{xq}}{t}\,dt$$

উদাহরণ 2 : দেখান যে

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-xt}dt = -\int_0^\infty e^{-xt}t\,dt \qquad 0 < x < \infty$$

সমাধান : x_0 একটি ধনাত্মক সংখ্যা হলে আরো এমন দুটি ধনাত্মক সংখ্যা A, B পাওয়া সম্ভব যে $0 < A < x_0 < B$ হয়। তাহলে $\int_0^\infty e^{-xt}dt$ সমাকলটি $A \le x \le B$ অন্তরালে সম-অভিসারী। (উদহারণ 1 দেখুন) এবং $\int_0^\infty e^{-xt}t\,dt$ সমাকলটিও ঐ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী। কারণ,

$$\left|e^{-xt}t\right| \le te^{-At} = M(t) \text{ এবং } \int_0^\infty M(t)dt = \int_0^\infty te^{-At}dt = \frac{1}{A^2} \Rightarrow \int_0^\infty te^{-At}dt$$

সমাকলটি $A \le x \le B$ অন্তরালে অভিসারী।

অতএব উপপাদ্য 3 প্রয়োগ করে পাই

$$\frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-xt}dt = \int_0^\infty \frac{d}{dx}(e^{-xt})dt$$

$$= -\int_0^\infty te^{-xt}dt \qquad A \le x \le B$$

কিন্তু এখানে x_0, A, B যদৃচ্ছ ধনাত্মক সংখ্যা।

অতএব উপরের সম্বন্ধটি $0 < x < \infty$ হলেও সিদ্ধ হবে।

উদাহরণ 3 : $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt^2}\,dx$ হলে দেখান যে $F(x)$ অপেক্ষকটি $A < x < B$ অন্তরালে সন্তত যেখানে, A, B দুটি ইচ্ছাধীন ধনাত্মক সংখ্যা।

প্রমাণ : এখানে $f(x,t) \equiv e^{-xt^2}$ অপেক্ষকটি $A < x < B$, $0 \le t < \infty$ হলে সন্তত।

আবার যেহেতু $\left|e^{-xt^2}\right| < e^{-At^2}$, ($0 < A < x$ হওয়াতে) এবং $\int_0^\infty e^{-At^2}\,dt$ সমাকলটি অভিসারী,

অতএব $\int_0^\infty e^{-xt^2}\,dt$ সমাকলটি $0 < A < x < B$ অন্তরালে সম-অভিসারী $\Rightarrow$ প্রদত্ত সমাকলটি $A < x < B$ অন্তরালে সন্তত।

মন্তব্য : এখানে A, B দুটি ইচ্ছাধীন ধনাত্মক সংখ্যা ফলে আমরা বলতে পারি যে $\int_0^\infty e^{-xt^2}\,dx$ সমাকলটি $0 < x < \infty$ অন্তরালে সন্তত।

উদাহরণ 4 : $F(x) = \int_0^\infty e^{-xt^2}\,dt$ হলে $\int_1^2 F(x)dx$ নির্ণয় করুন।

উদাহরণ 3 থেকে পাই $\int_0^\infty e^{-xt^2}\,dt$ $1 \le x \le 2$ অন্তরালে সম-অভিসারী এবং e^{-xt^2} অপেক্ষকটি $0 \le t < \infty$, $1 \le x \le 2$ হলে সন্তত। ফলে 9.5.2 -এর উপপাদ্য 2 থেকে পাই

$$\int_1^2 F(x)dx = \int_0^\infty \left(\int_1^2 e^{-xt^2}\,dx \right) dt$$

$$= \int_0^\infty \left(e^{-t^2} - e^{-2t^2}\right) t^{\frac{1}{2}dt}$$

উদাহরণ 5 : প্রমাণ করুন যে

$$J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\,dx$$

সমাকলটি $\alpha \ge 0$ এবং $\beta \ne 0$ (একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা হলে) সমভাবে অভিসারী হবে।

প্রমাণ : ধরি, $S_R(\alpha) = \int_0^R e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ এখন

$$\text{এখন, } J(\alpha) - S_R(\alpha) = \int_R^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx, \qquad R > 0$$

এবং $\int_R^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ কে আংশিক পদ্ধতিতে সমাকলন করে পাই

$$J(\alpha) - S_R(\alpha) = \left.\frac{-e^{-\alpha x} \cos \beta x}{\beta x}\right]_R^{\infty} - \int_R^{\infty} \frac{\cos \beta x}{\beta} \frac{(1+\alpha x)e^{-ax}}{x^2} dx$$

$$J(\alpha) - S_R(\alpha) = -\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-\alpha x} \cos \beta x}{\beta x} + \frac{e^{-\alpha R} \cos \beta R}{\beta R} - \int_R^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}(1+\alpha x) \cos \beta x}{\beta x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{\beta} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\cos \beta x}{x} \right) e^{-\alpha x} + \frac{e^{-\alpha R} \cos \beta R}{\beta R}$$

$$- \int_R^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}(1+\alpha x) \cos \beta x}{\beta x^2} dx$$

$$= \frac{e^{-\alpha R} \cos \beta R}{\beta R} - \int_R^{\infty} \frac{e^{-\alpha x}(1+\alpha x) \cos \beta x}{\beta x^2} dx$$

অতএব $\quad \left| J(\alpha) - S_R(\alpha) \right| \le \left| e^{-\alpha R} \frac{\cos \beta R}{\beta R} \right| + \int_R^{\infty} \left| \frac{e^{-\alpha x}(1+\alpha x) \cos \beta x}{\beta x^2} \right| dx$

যেহেতু $\quad \left| e^{-\alpha R} \right| < 1$

$\left| \cos \beta R \right| < 1$

এবং $\quad \left| e^{-\alpha x}(1+\alpha x) \cos \beta x \right| \le \left| e^{-\alpha x} \right| \left| (1+\alpha x) \right|$

$$< e^{-\alpha x} . e^{\alpha x} = 1$$

অতএব $\left| J(\alpha) - S_R(\alpha) \right| < \frac{1}{R|\beta|} + \int_R^{\infty} \frac{dx}{|\beta| x^2}$

অর্থাৎ, $\quad < \frac{1}{2R|\beta|}$

ফলে $|J(\alpha) - S_R(\alpha)| < \varepsilon$ হবে যখন $R > \dfrac{2}{\varepsilon|\beta|} = Q$ (ধরি)

অতএব কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে আমরা এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা $Q = \dfrac{2}{\varepsilon|\beta|}$ পাচ্ছি যে

$$|J(\alpha) - S_R(\alpha)| < \varepsilon \text{ যখন } R > Q$$

এবং Q সংখ্যাটি α-এর উপর নির্ভরশীল নয়।

অতএব $J(\alpha)$ সমাকলটি $\alpha \geq 0$ হলে সমভাবে অভিসারী।

উদাহরণ 6 : দেখান যে $J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx$ সমাকলটি $\alpha \geq 0$ হলে সমভাবে অভিসারী। ($\beta \neq 0$, নির্দিষ্ট সংখ্যা)

প্রমাণ : $|e^{-\alpha x} \sin \beta x| \leq e^{-\alpha x} \leq e^{-\alpha_0 x}$ যখন $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ এবং $\int_0^\infty e^{-\alpha_0 x} \, dx$ অভিসারী। ফলে $J(\alpha)$ সমাকলটি $0 < \alpha_0 \leq \alpha$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

উদাহরণ 7 : $J(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \dfrac{\sin \beta x}{x} dx$, $\alpha \geq 0$, $\beta \neq 0$ নির্দিষ্ট সংখ্যা হলে, $J'(\alpha)$ নির্ণয় করুন। অতঃপর $J'(\alpha)$ কে সমাকলন করে $J(\alpha)$ নির্ণয় করুন।

সমাধান : উদাহরণ 5-এ দেখানো হয়েছে $\alpha \leq 0$ হলে $J(\alpha)$ সমভাবে অভিসারী এবং উদাহরণ 6 থেকে পাই

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x}\right) dx = -\int_0^\infty e^{-x} \sin \beta x \, dx, \qquad \alpha \geq 0 \text{ হলে সমভাবে অভিসারী।}$$

অতএব $$J'(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx$$

কিন্তু
$$\frac{d}{dx} e^{-\alpha x}(\beta \cos \beta x + \alpha \sin \beta x)$$
$$= e^{-\alpha x}[-\beta^2 \sin \beta x + \alpha\beta \cos \beta x - \alpha\beta \cos \beta x - \alpha^2 \sin \beta x]$$
$$= -e^{-\alpha x}(\alpha^2 + \beta^2) \sin \beta x$$

অতএব $$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = \left[-\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha x}(\beta \cos \beta x + \alpha \sin \beta x)\right]_0^\infty$$

$$= \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\Rightarrow \quad J'(\alpha) = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

উভয়দিকে α সাপেক্ষে সমাকলন করে পাই

$$J(\alpha) = -\tan^{-1}\frac{\alpha}{\beta} + c$$

যেহেতু $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} J(\alpha) = 0$ এবং (2) থেকে

$$\lim_{\alpha \to +\infty} J(\alpha) = -\frac{\pi}{2} + c \quad \text{যখন} \quad \beta > 0$$

$$= \frac{\pi}{2} + c \quad \text{যখন} \quad \beta < 0$$

অতএব $$c = \frac{\pi}{2} \quad \text{যখন} \quad \beta > 0$$

$$= -\frac{\pi}{2} \quad \text{যখন} \quad \beta < 0$$

ফলে $$J(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\sin \beta x}{x}\, dx, \quad \beta \neq 0$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\alpha}{\beta} \qquad \beta > 0$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\alpha}{\beta} \qquad \beta < 0$$

উদাহরণ 8 : প্রমাণ করুন যে $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

প্রমাণ : উদাহরণ 7-এর অযথার্থ সমাকল

$$J(\alpha) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}\sin \beta x}{x}\, dx \text{ এর সমাকল্য}$$

$\frac{e^{-\alpha x}\sin \beta x}{x}$ সন্তত, যখন $0 \leq x < \infty$, $0 \leq \alpha < \infty$ এবং সমাকল $J(\alpha)$ $0 \leq \alpha < \infty$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী। অতএব 9.5.1 অনুচ্ছেদের উপপাদ্য 1 থেকে পাই যে অযথার্থ সমাকল $J(\alpha)$ $0 \leq \alpha < \infty$ অন্তরালে সন্তত। ফলে

$$J(0) = \lim_{\alpha \to 0} J(\alpha) \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} dx = \lim_{\alpha \to 0}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\alpha}{\beta}\right] \qquad \text{যখন} \quad \beta > 0$$

$$= \frac{\pi}{2} \qquad \text{যখন} \quad \beta > 0$$

এবং
$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} dx = \lim_{\alpha \to 0}\left[-\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{\alpha}{\beta}\right] \qquad \text{যখন} \quad \beta < 0$$

$$= -\frac{\pi}{2} \qquad \text{যখন} \quad \beta < 0$$

অতএব প্রমাণিত হল যে $\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

উদাহরণ 9 : $\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt$ সমাকলটির মান নির্ণয় করুন এবং দেখান যে এটি $x = 0$ বিন্দুতে অসন্তত।

সমাধান : ধরি $f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin xt}{t} dt$

তাহলে দেখা যাচ্ছে $f(0) = 0$ আবার উদাহরণ 8-এ প্রমাণিত হয়েছে যে

$$\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \text{যখন} \quad \beta > 0$$

$$= -\frac{\pi}{2} \qquad \text{যখন} \quad \beta < 0$$

অর্থাৎ
$$f(\beta) = \frac{\pi}{2} \qquad \text{যখন} \quad \beta > 0$$

$$= -\frac{\pi}{2} \qquad \text{যখন} \quad \beta < 0$$

অর্থাৎ

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} \quad \text{যখন} \quad x > 0 \\ &= 0 \quad \text{যখন} \quad x = 0 \\ &= -\frac{\pi}{2} \quad \text{যখন} \quad x < 0 \end{aligned}\right\} = \frac{\pi}{2}\ \sin\ x$$

এবং এটি $x = 0$ বিন্দুতে অসন্তত।

উদাহরণ 10 : $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \dfrac{b}{a^2+b^2}$ $(a > 0)$ ধরে নিয়ে দেখান যে

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-fx}-e^{-gx}}{x}\sin bx\,dx = \tan^{-1}\frac{g}{b} - \tan^{-1}\frac{f}{b}, \quad g > f > 0$$

সমাধান : $J(a) = \int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$ সমাকলটির সমাকল্য e^{-ax} $\sin bx$ R : $[0, B; f, g]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে সন্তত, যেখানে B ইচ্ছাধীন ধনাত্মক সংখ্যা এবং $0 < f \le a \le g$

যেহেতু $\quad \left|e^{-ax}\sin bx\right| \le e^{-ax} \le e^{-fx} = M(x)$

এবং $\int\limits_0^\infty M(x)dx = \int\limits_0^\infty e^{-fx}dx$ সমাকলটি অভিসারী অতএব $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$ সমাকলটি $f \le a \le g$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী। তাহলে 9.5.2 অনুচ্ছেদের উপপাদ্য 2 প্রয়োগ করে পাই

$$\begin{aligned} \int\limits_f^g J(a)da &= \int\limits_f^g \left\{\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx\right\}da \\ &= \int\limits_0^\infty \left\{\int\limits_f^g e^{-ax}\sin bx\,da\right\}dx \end{aligned}$$

অর্থাৎ $\int\limits_f^g \dfrac{b}{a^2+b^2}\,da = \int\limits_0^\infty \left[\dfrac{e^{-ax}\sin bx}{-x}\right]_f^g dx$

অর্থাৎ $\int\limits_0^\infty \dfrac{e^{-fx}-e^{-gx}}{x}\sin bx\,dx = \tan^{-1}\dfrac{g}{b} - \tan^{-1}\dfrac{f}{b}$

উদাহরণ 11. দেখান যে

(i) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

(ii) $\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(b-a);\ a, b > 0$

(iii) $\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}, a \geq 1$এবং $= \frac{\pi a}{2},\ 0 \leq a < 1$

সমাধান :

(i) যেহেতু $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right). \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$

$x = 0$ বিন্দুতে সমাকল্যের দূরীকরণযোগ্য অসান্তত্য আছে। তাই এটি একটি প্রথম রকমের (*Type I*) অযথার্থ সমাকল।

$$I = \int_O^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$$

এখন, আংশিক পদ্ধতিতে সমাকলন করে পাই

$$\int_0^R \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \sin^2 x\left(-\frac{1}{x}\right)\Big]_0^R + \int_0^R \frac{2\sin x\cos x}{x}\,dx$$

$$= -\frac{\sin^2 R}{R} + \int_0^R \frac{\sin 2x}{2x}\,d(2x)$$

$$= -\frac{\sin^2 R}{R} + \int_0^{2R} \frac{\sin u}{u}\,du$$

অতএব $\quad I = -\lim_{R\to\infty}\frac{\sin^2 R}{R} + \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$

$$= 0 + \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}$$ (উদাহরণ 8 দেখুন)

(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ আকার}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-a\sin ax + b\sin bx}{2x} \quad \left(\frac{0}{0}\text{ আকার}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-a^2\cos ax + b^2\cos bx}{2}$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2}$$

অতএব প্রদত্ত সমাকলটি প্রথম রকমের অযথার্থ সমাকল। আবার যেহেতু

$\left|\frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\right| \le \left|\frac{\cos ax}{x^2}\right| + \left|\frac{\cos bx}{x^2}\right| \le \frac{2}{x^2}$ এবং $\int_0^\infty \frac{2}{x^2}\,dx$ সমাকলটি অভিসারী।

প্রদত্ত সমাকলটিও অভিসারী। এখন, আংশিক পদ্ধতিতে সমাকলন করে পাই

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \left.(\cos ax - \cos bx)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{b\sin bx - a\sin ax}{x}\,dx$$

যেহেতু, $\left|(\cos ax - \cos bx)\left(-\frac{1}{x}\right)\right| \le \left|\frac{\cos ax}{x}\right| + \left|\frac{\cos bx}{x}\right| \le \frac{2}{|x|}$

এবং $\frac{2}{|x|} \to 0$ যখন $x \to \infty$

অতএব $\lim_{x\to\infty} (\cos ax - \cos bx)\left(-\frac{1}{x} = 0\right)$

এবং $\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}$ $\left(\frac{0}{0}\text{ আকার}\right)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{b\sin bx - a\sin ax}{1} = 0$$

তাই $$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{b\sin bx - a\sin ax}{x}\,dx$$

$$= b\int_0^\infty \frac{\sin bx}{bx}\,d(bx) - a\int_0^\infty \frac{\sin ax}{ax}\,d(ax)$$

$$= (b-a)\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$$

$$= (b-a)\frac{\pi}{2}$$

(iii) $\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin x}{x^2}\,dx$ এখানে সমাকল্যটির দূরীকরণযোগ্য অসান্তত্য আছে। $x = 0$ বিন্দুতে এবং যেহেতু $\left|\frac{\sin ax \sin x}{x^2}\right| = \frac{|\sin ax||\sin x|}{|x^2|} \le \frac{1}{x^2}$ অযথার্থ সমাকলটি অভিসারী। আংশিক পদ্ধতিতে সমাকলন করে পাই

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\sin ax \sin x\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{x}\{\cos x \sin ax + a\sin x \cos ax\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{[\{\sin(a+1)x + \sin(a-1)x\} + a\{\sin(a+1)x - \sin(a-1)x\}]}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{(a+1)\sin(a+1)x - (a-1)\sin(a-1)x}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}[(a+1)-(a-1)]\frac{\pi}{2} \qquad \text{যখন} \quad a > 1$$

$$= \frac{1}{2}[(a+1)+(a-1)]\frac{\pi}{2} \qquad \text{যখন} \quad a < 1$$

অতএব $\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ যখন $a > 1$

$= \frac{a\pi}{2}$ যখন $a < 1$

উদাহরণ 12 : প্রমাণ করুন যে

(i) $\int_0^\infty \frac{\cos xy}{(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} e^{-y} = \int_0^\infty \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx$ যখন $y > 0$

(ii) $\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2}(1-e^{-y})$

প্রমাণ :

(i) (*a*) ধরি $f(y) = \int_0^\infty \frac{\cos xy}{(1-x^2)} dx$

যেহেতু $\left|\frac{\cos xy}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2} = M(x)$ এবং $\int_0^\infty M(x)dx$ অভিসারী, অযথার্থ সমাকল $f(y)$, y-এর প্রত্যেক মানের জন্য সম-অভিসারী।

আবার $f(y), \frac{\cos xy}{1+x^2}$ এই সন্তত অপেক্ষকটির সম-অভিসারী অযথার্থ সমাকল হবার ফলে y-এর সব মানের জন্য সন্তত এবং তাই $f(y)$ ‘সমাকলন চিহ্নের ভিতরে’ সমাকলনযোগ্য।

(b) ধরি $\phi(y) = \int_0^y f(y)dy,$

তাহলে $\phi(y)$, y-এর মানের জন্য y-এর একটি সন্তত অপেক্ষক।

আবার, $\phi(y) = \int_0^\infty \left\{\int_0^y \frac{\cos xy}{1+x^2} dy\right\} dx$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x(1+x^2)} dx$$

(c) $f(y)=\int_0^{\infty}\frac{\cos xy}{1+x^2}dx$ অযথার্থ সমাকলটি অন্তরকলনযোগ্য হবে

যদি $\int_0^{\infty}\frac{d}{dy}\left(\frac{\cos xy}{1+x^2}\right)dx$ সমাকলটি সমঅভিসারী হয়।

অর্থাৎ যদি $-\int_0^{\infty}\frac{x\sin xy}{1+x^2}dx$ সমাকলটি সমঅভিসারী হয়।

এখন $\frac{x}{1+x^2}$ অপেক্ষকটি $x>1$ হলে ক্রম হ্রাসমান এবং $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=0$

অতএব যখন $x''>x'>1$, তখন, দ্বিতীয় মধ্যমমান উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$\int_{x'}^{x''}\frac{x}{1+x^2}\sin yx\,dx=\frac{x'}{1+x'^2}\int_{x'}^{c}\sin yx\,dx+\frac{x''}{1+x''^2}\int_{c}^{x''}\sin yx\,dx$$

(যেখানে $x'<c<x''$)

$$=\frac{x'}{y(1+x'^2)}\int_{yx'}^{yc}\sin x\,dx+\frac{x''}{y(1+x''^2)}\int_{yx'}^{yc}\sin x\,dx$$

অতএব $\left|\int_{x'}^{x''}\frac{x}{1+x^2}\sin yx\,dx\right|\le\frac{4x'}{y(1+x'^2)}\le\frac{4x'}{y_0(1+x'^2)}$ (যখন $y\ge y_0\ge 0$)

অতএব কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে y-এর উপর অনির্ভরশীল এমন আর একটি ধনাত্মক সংখ্যা $X(\varepsilon)$ পাওয়া যাবে যে

$$\left|\int_{x'}^{x''}\frac{x}{1+x^2}\sin yx\,dx\right|<\varepsilon \qquad \text{যখন} \quad x''>x'>X(\varepsilon)$$

অর্থাৎ $\int_0^{\infty}\frac{x\sin xy}{1+x^2}dx$ সমাকলটি সমঅভিসারী যখন $y\ge y_0\ge 0$

এবং $f'(y)=-\int_0^{\infty}\frac{x}{1+x^2}\sin xy\,dx$

(d) এখন $\phi(y) = \int_0^y f(y)dy \Rightarrow \phi'(y) = f(y)$

এবং $\quad \phi''(y) = +f'(y) \quad = -\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2} \sin xy\, dx$

$$= -\int_0^\infty \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \frac{\sin xy}{x}\, dx$$

অর্থাৎ $\quad \phi''(y) = -\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\, dx \;\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x(1+x^2)}\, dx$

$$= -\frac{\pi}{2} + \phi(y) \qquad \text{যখন} \quad y > 0$$

(e) উপরের সমীকরণ থেকে পাই

$$\phi''(y) - \phi(y) = -\frac{\pi}{2}$$

এটি একটি দ্বিতীয় ক্রমের রৈখিক অন্তরকল সমীকরণ। এর সমাধানে

$$\phi(y) = Ae^{y} + Be^{-y} + \frac{\pi}{2} \qquad \text{যখন} \quad y > 0$$

কিন্তু $\phi(y)$, $y \geq 0$ অন্তরালে সন্তত এবং $\phi(0) = 0$

অতএব $\lim_{y \to 0} \phi(y) = 0 \Rightarrow \qquad A + B + \frac{\pi}{2} = 0$ ....(i)

আবার $\phi'(y) = f(y)$ y-এর সব মানের জন্য সন্তত।

এবং $\phi'(0) = f(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \; A - B - \frac{\pi}{2} = 0$ .... (ii)

(i) এবং (ii) থেকে পাই $A = 0$ এবং $B = -\frac{\pi}{2}$

অতএব $\phi(y) = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-y})$

এবং $\quad f(y) = \phi'(y) = \frac{\pi}{2} e^{-y}$

এবং $\int_0^\infty \frac{x \sin xy}{1+x^2} dx = -\int_0^\infty \frac{d}{dy}\left(\frac{\cos xy}{1+x^2}\right) dx = -\frac{d}{dy} f(y) = \frac{\pi}{2} e^{-y}$

অতএব 12 (*ii*) প্রমাণিত।

উদাহরণ 13 : সমাকলন চিহ্নের ভিতরে অন্তরকলন করার শর্তাবলী পূর্ণ হচ্ছে ধরে নিয়ে দেখান যে,

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2} = \frac{\pi}{b} \log\left(\frac{a+b}{b}\right), \ \ b \neq 0$$

সমাধান : ধরি $I(a) = \int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2}$ সমাকলটি a-এর প্রত্যেক মানের জন্য সমভাবে অভিসারী এবং $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} \frac{\log(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2} dx$ সমাকলটিও a-এর প্রত্যেক মানের জন্য সম-অভিসারী।

$$\text{তাহলে} \quad \frac{dI}{da} = \int_0^\infty \frac{2ax^2}{(1+a^2x^2)(1+b^2x^2)} dx$$

$$= \frac{2a}{a^2-b^2}\left[\int_0^\infty \frac{dx}{1+b^2x^2} - \int_0^\infty \frac{dx}{1+a^2x^2}\right]$$

$$= \frac{2a}{a^2-b^2}\left[\frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} - \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{dv}{1+v^2}\right]$$

$$= \frac{2a}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{b}\frac{1}{a+b} \qquad \text{যেহেতু} \quad b \neq 0$$

$$\Rightarrow \ I(a) = \frac{\pi}{b}\log(a+b) + c$$

আবার $\quad I(0) = 0 \Rightarrow 0 = I(0) = \dfrac{\pi}{b}\log b + c$

$$\Rightarrow \ -\frac{\pi}{b}\log b = c$$

অতএব $\quad I(a) = \dfrac{\pi}{b}\log\left(\dfrac{a+b}{b}\right)$

উদাহরণ 14 : সমাকলন চিহ্নের ভিতরে অন্তরকলন করে দেখান যে

$$\int_0^\infty e^{-x^2-a^2/x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2|a|}$$

সমাধান : ধরি, $I(a) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2-a^2/x^2}\,dx$

$$\therefore \quad \frac{dI}{da} = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-x^2-a^2/x^2}\right)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x^2-a^2/x^2}\left(-\frac{2a}{x^2}\right)dx$$

$z = \dfrac{|a|}{x}$ বসিয়ে পাই

x	z
0	∞
∞	0

$$\frac{dI}{da} = -2\int_0^\infty e^{-a^2/z^2-z^2}\,dz$$

$$= -2I \Rightarrow \frac{dI}{I} = -2|a|$$

$$\therefore \quad I = Ce^{-2|a|}$$

যখন $a = 0$

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$\therefore \quad c = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ এবং

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|a|}$$

9.6 সারাংশ

A. প্রাচলের অপেক্ষকরূপে নির্দিষ্ট সমাকল।

$u = f(x, y)$ অপেক্ষকটি $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ আয়তক্ষেত্রে সংজ্ঞিত এবং x চল-সাপেক্ষে $a \le x \le b$ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য হলে $J(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ সমাকলটিকে $c \le y \le d$ অন্তরালে প্রাচল y-এর অপেক্ষক বলা যায়। যদি $f(x, y)$ অপেক্ষকটি $R : [a, b; c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে সন্তত হয় তাহলে $J(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ সমাকলটি $[c, d]$ অন্তরালে প্রাচল y-এর সন্তত অপেক্ষক হবে। এক্ষেত্রে $J(y)$ $[c, d]$ অন্তরালে y-সাপেক্ষে সমাকলনযোগ্য এবং

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y)dx \right\} dy$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)dy \right\} dx$$

আবার, যদি $f(x, y)$ এবং $f_y\ (x, y)$ অপেক্ষক দুটি $R : [a, b; c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে সন্তত হয় তাহলে $J(y)$ $[c, d]$ অন্তরালে y-এর একটি অন্তরকলনযোগ্য অপেক্ষক হবে এবং এর অন্তরকলজ হবে

$$\frac{dJ}{dy} = \int_a^b f_y(x, y)dx$$

B. প্রাচলের উপর নির্ভরশীল অযথার্থ সমাকলের সান্ততা, অন্তরকলনযোগ্যতা এবং সমাকলনযোগ্যতা, সমাকলটির সম-অভিসরণের উপর নির্ভর করে। কোন প্রাচলের উপর নির্ভরশীল অযথার্থ সমাকল সম-অভিসারী কিনা নির্ণয় করতে হলে নিচের পরীক্ষাগুলির প্রয়োগ করতে হয়।

I. কোশি নির্ধারক (Cauchy criterion)

(a) প্রথম রকমের অযথার্থ সমাকল $\int_a^\infty f(x, y)dx,\ c \le y \le d$ এর $[c, d]$ অন্তরালে সম-অভিসরণের একটি প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হচ্ছে যে, পূর্বনির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা ε এর

অনুসঙ্গী এবং $[c, d]$ অন্তরালে y-এর উপর নির্ভরশীল এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা $X \equiv X(\varepsilon)$ পাওয়া যাবে যে $x'' > x' > X(\varepsilon)$ হলে $\left|\int_{x'}^{x''} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$ অসমতাটি সিদ্ধ হবে।

(b) y প্রাচলের উপর নির্ভরশীল, দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকল এর $\int_{a+}^{b} f(x, y)\, dx$ $[c, d]$ অন্তরালে অভিসরণের একটি প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত হচ্ছে যে, পূর্বনির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর অনুসঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা $\delta(\varepsilon)$ পাওয়া যাবে ($\delta(\varepsilon)$, $[c, d]$ অন্তরালে y-এর উপর অনির্ভরশীল) যে, $0 < \lambda < \mu < \delta$ হলে $\left|\int_{a+\lambda}^{a+\mu} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$ অসমতাটি সিদ্ধ হয়।

II. বায়ারস্ট্রাসের M-পরীক্ষা (The Weirstrass M-Test)

(a) $R : [a, B ; c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে (যেখানে B ইচ্ছাধীন ধ্রুবক) সন্তত অপেক্ষক $f(x, y)$-এর অযথার্থ সমাকল $\int_a^{\infty} f(x, y)dx$ $[c, d]$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী হবে যদি y-নিরপেক্ষ এমন একটি অপেক্ষক $M(x)$ পাওয়া যায় যে

(i) $M(x) \geq 0$ যখন $x \geq a$

(ii) $|f(x, y)| \leq M(x)$ যখন $x \geq a$ এবং $c \leq y \leq d$

(iii) $\int_a^{\infty} M(x)dx$ অভিসারী।

(b) যদি

(i) $f(x, y)$ অপেক্ষকটি সন্তত হয়, যখন $a < x \leq b$ এবং $c \leq y \leq d$

(ii) y-নিরপেক্ষ অপেক্ষক $M(x)$, $a < x \leq b$ অন্তরালে সন্তত হয়

(iii) $|f(x, y)| \leq M(x)$ যখন $a < x \leq b, \quad c \leq y \leq d$

(iv) $\int_{a+}^{b} M(x)dx$ অভিসারী হয়

তাহলে $\int_{a+}^{b} f(x, y)dx$ এই দ্বিতীয় রকমের অযথার্থ সমাকলটি $c \leq y \leq d$ অন্তরালে সম-অভিসারী হবে।

(c) প্রাচলের উপর নির্ভরশীল অযথার্থ সমাকল দ্বারা সংজ্ঞিত অপেক্ষকের সান্তত্য, সমাকলন এবং অন্তরকলন।

(i) যদি

(a) R : $[a, B ; c, d]$ বদ্ধ আয়তক্ষেত্রে (B ইচ্ছাধীন সংখ্যা) $f(x, y)$ একটি সন্তত অপেক্ষক হয় এবং

(b) $J(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx, [c, d]$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী হয় তাহলে $J(y)$ অপেক্ষকটি $[c,d]$ অন্তরালে y-এর একটি সন্তত অপেক্ষক এবং এটি ঐ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য এবং

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d \left\{ \int_a^\infty f(x, y)dx \right\} dy = \int_a^\infty \left\{ \int_c^d f(x, y)dy \right\} dx$$

(ii) যদি

(1) $f(x, y)$ এবং $f_y(x, y)$ অপেক্ষক দুটি সন্তত হয়, যখন $a \le x < \infty$, $c \le y \le d$

(2) $\int_a^\infty f(x, y)dx$ অভিসারী হয়, যখন $c \le y \le d$

(3) $\int_a^\infty f_y(x, y)dx$ $[c, d]$ অন্তরালে সম-অভিসারী হয় তাহলে

$$\frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) \equiv \frac{d}{dy} J(y) = \int_a^\infty f_y(x, y)dx$$

9.7 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. দেখান যে

(i) $\int_0^\infty e^{-ax} \cos mx \, dx = \dfrac{a}{a^2 + m^2}$

(ii) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin mx \, dx = \dfrac{m}{a^2 + m^2}$ যেখানে $a > 0$

এবং 'সমাকলন চিহ্নের ভিতরে' অন্তরকলন করে দেখান যে

(iii) $\int_0^\infty e^{-ax} x^n \cos mx\, dx = \dfrac{n!\cos(n+1)\theta}{(a^2+m^2)^{\frac{n+1}{2}}}$

(iv) $\int_0^\infty e^{-ax} x^n \sin mx\, dx = \dfrac{n!\sin(n+1)\theta}{(a^2+m^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ যেখানে $m = a \tan \theta$

2. দেখান যে $\int_0^\infty e^{-ax}\cos mx\, dx = \dfrac{a}{a^2+m^2}$ এবং $\int_0^\infty e^{-ax}\sin mx\, dx = \dfrac{m}{a^2+m^2}$, $a > 0$ অযথার্থ সমাকল দুটিকে a এবং m উভয় প্রাচল সাপেক্ষেই অন্তরকলন করা সম্ভব।

3. প্রমাণ করুন যে $\int_0^\infty \dfrac{e^{-x}}{x}(1-e^{-xy})dx = \log(1+y),\ y > -1$

4. প্রমাণ করুন যে $\int_0^\infty \dfrac{e^{-x}}{x}(1-\cos xy)dx = \dfrac{1}{2}\log(1-y^2),\ -\infty < y < \infty$

5. $f(y) = \int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2xy\, dx$ হলে দেখান যে

$$f'(y) = -2\int_0^\infty xe^{-x^2}\sin 2xy\, dx,\ -\infty < y < \infty$$

আংশিক পদ্ধতিতে সমাকলন করে দেখান যে $f'(y) + 2y\, f(y) = 0$ এই সম্বন্ধটি থেকে দেখান যে $f(y) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-y^2}$ ($\Gamma\dfrac{1}{2} = \sqrt{\pi}$ প্রদত্ত)

আরো দেখান যে $\int_0^\infty dx\int_0^y e^{-x^2}\cos 2xy\, dy = \int_0^y f(y)\, dy$

অতঃপর দেখান যে $\int_0^\infty e^{-x^2}\dfrac{\sin 2xy}{x}dx = \sqrt{\pi}\int_0^y e^{-y^2}dy$

6. প্রাচল সাপেক্ষে অন্তরকলনের পদ্ধতি প্রয়োগ করে মান নির্ণয় করুন :

(i) $\int_0^\infty \dfrac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}dx$ ($\alpha > 0,\ \beta > 0$) [উত্তর : $\log\dfrac{\beta}{\alpha}$]

(ii) $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1}\alpha x}{x(1+x^2)}dx$ [উত্তর : $\frac{\pi}{2}\log(1+\alpha)$]

(iii) $\int_0^1 \frac{\log(1-\alpha^2 x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx,\ |\alpha| < 1$ [উত্তর : $\pi\left(\sqrt{1-\alpha^2}-1\right)$]

7. দেখান যে

$$J(\beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\cos\beta x\,dx, \ (\alpha > 0, \text{ ধ্রুবক})$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\beta^2/4\alpha}$$

8. দেখান যে

$$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \cos(x^2)dx$$

সহায়ক পাঠ্যপুস্তকাবলী :

1. *Advanced Calculus*, David V. Widder, Prentic Hall of India Private Limited, 1974.

2. *A Course of Mathematical Analysis*, Shanti Narayan S. Chand and Co., 1958.

3. *Multiple Integrals, Field Theory and Series—An Advanced Course in Higher Mathematics*, *B*. M. Budak and S. V. Fomin, Mir Publishers, Moscow, 1973.

4. *Introduction to the Theory of Fourier Series and Integrals*, H. S. Carslaw, Dover Publications Inc., 1930.

5. *Integral Calculus An Introduction to Analysis*, *Maitry* and Ghosh, Central Educational Enterprise. 1989.

একক 10 ❑ বিটা, গামা অপেক্ষক ও তৎসম্পর্কিত অন্যান্য অযথার্থ সমাকল (Beta, Gamma Functions and other Related Improper Integrals)

গঠন

10.1 প্রস্তাবনা

কোনো নির্দিষ্ট সমাকল $\int_a^b f(x)dx$ অযথার্থ হতে পারে নিম্নলিখিত দুটির যে কোন একটি কারণে।

(1) a অথবা b অথবা উভয়েই অসীম হলে।

(2) $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরের কোন বিন্দুতে সমাকল্য অপেক্ষকটির অসীম অসান্তত্য (Infinite discontinuity) থাকলে।

অযথার্থ অথচ অভিসারী সমাকলগুলির মধ্যে বিটা ও গামা অপেক্ষক দুটির উচ্চতর গণিতে ও ইঞ্জিনীয়ারিং বিদ্যার বিভিন্ন শাখায় বহুল প্রয়োগ আছে।

10.2 উদ্দেশ্য

বিটা ও গামা অপেক্ষকের সংজ্ঞা, এদের অভিসরণের পরীক্ষা, বিটা ও গামা অপেক্ষক দুটির মধ্যে সম্পর্ক এবং এই দুই অপেক্ষকের প্রয়োগ নিয়ে আলোচনা করা—এই এককটির উদ্দেশ্য।

10.3 গামা অপেক্ষক (Gamma Function)

10.3.1 সংজ্ঞা

$$\Gamma x = \int_{0+}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, \qquad 0 < x < \infty$$

এই অপেক্ষকটি $x > 0$ হলে অভিসারী। এর অভিসরণের পরীক্ষা নিম্নে বর্ণিত হচ্ছে।

$$\Gamma x = \int_{0+}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = \int_{0+}^{1} e^{-t}t^{x-1}dt + \int_{1}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = I_1 + I_2 \text{ ধরি}$$

$I_1 = \int_{0+}^{1} e^{-t}t^{x-1}dt$ সমাকলটি $x \geq 1$ হলে যথার্থ। $0 < x < 1$ হলে এটি অযথার্থ কিন্তু অভিসারী।

প্রমাণ : ধরি, $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$ এবং $\phi(t) = \dfrac{1}{t^{1-x}}$

তাহলে $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(t)}{\phi(t)} = \lim\limits_{t\to 0} e^{-t} = 1$ এবং $\int_{0+}^{1} \phi(t)dt = \int_{0+}^{1} \dfrac{1}{t^{1-x}}dt$, সমাকলটি অভিসারী যখন $0 < x < 1$. ফলে I_1 সমাকলটি অভিসারী যখন $0 < x < 1$.

$I_2 = \int_{1}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ সমাকলটির অভিসরণের পরীক্ষা :

এক্ষেত্রে, $f(t)e^{-t}t^{x-1}$ এবং $\phi(t) = \dfrac{1}{t^2}$ ধরি,

তাহলে $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(t)}{\phi(t)} = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}t^{x+1} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t^{x+1}}{e^t} = 0, x$-এর সব মানের জন্য।

আবার $\int_{1}^{\infty} \dfrac{1}{t^2}dt$ সমাকলটি অভিসারী।

ফলে I_2 সমাকলটি x-এর সব মানের জন্য অভিসারী। I_1 এবং I_2 সমাকল দুটির অভিসরণের সর্ত পর্য্যালোচনা করে পাই $I = \int_{0+}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \equiv \Gamma x, 0 < x < \infty$ হলে অভিসারী।

10.3.2 উপপাদ্য

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma x, \qquad x > 0$$

প্রমাণ : $\Gamma x = \int_{0+}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0+ \\ B \to \infty}} \int_{\varepsilon}^{B} e^{-t} t^{x-1} dt$$

কিন্তু $\int_{\varepsilon}^{B} e^{-t} t^{x-1} dt = \left[e^{-t} \frac{t^x}{x} \right]_{\varepsilon}^{B} + \frac{1}{x} \int_{\varepsilon}^{B} e^{-t} t^x dt$

$$= \frac{1}{x} \left[\frac{B^x}{e^B} - \frac{\varepsilon^x}{e^{\varepsilon}} \right] + \frac{1}{x} \int_{\varepsilon}^{B} e^{-t} t^x dt$$

অতএব $\lim_{\substack{\varepsilon \to 0+ \\ B \to \infty}} \int_{\varepsilon}^{B} e^{-t} t^{x-1} dt = \frac{1}{x} \lim_{\substack{\varepsilon \to 0+ \\ B \to \infty}} \int_{\varepsilon}^{B} e^{-t} t^x dt$

$\Rightarrow \int_{0+}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \frac{1}{x} \int_{0+}^{\infty} e^{-t} t^x dt$

অর্থাৎ $\Gamma x = \frac{1}{x} \Gamma(x + 1) \Rightarrow \Gamma(x + 1) = x\Gamma x, \qquad x > 0$

10.3.3 অনুসিদ্ধান্ত 1

p ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা এবং $x > 0$ হলে,

$$\Gamma(x + p) = (x + p - 1)\ (x + p - 2)\ \ldots . x\Gamma x$$

প্রমাণ : $\Gamma(x + p) = \Gamma\{(x + p - 1) + 1)$

$= (x + p - 1)\ (x + p - 1)$ (উপপাদ্য 1 প্রয়োগ করে পাই)

$= (x + p - 1)\ \Gamma\{(x + p - 2) + 1\}$

$= (x + p - 1)(x + p - 2)\ \Gamma(x + p - 2)$ (উপপাদ্য 1 প্রয়োগ করে পাই)

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= (x + p - 1)(x + p - 2)......x\Gamma x$

(p সংখ্যক বার উপপাদ্য 1 প্রয়োগ করে পাই)

10.3.4 উপপাদ্য 2

$\Gamma(n + 1) = n!$, n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

অনুসিদ্ধান্ত 1 এ $x = 1$ এবং $p = n$ বসিয়ে পাই

$\Gamma(n + 1) = n(n - 1)\ ......1\Gamma 1 = n!\Gamma 1$

$$\Gamma 1 = \int_{0+}^{\infty} e^{-t} dt = 1$$

ফলে $\Gamma(n + 1) = n!$, n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

[আবার, যেহেতু $\lfloor 0 = 1$ ধরা হয়, উপরের উপপাদ্যটি $n = 0$ হলেও সত্য।]

10.3.5 উপপাদ্য 3

$$\Gamma(0+) = +\infty$$

Γx-এর সংজ্ঞা থেকে পাই,

$$\Gamma x = \int_{0+}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \int_{0+}^{1} e^{-t} t^{x-1} dt + \int_{1+}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$> \int_{0+}^{1} e^{-t} t^{x-1} dt \qquad (\because e^{-t} t^{x-1} > 0)$$

$$> e^{-1} \int_{0+}^{1} t^{x-1} dt = (ex)^{-1}, \qquad 0 < x < \infty$$

অর্থাৎ, $\Gamma x > \dfrac{1}{ex}$

$$\therefore \lim_{x \to 0+} \Gamma x \geq \lim_{x \to 0+} \frac{1}{ex}$$

$$\Rightarrow \Gamma 0+ = +\infty$$

Γx কে অন্যান্য আকারে প্রকাশ

10.3.6 উপপাদ্য 4

$$\Gamma x = \gamma^x \int_{0+}^{\infty} e^{-\gamma t} t^{x-1} dt \qquad 0 < \gamma,\ 0 < x$$

প্রমাণ : $\gamma t = y$ বসিয়ে পাই

$$\gamma^x \int_{\varepsilon}^{B} e^{-\gamma t} t^{x-t} dt = \gamma^x \int_{\gamma\varepsilon}^{\gamma B} e^{-y} \frac{y^{x-1}}{\gamma^{x-1}} \frac{dy}{\gamma},$$

t	y
ε	$\gamma\varepsilon$
B	γB

$$= \int_{\gamma\varepsilon}^{\gamma B} e^{-y} y^{x-1} dy$$

$$\to \int_{0+}^{\infty} e^{-y} y^{x-1} dy,$$ যখন $\varepsilon \to 0+$ এবং $B \to \infty$,

অর্থাৎ, $$\gamma^x \int_{0+}^{\infty} e^{-\gamma t} t^{x-1} dt = \int_{0+}^{\infty} e^{-y} y^{x-1} dy = \Gamma x$$

10.3.7 উপপাদ্য 5

$$\Gamma x = 2 \int_{0+}^{\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt \qquad 0 < x < \infty$$

প্রমাণ : $I = 2\int_{\varepsilon}^{B} e^{-t^2} t^{2x-1} dt,$ সমাকলটিতে $t^2 = y$ বসিয়ে পাই

$$= \int_{\varepsilon^2}^{B^2} e^{-y} y^{x-1} dy$$

অতএব $$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0+ \\ B \to \infty}} 2\int_{\varepsilon}^{B} e^{-t^2} t^{2x-1} dt = \int_{0}^{\infty} e^{-y} y^{x-1} dy = \Gamma x$$

অর্থাৎ $$\Gamma x = 2 \int_{0+}^{\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt$$

10.3.8 উদাহরণ : গামা অপেক্ষকের সংজ্ঞা প্রয়োগ করে নিম্নলিখিত সমাকলগুলির মান নির্ণয় করুন

1. $\int_0^\infty e^{-t}\sqrt{t}\,dt$ উত্তর $\frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{2}$

2. $\int_0^\infty e^{-st}\sqrt[3]{t^2}\,dt$ উত্তর $\dfrac{\Gamma\frac{5}{3}}{S^{\frac{5}{3}}}$ (উপপাদ্য 4 প্রয়োগ করুন)

3. $\int_{0+}^\infty e^{-t^2}\sqrt{t}\,dt$ উত্তর $\dfrac{\Gamma\frac{3}{4}}{2}$ (উপপাদ্য 5 প্রয়োগ করুন)

4. প্রমাণ করুন যে, $\int_0^1 t^{x-1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{y-1} dt = \Gamma(y)x^{-y}, \qquad x,\ y > 0$

প্রমাণ : ধরি $I = \int_0^1 t^{x-1}\log\left(\frac{1}{t}\right)^{y-1} dt,$

$\log\left(\frac{1}{t}\right) = u$ বসিয়ে পাই,

t	u
0	∞
1	0

$$u = -\log t \Rightarrow t = e^{-u}$$
$$dt = -e^{-u}\,du$$

অতএব $I = \int_0^\infty e^{-u(x-1)}u^{y-1}e^{-u}du$

$$= \int_0^\infty e^{-ux}u^{y-1}du$$

$$= \frac{\Gamma y}{x^y} \qquad \text{(উপপাদ্য 4 প্রয়োগ করে পাই)}$$

$$= \Gamma y\ x^{-y}$$

10.3.9 প্রশ্নাবলী

1. প্রমাণ করুন যে $\Gamma x = \int_{0+}^{1-}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{x-1} dt \qquad 0 < x < \infty$

2. প্রমাণ করুন যে $\int_0^1 (\log x)^n dx = (-1)^n n!$

3. প্রমাণ করুন যে $\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{2}$

4. প্রমাণ করুন যে $\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \Gamma\frac{1}{2}$

5. মান নির্ণয় করুন $\int_{0+}^{1-} \frac{dx}{\sqrt{x \log \frac{1}{x}}}$ (উত্তর $\sqrt{2}\Gamma\frac{1}{2}$)

6. দেখান যে $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{c^x} dx, (c > 1) = \frac{\Gamma(c+1)}{(\log c)^{c+1}}$

10.4 বিটা অপেক্ষক (Beta Function)

10.4.1 সংজ্ঞা

$$B(x, y) = \int_{0+}^{1-} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \qquad 0 < x, 0 < y$$

এবার আমরা দেখাবো যে, বিটা অপেক্ষক $B(x, y)$, (যার সংজ্ঞা উপরে দেওয়া হয়েছে) $x > 0$ এবং $y > 0$ হলে অভিসারী।

$$B(x, y) = \int_{0+}^{1-} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \int_{0+}^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt + \int_{1/2}^{1-} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

$$= I_1 + I_2 \text{ (ধরি)}$$

এখন, $I_1 = \int_{0+}^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$, এই সমাকলটির সমাকল্য $f(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$-এর $t = 0$ বিন্দুতে অসীম অসান্তত্য (infinite discontinuity) আছে। $f(t)$ কে আমরা নিচের আকারে লিখি।

$f(t) = \frac{(1-t)^{y-1}}{t^{1-x}}$ এবং $\phi(t) = \frac{1}{t^{1-x}}$ নিই, তাহলে $\frac{f(t)}{\phi(t)} = (1-t)^{y-1} \to 1$ যখন $t \to 0+$

যেহেতু $\int_{0+}^{1/2} \phi(t)dt = \int_{0+}^{1/2} \frac{1}{t^{1-x}} dt$ সমাকলটি $t = 0$ বিন্দুতে অভিসারী যদি এবং একমাত্র যদি $1 - x < 1$ অর্থাৎ $0 < x$

ফলে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হচ্ছি যে, $\int_{0+}^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ সমাকলটি $t = 0$ বিন্দুতে অভিসারী, যদি এবং একমাত্র যদি, $0 < x$

t = 1 বিন্দুতে B(x, y)-এর অভিসরণের পরীক্ষা

$I_2 = \int_{1/2}^{1-} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ সমাকলটির সমাকল্য $f(t) \equiv t^{x-1}(1-t)^{y-1}$-এর $t = 1$ বিন্দুতে অসীম অসান্ততা আছে। $f(t) = \frac{t^{x-1}}{(1-t)^{1-y}}$ আকারে লিখি এবং $\phi(t) = \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$ ধরি। তাহলে $\frac{f(t)}{\phi(t)} = t^{x-1} \to 1$, যখন $t \to 1^-$ যেহেতু $\int_{1/2}^{1-} \phi(t)dt = \int_{1/2}^{1-} \frac{1}{(1-t)^{1-y}} dt$ $t = 1$ বিন্দুতে অভিসারী যদি এবং একমাত্র যদি $1 - y < 1$ অর্থাৎ $0 < y$; ফলে আমরা এই সিদ্ধান্তে উপনীত হই যে, $\int_{1/2}^{1-} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ সমাকলটি $t = 1$ বিন্দুতে অভিসারী, যদি এবং একমাত্র যদি $0 < y$, I_1 এবং I_2-এর অভিসরণের শর্ত থেকে আমরা দেখি যে, $B(x, y) = \int_{0+}^{1-} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ $x < 0$, $y > 0$ হলে অভিসারী।

10.4.2 বিটা অপেক্ষকের ধর্ম (Properties of Beta Function)

(*a*) $B(x, y) = B(y, x)$ $\qquad 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty$

প্রমাণ : $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

$1 - t = u$ বসিয়ে পাই, $dt = - du$

t	u
0	1
1	0

ফলে, $B(x, y) = -\int_1^0 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du$

$$= \int_1^0 u^{y-1}(1-u)^{x-1}du \qquad = B(y, x)$$

(b) $B(x, y) = 2\int_0^{\pi/2}(\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}dt \qquad 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty$

প্রমাণ : $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

t	u
0	0
1	$\frac{\pi}{2}$

এই সমাকলটিতে $t = \sin^2 u$ বসিয়ে পাই,

$1 - t = \cos^2 u$ এবং $dt = 2\ \sin u \cos u\, du$

ফলে, $B(x, y) = 2\int_0^{\pi/2}(\sin^2 u)^{x-1}(\cos^2 u)^{y-1}\sin u \cos u\, du$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\cos^{2y-1} u\, du$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1} t \cos^{2y-1} t\, dt$$

(c) $B(x, y) = \int_{0+}^{\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt \qquad 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty$

প্রমাণ : $B(x, y) = \int_{0+}^{1-}u^{x-1}(1-u)^{y-1}du$ এই সমাকলটিতে

$u = \frac{1}{1+t}$ বসিয়ে পাই, $\qquad t = \frac{1-u}{u}$

$du = -\frac{1}{(1+t)^2}du$

t	u
$0+$	$1-$
$+\infty$	$0+$

ফলে, $$B(x,\ y) = -\int_{+\infty}^{0+} \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{y-1}} \frac{1}{(1+t)^{x-1}} \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

$$= \int_{0+}^{\infty} \frac{t^{y=1}}{(1+t)^{x+y}} dt \ldots\ldots$$

যেহেতু $B(x,\ y) = B(y,\ x)$ তাই উপরের সম্পর্ক থেকে পাই

$$B(x,\ y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}} dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$$

10.5 বিটা এবং গামা অপেক্ষকের মধ্যে সম্পর্ক

বিটা এবং গামা অপেক্ষকের মধ্যে সম্পর্কটি নিচে লেখা হচ্ছে। এটি প্রমাণ করতে দ্বি-সমাকল (Double Integral)-এর ধারণা প্রয়োজন। তাই এর প্রমাণটি এখানে বর্জিত হল।

$$B(x,\ y) = \frac{\Gamma x \Gamma y}{\Gamma(x+y)}, \qquad x > 0,\ y > 0$$

10.5.1 উদাহরণ

প্রমাণ করুন যে $\Gamma \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$

প্রমাণ : $B(x, y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin t)^{2x-1} (\cos t)^{2y-1} dt, \qquad x > 0,\ y > 0$

এই সম্পর্কে $x = y = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই

$$B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \pi \qquad (i)$$

আবার $B(x, y) = \frac{\Gamma x \Gamma y}{\Gamma(x+y)}$ এই সম্পর্কটিতে $x = y = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই

$$B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \frac{(\Gamma \tfrac{1}{2})^2}{\Gamma 1} = (\Gamma \tfrac{1}{2})^2 \qquad (ii)$$

(i) ও (ii) থেকে পাই $(\Gamma \tfrac{1}{2})^2 = \pi$

অর্থাৎ $\Gamma \tfrac{1}{2} = \sqrt{\pi}$

10.5.2 উদাহরণ

প্রমাণ করুন যে, $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta\cos^q\theta d\theta = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$, $p, q > -1$

প্রমাণ : $B(x, y) = 2\int_0^{\pi/2}(\sin t)^{2x-1}(\cos t)^{2y-1}dt,\qquad x > 0,\ y > 0$

সম্পর্কটিতে $2x - 1 = p$ এবং $2y - 1 = q$

অর্থাৎ $x = \frac{p+1}{2}, y = \frac{q+1}{2}$ বসিয়ে পাই

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^p t\cos^q t\, dt = B\left(\frac{p+1}{1}, \frac{q+1}{2}\right),\qquad p > -1,\ q > -1$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \sin^p\theta\cos^q\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$$

10.5.3 উদাহরণ

প্রমাণ করুন যে, $\Gamma x\Gamma(x + ½) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$

প্রমাণ : $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt,\qquad x > 0$

$$= 2\int_0^{½} t^{x-1}(1-t)^{x-1}dt$$

[$\int_0^{2a} f(t)dt = \int_0^a \{f(t) + f(2a-t)\}dt$ সূত্রের প্রয়োগ করে]

$$= 2\int_0^{1/2} (t - t^2)^{x-1} dt$$

$t - t^2 = u$ বসিয়ে পাই, $t = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{1-4u}}{2}$

t	u
0	0
$1/2$	$1/4$

$$(1-2t)dt = du, \Rightarrow dt = \frac{du}{\sqrt{1-4u}}$$

অতএব $B(x, \gamma) = 2\displaystyle\int_0^{1/4} \frac{u^{x-1}}{\sqrt{1-4u}} du,$

$4u = v$ বসিয়ে পাই

$$B(x, x) = 2\int_0^1 \frac{v^{x-1}}{4^{x-1}} \frac{(1-v)^{1/2-1}}{4} dv$$

$$= \frac{2}{2^x}\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{1/2-1} dv$$

$$= 2^{1-2x} B(x, 1/2)$$

$B(x, y) = \dfrac{\Gamma x \Gamma y}{\Gamma(x+y)}$ সূত্র প্রয়োগ করে পাই

$$\frac{\Gamma x \Gamma x}{\Gamma(2x)} = 2^{1-2x} \frac{\Gamma x \Gamma 1/2}{\Gamma(x + 1/2)}$$

অর্থাৎ, $\Gamma(2x)\Gamma 1/2 = 2^{2x-1}\Gamma x \Gamma(x + 1/2)$

বা, $\Gamma(2x)\sqrt{\pi} = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x + 1/2)$

বা, $\Gamma(x)\Gamma(x + 1/2) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$

উপরের সূত্রটিকে দ্বৈতকরণ সূত্র (Duplication formula) বলা হয়।

10.6 দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণাবলী

10.6.1 দুটি ভিন্ন উপায়ে মান নির্ণয় করুন

$$\int_0^1 t^3(1-t)^3\,dt$$

সমাধান :

$$\int_0^1 t^3(1-t)^3\,dt = B(4,4) = \frac{\Gamma 4\Gamma 4}{\Gamma 8} = \frac{(3!)^2}{7!}$$

$$= \frac{6\times 6}{7\times 6\times 5\times 4\times 6} = \frac{1}{7\times 5\times 4} = \frac{1}{140}$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি : $\int_0^1 t^3(1-t)^3\,dt = B(4,4) = 2\int_0^{\pi/2}\sin^7 t\cos^7 t\,dt$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^7 t(1-\sin^2 t)^3\,d(\sin t)$$

$$= 2\int_0^1 u^7(1-u^2)^3\,du$$

$$= 2\int_0^1 u^7(1-3u^2+3u^4-u^6)du$$

$$= 2\int_0^1 \left(u^7-3u^9+3u^{11}-u^{13}\right)du$$

$$= 2\left[\frac{1}{8}+\frac{3}{10}+\frac{3}{12}-\frac{1}{14}\right]$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{7} = \frac{1}{140}$$

10.6.2 মান নির্ণয় করুন

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t)}\,dt$$

সমাধান :

$B(x, y) = \int_{0+}^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$ সূত্রে $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই

$$B(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \int_{0+}^{\infty} \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(1+t)}\,dt$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমাকল $= B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{(\Gamma \frac{1}{2})^2}{\Gamma 1} = \left(\sqrt{\pi}\right)^2 = \pi$

10.6.2 মান নির্ণয় করুন

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^3\theta \cos^6\theta\, d\theta$$

সমাধান :

$$\text{প্রথম সমাকল} = \int_{0}^{\pi/2} \sin^3\theta \cos^6\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{6+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3+6+1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma(2)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$$

$$= \frac{1.\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{2.\frac{9}{2}.\frac{7}{2}.\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{2}{63}$$

10.6.4 দুটি ভিন্ন উপায়ে মান নির্ণয় করুন

$$\int_0^\infty \frac{t}{(1+t)^3}\,dt$$

সমাধান :

প্রদত্ত সমাকল $= \int_0^\infty \frac{t}{(1+t)^3}\,dt = B(2,1) = \frac{\Gamma 2 \Gamma 1}{\Gamma 3} = \frac{1}{2}$

দ্বিতীয় পদ্ধতি : $\int_0^\infty \frac{t}{(1+t)^3}\,dt = B(2,1) = \int_0^1 t^{2-1}(1-t)^{1-1}\,dt$

$$= \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

10.6.5 প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^\infty \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}\,dx = 0$$

প্রমাণ :

প্রদত্ত সমাকল $I = \int_0^\infty \frac{x^8 dx}{(1+x)^{24}} - \int_0^\infty \frac{x^{14} dx}{(1+x)^{24}}$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{9-1} dx}{(1+x)^{9+15}} - \int_0^\infty \frac{x^{15-1} dx}{(1+x)^{15+9}}$$

$$= B(9,\ 15) - B(15,\ 9)$$

$$= B(9,\ 15) - B(9,\ 15) = 0$$

10.6.6 মান নির্ণয় করুন

$$\int_0^2 x^4(8-x^3)^{-1/3}\,dx$$

সমাধান :

প্রদত্ত সমাকল $I = \int_0^2 x^4 (8 - x^3)^{-1/3} dx$

$$= \int_0^2 x^4 (8)^{-1/3} \left[1 - \left(\frac{x}{2}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 x^4 \left[1 - \left(\frac{x}{2}\right)^3\right]^{-\frac{1}{3}} dx$$

$\left(\frac{x}{2}\right)^3 = u$ বসিয়ে পাই $x^3 = 8u$

x	u
0	0
2	1

$$\Rightarrow 3x^2 dx = 8du$$

$$\Rightarrow dx = \frac{8}{3} x^{-2} du$$

$$= \frac{8}{3} (8u)^{-\frac{2}{3}} du$$

অতএব $I = \frac{1}{2} \int_0^1 (8u)^{\frac{4}{3}} [1 - u]^{-\frac{1}{3}} . \frac{8}{3} (8u)^{-\frac{2}{3}} du$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 (8u)^{\frac{2}{3}} [1 - u]^{-\frac{1}{3}} du$$

$$= \frac{4}{3} \times 4 \int_0^1 u^{\frac{5}{3} - 1} (1 - u)^{\frac{2}{3} - 1} du$$

$$= \frac{16}{3} B\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

10.6.7 মান নির্ণয় করুন

$$\int_0^1 x^3(1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

সমাধান :

প্রদত্ত সমাকল $I = \int_0^1 x^3(1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$x = \sin^2\theta$ বসিয়ে পাই, $dx = 2\sin\theta\ \cos\theta\ d\theta$ এবং

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^6\theta\cos^3\theta\, 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^7\theta\cos^4\theta\, d\theta$$

$$= 2\frac{\Gamma\left(\frac{7+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{7+4+1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma(4)\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{\Gamma(4).\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{5.4.\Gamma(4)} = \frac{3\sqrt{\pi}}{80}$$

10.6.8 দেখান যে

$$\int_0^p x^m(p^q - x^q)^n\,dx = \frac{P^{qn+m+1}}{q}B\left(n+1, \frac{m+1}{q}\right)$$

যখন $p > 0,\ q > 0,\ m+1 > 0,\ n+1 > 0$

সমাধান :

প্রদত্ত সমাকল $I = \int_0^p x^m(p^q - x^q)^n\,dx = \int_0^p x^m p^{nq}\left[1-\left(\frac{x}{p}\right)^q\right]^n dx$

$\left(\frac{x}{p}\right)^q = u$ বসিয়ে পাই,

$$x = pu^{\frac{1}{q}}$$

x	u
0	0
p	1

$$dx = \frac{p}{q} u^{\frac{1}{q}-1} du$$

অতএব $I = \int_0^1 p^m u^{\frac{m}{q}} p^{nq} [1-u]^n \frac{p}{q} u^{\frac{1}{q}-1} du$

$$= \frac{p^{m+nq+1}}{q} \int_0^1 u^{\frac{m+1}{q}-1} (1-u)^{(n+1)-1} du$$

$$= \frac{p^{m+nq+1}}{q} B\left(\frac{m+1}{q}, n+1\right)$$

$$= \frac{p^{qn+m+1}}{q} B\left(n+1, \frac{m+1}{q}\right)$$

10.6.9

$$I = \int_a^b (x-a)^{l-1} (b-x)^{m-1} dx \qquad l > 0,\ m > 0$$

সমাকলটির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান : $x = py + q$ বসান এবং p, q-এর মান এমনভাবে নির্ণয় করুন যাতে করে যখন $x = a$ তখন $y = 0$ এবং যখন $x = b$ তখন $y = 1$ হয়।

অর্থাৎ $x = (b-a)\ y + a$

$\Rightarrow \quad x - a = (b-a)\ y$

এবং $dx = (b-a)\ dy$

ফলে $I = \int_0^1 (b-a)^{l-1} y^{l-1} (b-a)^{m-1} (1-y)^{m-1} (b-a) dy$

$$= (b-a)^{l+m-1}\int_0^1 y^{l-1}(1-y)^{m-1}dy$$

$$= (b-a)^{l+m-1} B(l,m)$$

10.6.10 প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx = B\,(m,n)$$

প্রমাণ :

$$B(m,n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx = \int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^{m+n}} + \int_1^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$$

$= I_1 + I_2$ (ধরি)

$I_2 = \int_1^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$, এই সমাকলে, $x = \frac{1}{t}$ বসিয়ে পাই

$$= \int_1^0 \frac{t^{1-m}}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{m+n}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= -\int_1^0 \frac{t^{1-m+m+n}}{(1+t)^{m+n}}\frac{1}{t^2}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(1+t)^{m+n}}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}dx$$

অতএব, $B(m,n) = I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}$

10.6.11 দেখান যে

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x dx}{(a+b\cos x)^n} = \frac{2^{n-1}}{(a^2-b^2)^{\frac{n}{2}}} B\left(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n\right), \quad \text{যেখানে } a^2 > b^2$$

সমাধান :

প্রমত্ত সমাকল $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x dx}{(a+b\cos x)^n} = \int_0^{\pi} \frac{\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^{n-1} dx}{\left[a+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]^n}$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2^{n-1}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{n-1} dx}{\left[a\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]^n}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2^{n-1}\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{n-1} dx}{\left[(a+b)\cos^2\frac{x}{2}+(a-b)\sin^2\frac{x}{2}\right]^n}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2^n(\sin u)^{n-1}(\cos u)^{n-1} du}{\left[(a+b)\cos^2 u+(a-b)\sin^2 u\right]^n}, \qquad u = \frac{x}{2}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2^n \sec^{2n} u \sin^{n-1} u \cos^{n-1} u\, du}{\left[(a+b)+(a-b)\tan^2 u\right]^n}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{2^n \tan^{n-1} u \sec^2 u\, du}{\left[(a+b)+(a-b)\tan^2 u\right]^n}$$

$(a - b)\tan^2 u = (a + b)v$ বসিয়ে পাই

u	v
0	0
$\frac{\pi}{2}$	∞

$2(a - b)\tan u\, sec^2 u du = (a + b)\, dv$;

এবং $\tan u = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{1/2} v^{1/2}$, $\qquad (\because a^2 > b^2)$

$$\therefore \quad I = \int_0^\infty \frac{2^{n-1}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{(n-2)/2} v^{\frac{n-2}{2}}}{(a+b)^n[1+v]^n} \frac{(a+b)}{(a-b)} dv$$

$$= 2^{n-1}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{n/2} \frac{1}{(a+b)^n} \int_0^\infty \frac{v^{\frac{n}{2}-1}}{(1+v)^n} dv$$

$$= 2^{n-1} \frac{1}{(a^2 - b^2)^{n/2}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

10.6.12 প্রমাণ করুন যে

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta}{(a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)^{m+n}} = \frac{\Gamma m \Gamma n}{2a^m b^m \Gamma(m+n)}$$

প্রমাণ :

লব ও হরকে $\cos^{2(m+n)}\theta$ দিয়ে ভাগ করে পাই

প্রদত্ত সমাকল $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^{2m-1}\theta \sec^2\theta\, d\theta}{(a + b\tan^2\theta)^{m+n}}$

এবার $b\tan^2\theta = au$ বসিয়ে পাই, $2b sec^2\theta \tan\theta\, d\theta = adu$

$$I = \int_0^\infty \frac{\frac{a}{2b}du\left(\frac{a}{b}u\right)^{m-1}}{a^{m+n}(1+u)^{m+n}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{a^n b^m}\int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}}du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{a^n b^m}B(m,n)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^n b^m}\frac{\Gamma m\Gamma n}{\Gamma(m+n)}$$

10.6.13

$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$ সমাকলটির মান $\frac{\pi}{\sin n\pi}, 0 < n < 1$ প্রদত্ত। এ থেকে প্রমাণ করুন $\Gamma n\Gamma(1-n)$ $= \frac{\pi}{\sin n\pi}$ অতঃপর $\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}$ সমাকলটির মান নির্ণয় করুন।

সমাধান :

$$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dx, \qquad 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty$$

সূত্রে $x = n,\ y = 1 - n$ বসিয়ে পাই

$$B(n, l-n) = \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(1+t)}dt, \qquad 0 < n < 1$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}dx = B(n,1-n) = \frac{\Gamma n\Gamma(1-n)}{\Gamma 1} = \Gamma n\Gamma(1-n)$$

অতএব $\Gamma n\Gamma(1-n) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}, \qquad 0 < n < 1$

$$I = \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4}\ y^4 = t \text{ বসিয়ে পাই}$$

$$4y^3 dy = dt \qquad \begin{array}{c|c} y & t \\ \hline 0 & 0 \\ \infty & \infty \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad dy = \frac{1}{4} y^{-3} dt$$

$$= \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt$$

অতএব $\quad I = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{t^{-\frac{3}{4}}}{1+t} dt$

$$= \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{4}-1}}{1+t} dt$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

10.7 সারাংশ

10.7.1 গামা অপেক্ষকের সংজ্ঞা

$x > 0$ হলে $\Gamma x = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$

10.7.2 গামা অপেক্ষক সংক্রান্ত কতিপয় প্রয়োজনীয় সূত্র

(i) $\Gamma(x + 1) = x\Gamma x$

(ii) $\Gamma \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$

(iii) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma \frac{1}{2}$

10.7.3 বিটা অপেক্ষকের সংজ্ঞা

(i) $x > 0,\ y > 0$ হলে $B(x,\ y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$

(ii) $x > 0,\ y > 0$ হলে $B(x,\ y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt$

(iii) $x > 0,\ y > 0$ হয়ে $B(x,\ y) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\,d\theta$

10.7.4 বিটা ও গামা অপেক্ষকের মধ্যে সম্পর্ক ও কতিপয় প্রয়োজনীয় সূত্র

(i) $B(x,\ y) = \frac{\Gamma x \Gamma y}{\Gamma(x+y)}$, $\quad x > 0,\ y > 0$

(ii) $B(x,\ x) = 2^{1-2x} B(x, \tfrac{1}{2})$, $\quad x > 0$

(iii) $B(x,\ 1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi}$, $\quad 0 < x < 1$

(iv) $\Gamma(x + \tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)}$

10.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. **মান নির্ণয় করুন :**

   a. $\Gamma(-3\cdot5)$

   b. $\Gamma(4\cdot5)$

2. প্রমাণ করুন যে $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cot\theta}\,d\theta = \tfrac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$

3. দেখান যে $\int_0^{\pi/2} \left[\sqrt{\tan\theta} + \sqrt{\sec\theta}\right] d\theta = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{4})\left[\Gamma(\tfrac{3}{4}) + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\tfrac{3}{4})}\right]$

4. প্রমাণ করুন যে $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\, d\theta \times \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = \pi$

5. দেখান যে $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{2^{7/3}\pi}\left\{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^3$

6. দেখান যে $\int_0^\infty \frac{x^4(1+x^5)}{(1+x)^{15}}\, dx = \frac{1}{5005}$

7. দেখান যে $\int_0^1 \frac{x^{l-1}(1-x)^{m-1}}{(b+cx)^{l+m}}\, dx = \frac{B(l,m)}{(b+c)^l b^m}$

8. দেখান যে $\int_{-1}^1 (1+x)^p(1-x)^q\, dx = 2^{p+q+1} B(p+1, q+1) \qquad p,\ q > -1$

9. দেখান যে

a. $\int_0^a \frac{dx}{(a^n - x^n)^{1/n}} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$

b. $\int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{m/n}} = \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{m}{n}\right)\pi}$

10. দেখান যে $\int_0^1 \frac{x^{n-1}dx}{(1+ax)(1-x)^n} = \frac{1}{(1+a)^n}\frac{\pi}{\sin n\pi}$

11. দেখান যে $\int_0^\infty \frac{e^{2mx}+e^{-2mx}}{(e^x+e^{-x})^{2n}}\, dx = \frac{1}{2}B(n+m, n-m)$

12. প্রমাণ করুন যে $\int_0^1 \frac{x^n + x^{-n}}{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \frac{x^n+x^{-n}}{x+x^{-1}}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}, \quad -1 < n < 1$

13. প্রমাণ করু যে

a. $\dfrac{B(m+1,n)}{m} = \dfrac{B(m,n+1)}{n} = \dfrac{B(m,n)}{m+n}$

b. $B(m, n) = B(m + 1, n) + B(m, n + 1)$

c. $B(m, n), B(m + n, l) = B(n, l) B(n + l, m) = B(l, m) B (l + m, n)$

d. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \dfrac{\Gamma(2n+1)\sqrt{\pi}}{2^{2n}\Gamma(n+1)}$

14. প্রমাণ করুন যে $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^p \theta\, d\theta = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{p+1}{2}\right)$

15. দেখান যে

a. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

b. $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} x^{3/2} dx = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

16. দেখান যে

a. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\, dx = \frac{3\pi}{16}$

b. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^5 x\, dx = \frac{8}{315}$

17. দেখান যে

a. $\displaystyle\int_0^{1} x^3 (1 - x^2)^{5/2} dx = \frac{2}{63}$

b. $\displaystyle\int_0^{1} x^{3/2} (1 - x)^{3/2} dx = \frac{3\pi}{128}$

10.9 উত্তরমালা

1. a. $\Gamma n = \dfrac{\Gamma(n+1)}{n}$ সূত্রে ব্যবহার করে পাই

$$\Gamma(-3{\cdot}5) = \Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{2}{7}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \ldots = \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)(-2) \times \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{16}{105}\sqrt{\pi} - 0{\cdot}27$$

b. $\Gamma(4{\cdot}5) = \Gamma(4 + \tfrac{1}{2}), \Gamma(x + \tfrac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \dfrac{\Gamma(2x)}{\Gamma x}$ সুত্র প্রয়োগ করে পাই

$$\Gamma(4 + \tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma\pi}{2^7} \cdot \frac{\Gamma 8}{\Gamma 4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^7} \frac{(7)!}{3!} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^7} .7.6.5.4 = \frac{105}{16}\sqrt{\pi} = 11{\cdot}63$$

5. ধরি $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}$ এবং $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$

I সমাকলে $x^6 = \sin^2\theta$ অর্থাৎ $\sin^{1/3}\theta$ বসিয়ে পাই

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^{-2/3}\theta d\theta = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\int_0^{\pi/2} \sin^{(2\times 1/6 - 1)}\theta \cos^{(2\times 1/2 - 1)}\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{6} B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$$

অনুরূপভাবে $J = \dfrac{1}{3} B\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$

অতএব $\dfrac{I}{J} = \dfrac{1}{6} B\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}\right) \Big/ \dfrac{1}{3} B\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\frac{1}{6}\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\frac{1}{3}\Gamma\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\frac{5}{6}}{\Gamma\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\frac{1}{6}\Gamma\frac{5}{6}}{\Gamma\frac{1}{3}\Gamma\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \frac{\pi/\sin\pi/6}{\pi/\sin\pi/3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\sqrt{3}}{2} J$$

এখন $I = \frac{1}{6} B\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \frac{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{6}}{\Gamma\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}\Gamma\frac{1}{2}\frac{\Gamma\frac{1}{6}\Gamma\frac{2}{3}}{\left(\Gamma\frac{2}{3}\right)^2}$

দ্বৈতকরণ সূত্র (Duplication formula) $\Gamma x \Gamma(x + \tfrac{1}{2}) = 2^{1-2x}\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(2x)$ প্রয়োগ করে পাই।

$$\Gamma\frac{1}{6}\Gamma\frac{2}{3} = 2^{1-\frac{1}{3}}\Gamma\frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{6}\Gamma\frac{1}{2}.2^{\frac{2}{3}}.\frac{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{3}}{\left(\Gamma\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\Gamma\frac{1}{2}\right)^2.2^{\frac{2}{3}}\frac{\Gamma\frac{1}{3}.\left(\Gamma\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\Gamma\frac{2}{3}\Gamma\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{\pi}{6}.2^{2/3}\frac{\left(\Gamma\frac{1}{3}\right)^3}{\left(\frac{\pi}{\sin\pi/3}\right)^3} = \frac{\pi}{6}.2^{2/3}\left(\Gamma\frac{1}{3}\right)^3.\frac{1}{\pi^2}\times\frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{\pi}.\frac{1}{2^{3-2/3}}\left(\Gamma\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{2^{7/3}\pi}\left\{\Gamma\frac{1}{3}\right\}^3$$

7. $\frac{x}{1-x} = a\frac{t}{1-t}$ বসিয়ে পাই $x = a\frac{t}{1-(1-a)t'}$ a, অনির্ণীত ধ্রুবক।

$$t = \frac{x}{a+(1-a)x}$$

$$dx = \frac{a\ dt}{\{1-t(1-a)\}^2}$$

x	t
0	0
1	1

$$b+cx = b + c\frac{at}{1-(1-a)t} \quad 1-x = \frac{1-t}{1-t(1-a)}$$

$$= \frac{b+t\{(b+c)a-b}{1-(1-a)t}$$

প্রদত্ত সমাকলে বসিয়ে পাই

$$I = \int_0^1 \frac{a^{l-1}t^{l-1}(1-t)^{m-1}}{[1-(1-a)t]^{l+m}} \times a \frac{[1-(1-a)t]^{l+m}}{[b+t\{(b+c)a-b\}]^{l+m}} dt$$

এখন $a = \dfrac{b}{b+c}$ বসিয়ে পাই

$$I = \int_0^1 \frac{a^{l-1}t^{l-1}(1-t)^{m-1} \times a}{b^{l+m}} dt \qquad = \int_0^1 \frac{b^l}{(b+c)^l b^{l+m}} t^{l-1}(1-t)^{m-1} dt$$

$$= \frac{1}{(b+c)^l b^m} \int_0^1 t^{l-1}(1-t)^{m-1} dt = \frac{1}{(b+c)^l b^m} B(l,m)$$

9. *a*. $x^n = an \sin^2 \theta$ বসান

10. উদাহরণ 7-এর অনুরূপ, $\dfrac{x}{1-x} = d\dfrac{t}{1-t}$ বসান

11. $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{2(m-n)x} + e^{-2(m+n)x}}{(1+e^{-2x})^{2n}} dx$, $e^{-2x} = z$ বসান

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z^{n-m} + z^{n+m}}{(1+z)^{2n}} \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{z^{(n-m)-1} + z^{(n+m)-1}}{(1+z)^{2n}} dz = \frac{1}{2} B(n-m, n+m)$$

$[\int_0^1 \frac{z^{x-1}+z^{y-1}}{(1+z)^{x+y}}dz = B(x,y)$ সূত্র অনুযায়ী]

12. দেখান যে $I = \int_0^1 \frac{x^n + x^{-n}}{1+x^2}dx = \int_0^\infty \frac{t^n}{1+t^2}dt$

অতঃপর $t^2 = u$ বসিয়ে দেখান $I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{n-1}{2}}}{1+4}du$

$B(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$ সূত্র প্রয়োগে দেখান যে,

$I = \frac{1}{2}B\left(\frac{n+1}{2}, \frac{1-n}{2}\right)$ যেখানে $0 < \frac{n+1}{2} < 1$

$\Rightarrow -1 < n < 1$

এবং $0 < \frac{1+n}{2} < 1$

অর্থাৎ $I = \frac{1}{2}B(p, 1-p)$ যেখানে $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\pi\right)} = \frac{\pi}{2}\sec\frac{\pi}{2}\pi$$

সহায়ক পাঠ্যপুস্তকাবলী

1. *Integral Calculus–An Introduction to Analysis,* Maity and Ghosh, Central Educational Enterprises, 1989.
2. *Advanced calculus,* David V. Widder, Prentice Hall of India Private Limited, 1974.
3. *A Course of Mathematical Analysis, Shanti Narayan*, S. Chand & Co., 1958.
4. *Integral Calculus,* Dr. J. C. Chaturvedi, Students' Friends & Co., 1961.
5. *Higher Engineering Mathematics,* Dr. B. S. Grewal, Khanna Publishers, 1998.

একক 11 ❑ ঘাতশ্রেণির প্রতিপদের সমাকলন ও অন্তরকলন-জাত ঘাতশ্রেণির অভিসরণ (Convergence of Series by term by term Integration and Differentiation of Power Series)

গঠন

11.1 প্রস্তাবনা

$a + ar + ar^2 + ..$ এই গুণোত্তর শ্রেণিটির সঙ্গে প্রত্যেক গণিত শিক্ষার্থীই পরিচিত। $ak = ark$ লিখে আমরা এই শ্রেণিটিকে $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ আকারে লিখতে পারি। $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ অসীম শ্রেণিটির পদগুলি ধ্রুবক। তাই এটিকে আমরা সাংখ্যিক অসীম শ্রেণি বলতে পারি। আবার অসীম শ্রেণিটির পদগুলি যদি কোনো বাস্তব চলের অপেক্ষক $f_k(x)$ হয় তাহলে $\sum f_k(x)$ শ্রেণিটি পাওয়া যায়। একে আমরা

অপেক্ষকের অসীম শ্রেণি বলতে পারি। এখন যদি $f_k(x) = c_k x^k$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ হয় অর্থাৎ এপক্ষকগুলি x চলের বিভিন্ন ঘাতের গুণিতক হয় তাহলে আমরা $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ এই ঘাত শ্রেণিটি পাই।

গণিতের ব্যবহারিক প্রয়োগ করতে গিয়ে আমরা কোনো অপেক্ষককে এরকম কোনো অপেক্ষকের অসীম শ্রেণি অথবা ঘাতশ্রেণির সাহায্যে প্রকাশ করার প্রয়োজন অনুভব করি। কোনো অপেক্ষককে এরকমভাবে অপেক্ষকের শ্রেণি হিসাবে প্রকাশ করা সম্ভব হলে বিভিন্ন অন্তরাল ঐ অপেক্ষকটির মান নির্ণয় ও সমাকলন করার সুবিধা হয়। আবার, অন্তরকল সমীকরণের সমাধান করতে গিয়ে অনেক সময় অপেক্ষকের শ্রেণি তথা ঘাতশ্রেণির ব্যবহার করা হয়।

11.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনি

- সাংখ্যিক অসীম শ্রেণির অভিসরণের বিভিন্ন পরীক্ষা সম্বন্ধে জানতে পারবেন।
- অপেক্ষকের অসীম শ্রেণি, তার অভিসরণের ক্ষেত্র, সম-অভিসরণ ও যোগফল-অপেক্ষক সংক্রান্ত আলোচনা করতে পারবেন।
- ঘাতশ্রেণির অভিসরণ ব্যাসার্ধ, অভিসরণের অন্তরাল, সম-অভিসরণের অন্তরাল, যোগফল-অপেক্ষকের সান্তত্য এবং কোনো শর্ত সাপেক্ষে ঘাতশ্রেণিটি প্রতিপদে সমাকলন ও অন্তরকলন-যোগ্য, এই বিষয়গুলি সম্পর্কে বিশদ ধারণা করতে পারবেন।

11.3 সাংখ্যিক অসীম শ্রেণি-অভিসরণের বিভিন্ন পরীক্ষা

এই পরিচ্ছেদে অসীম শ্রেণির অভিসরণের সংজ্ঞা এবং শ্রেণিটি অভিসারী কিনা নির্ণয়ের বিভিন্ন পরীক্ষা নিয়ে আলোচনা করা হচ্ছে।

11.3.1 সংজ্ঞা

ধরি, $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ একটি অসীম অনুক্রম। তাহলে $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ..$ রাশিটিকে বলা হয় একটি অসীম শ্রেণি ; এবং $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ সংখ্যাগুলিকে বলা হয় শ্রেণিটির পদ।

11.3.2 সংজ্ঞা

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_2 + u_3 + \ldots$ শ্রেণীটি প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টিকে S_nদিয়ে চিহ্নিত করা যাক। তাহলে

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n, \quad n = 1,2,3\ldots\ldots$$

যদি $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ অসীম অনুক্রমটি অভিসারী হয় অর্থাৎ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ হয় তাহলে s সংখ্যাটিকে প্রদত্ত অসীম শ্রেণিটির যোগফল বলা হবে। এক্ষেত্রে অসীম শ্রেণিটিকে অভিসারী বলা হবে। আবার যদি $\{S_n\}$ অনুক্রমটি অভিসারী না হয় অর্থাৎ যদি $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ এর অস্তিত্ব না থাকে তাহলে অসীম শ্রেণিটিকে অপসারী বলা হবে।

উদাহরণ ঃ $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots$

শ্রেণিটি অভিসারী এবং এর যোগফল 1, কারণ শ্রেণিটির n তম পদ হচ্ছে $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

অর্থাৎ $t_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

অতএব, $S_n \equiv$ শ্রেণিটির n তম আংশিক যোগফল

$$= \sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

11.3.3 অসীম শ্রেণির অভিসরণের একটি প্রয়োজনীয় শর্ত

উপপাদ্য 1 ঃ $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ অসীম শ্রেণিটির অভিসরণের একটি প্রয়োজনীয় শর্ত হচ্ছে $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

প্রমাণ ঃ ধরি, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ তাহলে $\{S_{\mathrm{n}}\}$ হচ্ছে আংশিক যোগফলগুলির অনুক্রম। যেহেতু অসীম শ্রেণিটি অভিসারী, অতএব $\{S_{\mathrm{n}}\}$ অনুক্রমটিও অভিসারী। ফলে $\lim_{n\to\infty} S_n$ এর অস্তিত্ব আছে।

ধরি, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, কিন্তু এক্ষেত্রে $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ কারণ, $n - 1 \to \infty$, যখন $n \to \infty$ ফলে

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

অতএব $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ একটি অভিসারী শ্রেণি হলে $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

মন্তব্য 1 : $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ কোনো অসীম শ্রেণির অভিসরণের যথেষ্ট শর্ত নয়। অর্থাৎ এমন অনেক অসীম শ্রেণি আছে যেখানে $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ অথচ শ্রেণিটি অপসারী।

মন্তব্য 2 : $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ হলে শ্রেণিটি অভিসারী হবে না।

উদাহরণ 1 : দেখান যে, $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots$ শ্রেণিটি অভিসারী নয়।

এখানে $u_n = \frac{n}{n+1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

যেহেতু $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ অতএব প্রদত্ত শ্রেণিটি অপসারী। ফলে $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$
অর্থাৎ প্রদত্ত শ্রেণিটি অভিসারী এবং এর যোগফল 1

উদাহরণ 2 : 1 + 2+ 3 + 4 + 5 + ... শ্রেণিটি অপসারী। কারণ এখানে

$S_n = (1+2+3+\ldots+n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ এবং $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

উদাহরণ 3 : $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \quad \ldots \quad \ldots + (-1)^{n-1} + \ldots \ldots$

শ্রেঁণিটির প্রথম n পদের যোগফল

$$S_n = \begin{cases} 0 \text{ যখন } n \text{ যুগ্ম সংখ্যা} \\ 1 \text{ যখন } n \text{ অযুগ্ম সংখ্যা} \end{cases}$$

ফলে $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ এর অস্তিত্ব নেই। তাই শ্রেণিটি অপসারী।

উদাহরণ 4 : গুণোত্তর শ্রেণি

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + \ldots + n^2 + \ldots$$

এখানে $S_n = \dfrac{1-r^n}{1-r} = \dfrac{1}{1-r} - \dfrac{r^n}{1-r}$

(A) যদি $|r| < 1$ হয়, তাহলে $r^n \to 0$, যখন $n \to \infty$ এবং এর ফলে $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{1-r}$ অর্থাৎ, অসীম শ্রেণিটি অভিসারী এবং এর যোগফল $\dfrac{1}{1-r}$

(B) যদি $|r| > 1$ হয়, তাহলে $r_n \to \pm\infty$, যখন $n \to \infty$ ফলে এক্ষেত্রে অসীম শ্রেণিটি অপসারী।

(C) যদি $r = 1$ হয়, তাহলে $S_n = n \to \infty$, যখন $n \to \infty$ ফলে অসীম শ্রেণিটি অপসারী।

(D) যখন $r = -1$তখন এই শ্রেণিটি উদাহরণ 3-তে প্রদত্ত শ্রেণির সঙ্গে অভিন্ন। তাই শ্রেণিটি অপসারী।

(A), (B), (C) এবং (D) ক্ষেত্রগুলির সিদ্ধান্ত থেকে পাই

$1 + r + r^2 + \ldots$ শ্রেণিটি অভিসারী যখন $|r| < 1$এবং

অপসারী যখন $|r| \geq 1$

11.3.4 অসীম শ্রেণির অভিসরণের ‘কোশি নির্ধারক’

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ অসীম শ্রেণিটির অভিসরণের একটি প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট শর্ত হচ্ছে যে এর আংশিক যোগফলগুলির অনুক্রম $\{S_n\}$ অভিসারী হবে। তাই কোনো অনুক্রমের অভিসরণের ‘কোশির সাধারণ তত্ত্ব’ প্রয়োগ করে অসীম শ্রেণির অভিসরণের নিচের পরীক্ষাটি পাওয়া যায়।

উপপাদ্য 2 : অসীম শ্রেণি $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ অভিসারী হবে যদি এবং একমাত্র যদি কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর অনুসঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $N \equiv N\ (\varepsilon)$ পাওয়া যায় যে

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}\right| < \varepsilon \quad \text{যখন } n \geq N\ (\varepsilon) \text{ এবং } p \geq 1$$

প্রমাণ : কোনো অনুক্রমের অভিসরণের কোশির সাধারণ তত্ত্ব অনুসারে $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ অসীম শ্রেণিটির আংশিক যোগফলগুলির অনুক্রম $\{S_n\}$ অভিসারী হবে যদি এবং একমাত্র যদি কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর অনুসঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $N \equiv N\ (\varepsilon)$ পাওয়া যায় যে

$$\left|S_{n+p}-S_n\right| < \varepsilon, \quad \text{যখন } n \geq \ N(\varepsilon) \text{ এবং } p \geq 1$$

অর্থাৎ $\left|\sum_{k=1}^{n+p} u_k - \sum_{k-1}^{n} u_k\right| < \varepsilon$, যখন $n \geq N(\varepsilon)$ এবং $p \geq 1$

অর্থাৎ $\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}\right| < \varepsilon$ যখন $n \geq \ N(\varepsilon)$ এবং $p > 1$

উদাহরণ 1 : দেখান যে, $\sum \frac{1}{n}$ অভিসারী নয়। ধরি, যদি সম্ভব হয়, শ্রেণিটি অভিসারী। তাহলে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε (ধরি $\varepsilon = 1/4$) প্রদত্ত হলে এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা N পাওয়া যাবে যে $\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}\right| < \varepsilon$, যখন $n \geq N$ এবং $p \geq 1$

কিন্তু $n = N$ এবং $p = N$ বসিয়ে পাই

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+p}=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\ldots+\frac{1}{2N}>N.\frac{1}{2N} \quad = 1/2>\varepsilon$$

অতএব আমরা দুটি পরস্পর বিরোধী সিদ্ধান্ত পাচ্ছি। ফলে দেখা যাচ্ছে যে প্রদত্ত শ্রেণিটির অভিসারী হওয়া সম্ভব নয়।

মন্তব্য : এখানে শ্রেণিটি অপসারী কিন্তু $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ এই অসীম শ্রেণিটিকে হরাত্মক শ্রেণি (Harmonic Series) বলা হয়।

উদাহরণ 2 : অসীম শ্রেণির অভিসরণের কোশির সাধারণ তত্ত্ব প্রয়োগ করে দেখান যে

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

অসীম শ্রেণিটি অভিসারী।

সমাধান : এখানে $S_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

এবং $S_{n+p} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+(-1)^{n}\frac{1}{n+1}+\ldots \quad +(-1)^{n+p-1}\frac{1}{n+p}$

$$= S_n + (-1)^n\left[\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right]$$

ফলে, $\left|S_{n+p}-S_n\right| = \left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right|$

কিন্তু, $S_{n+p}-S_n = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+(-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$

যখন p যুগ্ম

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

যখন p যুগ্ম

এবং

$$S_{n+p} - S_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+3)(n+4)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-2)(n+p-1)} + \frac{1}{n+p}$$

যখন p যুগ্ম

অর্থাৎ উভয় ক্ষেত্রেই

$$S_{n+p} - S_n > 0$$

ফলে, $\left|S_{n+p} - S_n\right| = S_{n+p} - S_n$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{1}{n+p}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)$$

যখন p অযুগ্ম

$$= \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1}\right) - \frac{1}{n+p}$$ যখন p যুগ্ম

অর্থাৎ, উভয় ক্ষেত্রেই

$$S_{n+p} - S_n < \frac{1}{n-1}$$

অতএব, $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \frac{1}{n-1}$

এবং $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$ অসমতাটি সিদ্ধ হবে যখন আমরা $N(\varepsilon)$ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাটি $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ অসমতাটি থেকে নির্ণয় করব। ফলে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে আমরা এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $N(\varepsilon)$ পাই যে, $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$, যখন $n > N(\varepsilon)$ এবং $p \geq 1 \Rightarrow$ প্রদত্ত অসীম শ্রেণিটি অভিসারী।

11.3.5 ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণি

উপপাদ্য 1 : ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণির আংশিক যোগফলের অনুক্রমটি ক্রমবর্ধমান।

প্রমাণ : ধরি $\sum_{1}^{\infty} u_n$ একটি ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণি এবং $\{S_n\}$ এর আংশিক যোগফলগুলির অনুক্রম।

$$\therefore\ S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_2 \geq 0, \qquad \forall n$$

$$\Rightarrow S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$$

$$\Rightarrow S_n \geq S_{n-1},\ \forall n > 1$$

অর্থাৎ $\{S_n\}$ অনুক্রমটি ক্রমবর্ধমান।

উপপাদ্য 2 : ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণি অভিসারী হবে যদি এবং একমাত্র যদি এই শ্রেণিটির আংশিক যোগফলের অনুক্রমটি ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ হয়।

প্রমাণ : ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণির আংশিক যোগফলের অনুক্রম ক্রমবর্ধমান (উপপাদ্যটি1) আবার ক্রমবর্ধমান অনুক্রম অভিসারী হবে যদি এবং একমাত্র যদি এটি ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ হয়। অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উদাহরণ :

প্রমাণ করুন যে, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ অসীম শ্রেণিটি অভিসারী।

এখানে $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$

$$=\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 2 \qquad \forall n$$

এবং অসীম শ্রেণিটির পদগুলি ধনাত্মক। অতএব শ্রেণিটি অভিসারী।

11.3.6 তুলনা পরীক্ষাসমূহ

উপপাদ্য 1 : যদি

(a) $\sum u_n$ এবং $\sum v_n$ দুটি ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণি হয় এবং

(b) $k(\neq 0)$ একটি n নিরপেক্ষ নির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা হয় এবং

(c) এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m বর্তমান যে $u_n \le kv_n \quad \forall n \ge m$ তাহলে

(i) $\sum u_n$ অভিসারী হবে যদি $\sum v_n$ অভিসারী হয় এবং

(ii) $\sum v_n$ অপসারী হবে যদি $\sum u_n$ অপসারী হয়।

প্রমাণ : ধরি $n \ge m$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \qquad\qquad t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k$$

এখন, $S_n - S_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_n$

$$\le k(v_{m+1} + v_{m+2} + \cdots + v_n)$$

$$= k\ (t_n - t_m)$$

বা, $S_n \le \ kt_n + (S_m - kt_m)$

$\Rightarrow S_n \le \ kt_n + h$ ... (1)

যেখানে $h = S_m - kt_m$ একটি সসীম সংখ্যা।

(i) $\sum v_n$ অভিসারী হলে এর আংশিক যোগফলের অনুক্রম $\{t_n\}$ ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ হবে, ফলে এমন একটি সংখ্যা B পাওয়া যাবে যে

$$t_n \le B \qquad \forall n$$

অতএব (1) থেকে পাই

$$S_n \le kB + h, \quad \text{যখন } n \ge m$$

$\Rightarrow \{S_n\}$ অনুক্রমটি ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ।

$\Rightarrow \sum u_n$ অভিসারী।

(ii) $\sum u_n$ অভিসারী হলে এর আংশিক যোগফলের অনুক্রম $\{S_n\}$ ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ নয়। ফলে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা G (যত বড় হোক না কেন) প্রদত্ত হলে, এর অনুসঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m_0 পাওয়া যাবে যে

$$Sn > G \qquad \forall n \ge m_0$$

অতএব (1) থেকে পাই $\forall n \geq max\ (m,\ m_0)$

$$t_n \geq \frac{1}{k}(G-h), \quad k \neq 0$$

$\Rightarrow \{t_n\}$ অনুক্রমটি ঊর্ধ্ব সীমাবদ্ধ নয়।

$\Rightarrow \sum v_n$ অপসারী।

উপপাদ্য 2 : যদি $\sum u_n$ এবং $\sum v_n$ এমন দুটি ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণি হয় যে $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, যেখানে $(l \neq 0)$ একটি সসীম সংখ্যা, তাহলে শ্রেণি দুটি হবে সম-আচরণশীল; অর্থাৎ $\sum u_n$ অভিসারী হলে $\sum v_n$ অভিসারী হবে এবং $\sum u_n$ অপসারী হলে $\sum v_n$ অপসারী হবে।

প্রমাণ : স্পষ্টতই $l > 0$. ধরি ε এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা যে $l - \varepsilon > 0$, যেহেতু $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, অতএব এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m পাওয়া যাবে যে

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - l\right| < \varepsilon \qquad \forall n \geq m$$

$$\Rightarrow l - \varepsilon < \frac{u_n}{v_n} < l + \varepsilon \qquad \forall n \geq m$$

$$\Rightarrow (l-\varepsilon)v_n < u_n < (l+\varepsilon)v_n \quad \forall n \geq m \qquad \text{....... (1)}$$

এখন, যদি $\sum v_n$ অভিসারী হয় তাহলে (1) থেকে পাই

$$u_n < (l+\varepsilon)v_n \qquad \forall n \geq m$$

অর্থাৎ (উপপাদ্য 1 থেকে পাই) $\sum u_n$ অভিসারী আবার যদি $\sum v_n$ অপসারী হয় তাহলে (1) থেকে পাই $u_n > u(l - \varepsilon)\ v_n \qquad \forall n \geq m$

অর্থাৎ $\sum u_n$ অপসারী (উপপাদ্য 1 প্রয়োগ করে)

উদাহরণ 1 : দেখান যে, $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ শ্রেণিটি অভিসারী।

সমাধান : এখানে $\dfrac{1}{2!}=\dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{3!}<\frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{4!}<\frac{1}{2^3}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots$$

অর্থাৎ প্রদত্ত শ্রেণিটির পদের পরবর্তী সমস্ত পদ ডানদিকের অভিসারী গুণোত্তর শ্রেণির অনুরূপ পদ থেকে ক্ষুদ্রতর। অতএব প্রথম তুলনা পরীক্ষা থেকে পাই যে প্রদত্ত শ্রেণিটি অভিসারী।

উদাহরণ 2 : দেখান যে, $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cdots$ শ্রেণিটি অপসারী।

সমাধান : এখানে $1 = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{3}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}$$

অতএব $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots>1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots$

অর্থাৎ প্রদত্ত শ্রেণিটির প্রথম পদের পরবর্তী পরবর্তী সমস্ত পদ ডানদিকের অপসারী হ্রাত্মক শ্রেণির (Harmonic series) অনুরূপ পদগুলি অপেক্ষা বৃহত্তর। অতএব প্রদত্ত শ্রেণিটি অপসারী।

11.3.7 অভিসরণের পরীক্ষাসমূহ (Convergence Tests)

এই পরিচ্ছেদে ধনাত্মক বা অঋণাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণির অভিসরণের কতিপয় পরীক্ষা বর্ণিত হচ্ছে।

A. 'কোশির সমাকল পরীক্ষা' (Cauchy's Integral Test)

উপপাদ্য : যদি $u(x)$ একটি অঋণাত্মক, ক্রমহ্রাসমান, সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় তাহলে অযথার্থ সমাকল $\int_1^{\infty} u(x)\,dx$ এবং অসীম শ্রেণি $\sum_1^{\infty} u(n)$ অভিসরণ বা অপসরণ বিষয়ে সম-আচরণশীল হবে।

প্রমাণ : $u(x)$ অপক্ষেকটি ক্রমহ্রাসমান হওয়ায়

$$u(k+1) \le u(x) \le u(k) \qquad \text{যখন } k \le x \le k+1$$

অসমতাগুলির প্রত্যেক পদকে সমাকলন করে পাই

$$\int_k^{k+1} u(k+1)dx \le \int_k^{k+1} u(x)\,dx \le \int_k^{k+1} u(k)dx \quad k = 1,2,\ldots,n$$

অর্থাৎ $u(k+1) \le \int_k^{k+1} u(x)dx \le u(x)$ (1) $k = 1, 2, \ldots, n$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} u(k+1) \le \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} u(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} u(k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{n} u(k) \le \int_1^n u(x)dx \le \sum_{k=1}^{n-1} u(k)$$

এখন $u(k) \equiv u_k, \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum u_k S_n$ এবং

$\int_1^n u(x)dx = I_n$ বসিয়ে পাই

$S_n - u_1 \le I_n \le S_n - u_n$

$\Rightarrow 0 \le u_n \le (S_n - I_n) \le u_1$

এবার, আমরা $\{S_n - I_n\}$ অনুক্রমটি বিবেচনা করি।

এখন, $(S_n - I_n) - (S_{n-1} - I_{n-1}) = (S_n - S_{n-1}) - (I_n - I_{n-1})$

$$= u_n - \int_{n-1}^{n} u(x)dx$$

$$\leq 0 \qquad\qquad (1) \text{ থেকে পাই}$$

অতএব $\{S_n - I_n\}$ অনুক্রমটি ক্রমহ্রাসমান এবং সীমাবদ্ধ $0 \leq (S_n - I_n) \leq u_1$

অতএব অনুক্রমটি অভিসারী এবং

$$0 \leq lim\ (S_n - I_n) \leq u_1$$

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} u_n$ অসীম শ্রেণিটি এবং $\int_1^{\infty} u(x)\,dx$ অযথার্থ সমাকলটি অভিসরণ বা অপসরণ বিষয়ে সম-আচরণশীল।

উদাহরণ : দেখান যে, $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ অসীম শ্রেণিটি $p > 1$ হলে অভিসারী এবং $p \leq 1$ হলে অপসারী।

সমাধান : ধরি, $u(x) = \frac{1}{x^p}$

এখানে $u'(x) = -px^{-(p+1)} < 0$, যখন $x \geq 1$

অতএব $u(x)$ অপেক্ষকটি অঋণাত্মক, ক্রমহ্রাসমান এবং সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক যখন $x \geq 1$

এবং $u(n) = u_n = \frac{1}{n^p} \qquad \forall n \in N$

সমাকলন পরীক্ষা থেকে পাই যে

$\sum_{1}^{\infty} u_n$ এবং $\int_1^{\infty} u(x)\,dx$ একসঙ্গো অভিসারী বা অপসারী হবে।

এখন, $\int_1^{\infty} u(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_1^{R} u(x)\,dx$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_1^R x^{-p} dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{1-p}(R^{1-p}-1)$$ যখন $p \neq 1$

$$= \lim_{R\to\infty} \log R$$ যখন $p = 1$

$$\therefore \int_1^\infty u(x)dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & \text{যখন } p > 1 \\ \infty, & \text{যখন } 0 < p \le 1 \end{cases}$$

অতএব $\int_1^\infty u(x)dx$ অভিসারী হবে, যখন $p > 1$

এবং অপসারী হবে, যখন $0 < p \le 1$

$p < 0$ হলে, যেহেতু $u(x) = \dfrac{1}{x^p} = x^q$, $(q = -p > 0)$ ক্রমবর্ধমান অপেক্ষক, এই পরীক্ষাটি প্রযোজ্য হবে না। কিন্তু তখন $\sum \dfrac{1}{n^p}$ শ্রেণিটি অপসারী কারণ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = \lim\limits_{n\to\infty} n^q = \infty$

অতএব $\sum \dfrac{1}{n^p}$ শ্রেণিটি $p > 1$ হলে অভিসারী এবং

$p \le 1$ হলে অপসারী হবে।

B. দ্য-আলেমবার্টের অনুপাত পরীক্ষা (d'Alembert's Ratio Test)

উপপাদ্য : যদি $\sum u_n$ এমন একটি ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণি হয় যে, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n+1}{u_n} = l$ তাহলে শ্রেণিটি

(i) অভিসারী হবে, যখন $l < 1$

(ii) অপসারী হবে, যখন $l > 1$

(iii) পরীক্ষাটি ব্যর্থ, যখন $l = 1$

প্রমাণ : প্রথম ক্ষেত্রে $0 < l < 1$

এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা ε নেওয়া হচ্ছে যে $l + \varepsilon < 1$

ধরি, $l + \varepsilon = a < 1, \qquad \alpha \neq 0$

যেহেতু $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ অতএব এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m পাওয়া যাবে যে

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon, \qquad \forall n \geq m$$

$$\Rightarrow l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon, \qquad \forall n \geq m$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon = \alpha \qquad \forall n \geq m$$

আবার যখন $n \geq m$

$$\frac{u_n}{u_m} = \frac{u_{m+1}}{u_m} \cdot \frac{u_{m+2}}{u_{m+1}} \cdots\cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} < \alpha^{n-m}$$

$$\Rightarrow u_n < \left(\frac{u_m}{\alpha^m}\right)\alpha^n, \quad \forall_n \geq m, \alpha < 1$$

যেহেতু m একটি নির্দিষ্ট অখণ্ড সংখ্যা অতএব $\left(\frac{u_m}{\alpha^m}\right)$ একটি নির্দিষ্ট সসীম সংখ্যা $= k$ (ধরা যাক)

ফলে, $u_n < k\alpha^n, \quad \forall n \geq m$

কিন্তু $\sum \alpha^n$ একটি অভিসারী গুণোত্তর শ্রেণি (যেহেতু $\alpha < 1$)। অতএব তুলনা পরীক্ষা থেকে পাই যে, $\sum u_n$ অভিসারী শ্রেণি।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র : $l > 1$

এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা ε নেওয়া যাক যে $l - \varepsilon > 1$ হয়।

ধরি, $l - \varepsilon = \beta > 1$

যেহেতু $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, অতএব এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা m_0 পাওয়া যাবে যে

$$l-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l+\varepsilon, \quad \forall n \geq m_0$$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > l-\varepsilon = \beta, \qquad \forall n \geq m_0$$

এখন, $\frac{u_n}{u_{m_0}} = \frac{u_{m_0+1}}{u_{m_0}} \cdot \frac{u_{m_0+1}}{u_{m_0+1}} \cdots \frac{u_n}{u_{n-1}} > \beta^{n-m_0}, \quad \forall n \geq m_0$

$$\Rightarrow u_n > \left(\frac{u_{m_0}}{\beta^{m_0}}\right)\beta^n, \quad \forall n \geq m_0.$$

যেহেতু m_0 একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা অতএব $\frac{u_{m_0}}{\beta^{m_0}}$ একটি নির্দিষ্ট সসীম সংখ্যা $= \lambda$ (ধরা যাক)

ফলে, $u_n > \lambda\beta^n, \quad \forall n \geq m_0$

কিন্তু $\sum\limits_{1}^{\infty} \beta^n$ একটি অপসারী শ্রেণি ($\beta > 1$)। অতএব $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ হবে একটি অপসারী শ্রেণি।

মন্তব্য : $l = 1$ হলে এই পরীক্ষাটি থেকে অসীম শ্রেণিটির অভিসরণ বা অপসরণ বিষয়ে কিছুই বলা সম্ভব হয় না। এই জন্য বলা হয় $l = 1$ হলে পরীক্ষাটি ব্যর্থ।

উদাহরণস্বরূপ (*i*) $\sum \frac{1}{n}$ এবং (*ii*) $\sum \frac{1}{n^2}$ শ্রেণি দুটির অভিসরণ নিয়ে আলোচনা করা যায়। উভয়ক্ষেত্রেই $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, কিন্তু প্রথম শ্রেণিটি হরাত্মক শ্রেণি (Harmonic series) এবং অপসারী। দ্বিতীয় শ্রেণিটি $\sum \frac{1}{n^p}$ শ্রেণির সঙ্গে তুলনীয় যেখানে $p = 2 > 1$ ফলে এটি অভিসারী।

C. কোশির বীজ-পরীক্ষা (*Cauchy's Root Test*)

উপপাদ্য : যদি $\sum u_n$ এমন একটি ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণি হয় যে

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

তাহলে শ্রেণিটি

(i) অভিসারী হবে, যখন $l < 1$

(ii) অপসারী হবে, যখন $l > 1$

(iii) পরীক্ষাটি থেকে শ্রেণিটির অভিসরণ অথবা অপসরণ নির্ণয় করা সম্ভব নয়, যখন $l = 1$ এর প্রমাণটি পূর্ববর্তী উপপাদ্যের অনুরূপ হওয়ায় এখানে বর্জিত হল।

উদাহরণ 1 : শ্রেণিটি অভিসারী কিনা নির্ণয় করুন।

$$1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^2}{4^3}+\cdots$$

সমাধান : এখানে $u_n = \left(\dfrac{x}{n+1}\right)^n, \quad n>1, \quad u_1 = 1$

অতএব $(u_n)^{1/n} = \dfrac{x}{n+1}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{n+1} = 0 < 1$ যখন x সসীম।

ফলে, কোশির বীজ-পরীক্ষা থেকে পাই যে, x কোন সসীম (finite) সংখ্যা হলে শ্রেণিটি অভিসারী হবে।

উদাহরণ 2 : নিচের শ্রেণিটির অভিসরণের পরীক্ষা করুন।

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{n+1}+\cdots$$

এখানে $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)}{\dfrac{n}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1$

কিন্তু $u_{n+1} > u_n$, $\forall n$ ফলে $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$

$\Rightarrow$ শ্রেণিটি অপসারী।

11.3.8 একান্তর শ্রেণি, নিঃশর্ত এবং শর্তাধীন অভিসরণ

সংজ্ঞা 1 : ধরি $\sum u_n$ একটি বাস্তব সংখ্যার অসীম শ্রেণি। তাহলে

(i) শ্রেণিটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী হবে, যখন $\sum |u_n|$ শ্রেণিটি অভিসারী হয়।

(ii) শ্রেণিটি শর্তাধীনভাবে অভিসারী হবে, যখন $\sum |u_n|$ শ্রেণিটি অপসারী কিন্তু $\sum u_n$ শ্রেণিটি অভিসারী হয়।

সংজ্ঞা 2 : কোনো অসীম শ্রেণির পদগুলি একান্তরক্রমে ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক হলে শ্রেণিটিকে একান্তর শ্রেণি বলা হয়।

একান্তর শ্রেণির অভিসরণের লীবনিৎসের পরীক্ষা (Leibnitz Test) ঃ

উপপাদ্য

যদি $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots (-1)^{n-1} u_n + \cdots$

একান্ত শ্রেণিটি এমন হয় যে

(i) $u_{n+1} \leq u_n, \quad \forall n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

তাহলে একান্তর শ্রেণিটি অভিসারী হবে।

প্রমাণ : ধরি $S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1} u_n$

তাহলে $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+1} - u_{2n+2} \geq 0, \quad \forall n$

$\Rightarrow S_{2n} + 2 \geq S_{2n}$

$\Rightarrow \{S_{2n}\}$ অনুক্রমটি ক্রমবর্ধমান।

আবার, $S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$

কিন্তু $u_{n+1} \le u_n$, $\forall n$ হওয়াতে ডানদিকের প্রত্যেক বন্ধনীর মধ্যস্থ পদ ধনাত্মক এবং তার ফলে $S_{2n} < u_1$, $\forall n$

অতএব ক্রমবর্ধমান অনুক্রম $\{S_{2n}\}$ ঊর্ধ্ব সীমাবন্ধ এবং $\{S_{2n}\}$ অনুক্রমটি অভিসারী।

ধরি, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = A$

আবার $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_{2n} + 0 \quad \text{(প্রদত্ত শর্ত)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \ \text{(ধরি)}$$

অতএব $\{S_{2n}\}$ এবং $\{S_{2n+1}\}$ উভয় অনুক্রমই একই সীমাতে অভিসারী। আমরা এবার দেখাবো যে $\{S_n\}$ অনুক্রমটিও ঐ একই সীমাতে অভিসারী (Converges to the same limit)। যেহেতু

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$$

কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে এমন দুটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m_1, m_2 পাওয়া যাবে যে

$$|S_{2n} - S| < \varepsilon, \quad \forall n \ge m_1 \tag{1}$$

এবং $$|S_{2n+1} - S| < \varepsilon, \quad \forall n \ge m_2 \tag{2}$$

অতএব (1) এবং (2) থেকে পাই

$$|S_n - S| < \varepsilon, \quad \forall n \ge \max\{2m_1, 2m_2 + 1\}$$

$\Rightarrow \{S_n\}$ অনুক্রমটি S সীমাতে অভিসারী।

$\Rightarrow \sum(-1)^{n-1} u_n$ শ্রেণিটি অভিসারী।

উদাহরণ : দেখান যে, $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \cdots$

শ্রেণিটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী ; কিন্তু

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

শ্রেণিটি শর্তাধীনভাবে অভিসারী

(নিজে করো)।

উপপাদ্য : নিঃশর্তভাবে অভিসারী কোন অসীম শ্রেণি অভিসারী হবে।

প্রমাণ : ধরি, $\sum_{1}^{\infty} u_n$ শ্রেণিটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী। তাহলে $\sum_{1}^{\infty} |u_n|$ শ্রেণিটি অভিসারী। অতএব কোশির অভিসরণের সাধারণ তত্ত্ব থেকে পাই যে, কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m পাওয়া যাবে যে

$$\left\| u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p} \right\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq m \text{ এবং } p \geq 1$$

অর্থাৎ $$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq m \text{ এবং } p \geq 1$$

আবার $p \geq 1$ এবং সকল ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n-এর জন্য

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq m \text{ এবং } p \geq 1$$

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} u_n$ অভিসারী।

উদাহরণ 1 : নিচের শ্রেণিটির অভিসরণের পরীক্ষা করুন।

$$\frac{\sin\alpha}{1^2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \cdots$$

যেখানে α একটি বাস্তব রাশি।

সমাধান : ধরি, $u_n = \dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$

তাহলে $$\sum_{1}^{\infty} |u_n| = \left|\frac{\sin\alpha}{1^2}\right| + \frac{|\sin 2\alpha|}{2^2} + \cdots + \frac{|\sin n\alpha|}{n^2} + \cdots$$

$$\leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$\therefore \sum_{1}^{\infty} |u_n| \leq \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

কিন্তু $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ অসীম শ্রেণিটি অভিসারী। ফলে তুলনা পরীক্ষা থেকে পাই $\sum_{1}^{\infty}|u_n|$ শ্রেণিটি অভিসারী $\Rightarrow$ প্রদত্ত শ্রেণিটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী এবং এ কারণে অভিসারী।

উদাহরণ 2 : দেখান যে, $1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ শ্রেণিটি x-এর প্রত্যেক মানের জন্য নিঃশর্তভাবে অভিসারী এবং প্রমাণ করুন যে, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$।

সমাধান : ধরি, $u_n=\frac{x^n}{n!}$, $n\geq 1$, $u_0=1$

এখন, $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{|x^n|}{n!}}{\dfrac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{x}\to\infty \quad (x\neq 0)$$

অতএব অনুপাত পরীক্ষা থেকে পাই যে শ্রেণিটি $x=0$ ব্যতীত অন্য সমস্ত মানের জন্য নিঃশর্তভাবে অভিসারী। কিন্তু $x=0$ হলে স্পষ্টতই শ্রেণিটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী। তাই x-এর সকল মানের জন্যই শ্রেণিটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী।

দ্বিতীয় অংশ, যেহেতু কোনো অভিসারী শ্রেণি $\sum u_n$-এর n তম পদের সীমা শূন্য যখন $n\to\infty$ তাই এক্ষেত্রে

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$$

উদাহরণ 3 : দেখান যে, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n=0$

যখন $|x|<1$ এবং m যে-কোনো বাস্তব সংখ্যা।

সমাধান : ধরি, $\sum_{1}^{\infty}u_n$ অসীম শ্রেণিটির n তম পদ

$$u_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}\,x^n$$

এখন $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|n|}{|m-n|}\frac{1}{|x|} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n}{m-n}\right|\frac{1}{|x|}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left|\frac{m}{n}-1\right|}\frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|}$$

অতএব $\sum u_{\text{n}}$ শ্রেণিটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী, যখন $|x| < 1$

$\Rightarrow \sum u_{\text{n}}$ শ্রেণিটি অভিসারী, যখন $|x| < 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ যখন $|x| < 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n = 0$ যখন $|x| < 1$

উদাহরণ 4 : নিচের লগারিদম্ শ্রেণিটির অভিসরণের আলোচনা করুন।

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 - \cdots$$

এখানে $u_n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \qquad u_{n+1} = (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

ফলে $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x|\frac{n}{n+1} \to |x|$, যখন $n \to \infty$ অতএব দ্য-আলেমবার্টের তুলনা পরীক্ষা থেকে পাই যে শ্রেণিটি $|x| < 1$ হলে নিঃশর্তভাবে অভিসারী এবং $|x| > 1$ হলে অপসারী।

আবার, যখন $|x| = 1 \Rightarrow x = 1$ অথবা -1,

প্রথম ক্ষেত্র $x = 1$, শ্রেণিটি $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ একটি একান্তর শ্রেণি। লীবনিৎসের পরীক্ষা থেকে পাই (যেহেতু $\lim u_{\text{n}} = 0$ এবং $u_{n+1} < u_{n},\ \forall n$) যে শ্রেণিটি অভিসারী।

কিন্তু $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ শ্রেণিটি অপসারী। অতএব $x = 1$ বিন্দুতে শ্রেণিটির অভিসরণ নিঃশর্ত নয়।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র $x = -1$, এখন

$$u_n = (-1)^{2n-1}\frac{1}{n} = -\frac{1}{n} \quad \forall n$$

অর্থাৎ শ্রেণিটি হচ্ছে

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=+\frac{1}{n}+\cdots\right)$$

এটি একটি অপসারী শ্রেণি।

11.3.9 নিঃশর্ত অভিসরণের সীমা-পরীক্ষা (Limit Test for Absolute Convergence)

উপপাদ্য : $p > 1$ হলে যদি $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = A =$ একটি সসীম সমখ্যা হয় তাহলে $\sum_1^{\infty} u_n$ শ্রেণিটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী হবে।

প্রমাণ : $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n^p |u_n| = |A|$

অতএব এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m পাওয়া যাবে যে

$$n^p|u_n| < |A|+1 \qquad \text{যখন} \quad n \geq m$$

$$\Rightarrow |u_n| < n^{-p}(|A|+1) \qquad \text{যখন} \quad n \geq m$$

$$\Rightarrow \sum_{n=m}^{\infty}|u_n| < \sum_{n=m}^{\infty}(|A|+1)\frac{1}{n^p}$$

যেহেতু $\sum\frac{1}{n^p}$ শ্রেণিটি অভিসারী যখন $p > 1$, অতএব (1) থেকে পাই $\sum_1^{\infty}|u_n|$ শ্রেণিটিও অভিসারী হবে ; যখন $p > 1$, অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

অপসরণের সীমা পরীক্ষা (Limit Test for Divergence)

উপপাদ্য :

যদি $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = A(\neq 0)$ অথবা $A = \pm\infty$

তাহলে $\sum u_n$ অপসারী হবে।

$A = 0$ হলে পরীক্ষাটি ব্যর্থ।

প্রমাণ : প্রথম ক্ষেত্র $A > 0$ (অথবা $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} nu_n = A$$

অতএব এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m পাওয়া যাবে যে

$$nu_n > \frac{A}{2}, \qquad \text{যখন } n = m, m+1, \ldots$$

$$\Rightarrow u_n > \frac{A}{2}\frac{1}{n}, \qquad \text{যখন } n = m, m+1, \ldots$$

$$\Rightarrow \sum_m^\infty u_n > \frac{A}{2}\sum_m^\infty \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow \sum\limits_m^\infty u_n$ অপসারী যেহেতু $\sum\limits_m^\infty \frac{1}{n}$ শ্রেণিটি অপসারী।

অসীম অতএব $\sum\limits_1^\infty u_n$ শ্রেণিটি অপসারী।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র $A < 0$ (অথবা $-\infty$)

এখানে $\sum\limits_1^\infty (-u_n)$ শ্রেণিটি অপসারী হবে ফলে $\sum\limits_1^\infty u_n$ শ্রেণিটিও অপসারী হবে।

$A = 0$ হলে এই পরীক্ষাটি থেকে কোনো অসীম শ্রেণির অভিসরণ বা অপরসণ বিষয়ে নিশ্চিত হওয়া যায় না।

$\sum\limits_1^\infty \frac{1}{n^2}$ এবং $\sum\limits_2^\infty \frac{1}{n\log n}$ দুটি শ্রেণির ক্ষেত্রেই $A = 0$। কিন্তু প্রথম শ্রেণিটি অভিসারী, আর দ্বিতীয়টি অপসারী (কোশির সমাকল পরীক্ষা প্রয়োগ করুন)।

11.4 অপেক্ষকের অনুক্রম, অপেক্ষকের অসীম শ্রেণি, সম-অভিসরণ

এই পরিচ্ছেদে আমরা সেই সমস্ত অনুক্রম এবং অসীম শ্রেণি নিয়ে আলোচনা করব যাদের পদগুলি হচ্ছে বাস্তব চলের অপেক্ষক।

11.4.1 অভিসরণ এবং সম-অভিসরণ

ধরি, $\{f_n(x)\}_1^\infty$ অনুক্রমটির প্রতিটি পদ $a \le x \le b$ অন্তরালে সংজ্ঞিত অপেক্ষক। x_0, $[a, b]$ অন্তরালে একটি ইচ্ছাধীন বিন্দু হলে

$$\{f_n(x_0)\}_1^\infty \equiv \{f_1(x_0), f_2(x_0), f_3(x_0), \cdots\}$$

অনুক্রমটি হবে একটি সাংখ্যিক (numerical) অনুক্রম। অপেক্ষকের অনুক্রম $\{f_n(x)\}_1^\infty$ x_0 বিন্দুতে অভিসারী হবে যদি সাংখ্যিক অনুক্রম $\{f_n(x_0)\}_1^\infty$ অভিসারী হয়। অনুরূপভাবে অপেক্ষকের অনুক্রম $\{f_n(x)\}_1^\infty$ x_0 বিন্দুতে অপসারী হবে যদি সাংখ্যিকনুক্রম $\{f_n(x_0)\}_1^\infty$ অপরাসী হয়।

তাই প্রথম ক্ষেত্রে x_0 বিন্দুটিকে $\{f_n(x)\}_1^\infty$ অনুক্রমটির একটি অভিসরণ বিন্দু বলা হবে এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে এটি হবে ঐ অনুক্রমটির অপসরণ বিন্দু।

$\{f_n(x)\}$ অনুক্রমটির অভিসরণ বিন্দুগুলির সেট্‌টিকে ঐ অনুক্রমের অভিসরণের ক্ষেত্র বলা হবে।

অপেক্ষকের অনুক্রম $[a, b]$ অন্তরালস্থিত প্রত্যেক x-বিন্দুতে অভিসারী হলে বলা হবে অনুক্রমটি ঐ অন্তরালে অভিসারী। যদি $\{f_n(x)\}_1^\infty$ অনুক্রমটি $[a, b]$ অন্তরালে অভিসারী হয় তাহলে $[a, b]$ অন্তরালের প্রত্যেক বিন্দুতে $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$-এর অস্তিত্ব থাকবে। অতএব এই সীমাস্থ মানটি হবে $[a, b]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত x চলের একটি অপেক্ষক (ধরা যাক) $f(x)$ এবং এক্ষেত্রে আমরা লিখবো

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \qquad x \in [a, b]$$

সংজ্ঞা 1 : $[a, b]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... অপেক্ষকগুলির অনুক্রম $[a,$

b] অন্তরালে সংজ্ঞিত অপেক্ষক $f(x)$ এ অভিসারী হবে যদি, [a, b] অন্তরালস্থিত প্রত্যেক বিন্দু x এবং প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর জন্য এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

$N \equiv N\ (\varepsilon,\ x)$ পাওয়া যায়

যে $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ যখন $n > N(\varepsilon,\ x)$

সংজ্ঞা 2 : [a, b] অন্তরালে সংজ্ঞিত $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ অপেক্ষকগুলির অনুক্রম $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$, [a, b] অন্তরালে সংজ্ঞিত অপেক্ষক $f(x)$ এ সম-অভিসারী হবে যদি, কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $N \equiv N\ (\varepsilon)$ পাওয়া যায়, (যেটি [a, b] অন্তরালস্থিত x-এর উপর অনির্ভরশীল) যে

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{যখন } n > N(\varepsilon,) \quad x \in [\ a,\ b]$$

উদাহরণ 1 : ধরি, $f_n(x) = x^n$, $\qquad 0 \le x \le 1$

এখানে $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ $\qquad$ যখন $0 \le x \le 1$

$$= 1 \quad \text{যখন } x = 1$$

তাই বলা যায় যে, $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$ অনুক্রমটি [0, 1] অন্তরালে সংজ্ঞিত অপেক্ষক $f(x)$ এ অভিসারী যেখানে

$$f(x) = 0 \qquad \text{যখন } 0 \le x \le 1$$
$$f(1) = 1$$

$\{f_n(x)\}_1^{\infty}$ অনুক্রমটি [0, 1] অন্তরালে সম-অভিসারী কিনা পরীক্ষা করা যাক।

ধরি, $x_0 \in (0,\ 1)$, তাহলে $|f_n(x_0) - f(x_0)| = x_0^n$

যদি $\varepsilon > 0$ হয়, তাহলে $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$

যখন $x_0^n < \varepsilon$

অর্থাৎ, যখন, $n \log \frac{1}{x_0} > \log \frac{1}{\varepsilon}$

অর্থাৎ, যখন, $n > \dfrac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{x_0}}$

ধরি, $N = \left[\dfrac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{x_0}}\right] + 1$

তাহলে $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$ যখন $n \geq N$

আবার, $x_0 = 0$ হলে, $|f_n(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$ যখন $n \geq 1$

অতএব, [0, 1] অন্তরালে অবস্থিত সব x-এর জন্য $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ অসমতাটি সিদ্ধ হয় যখন,

$n \geq N$, এখানে $N = \left[\dfrac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{x}}\right] + 1$ যখন $x \neq 0$

$=1$ যখন $x = 0$

ফলে, N সংখ্যাটি ε এবং x-এর উপর নির্ভরশীল। আবার যখন $x \to 1-$, $N(\varepsilon, x) \to \infty$ অতএব দেখা যাচ্ছে যে [0, 1] অন্তরালে x-এর উপর অনির্ভরশীল এমন কোন ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা N নেই যে $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ অসমতাটি $n \geq N$ হলে সিদ্ধ হয়।

এ থেকে প্রমাণিত হচ্ছে যে $\{f_n(x)\}_1^\infty$ অনুক্রমটি [0, 1] অন্তরালে সমভাবে অভিসারী নয়।

এবারে আমরা দেখাবো যে উক্ত অনুক্রমটি [0, a] অন্তরালে সমভাবে অভিসারী যখন $a < 1$. ধরি, [0,a] অন্তরালে x একটি বিন্দু।

তাহলে $0 < x \leq a \Rightarrow \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{a} \Rightarrow \log \dfrac{1}{x} \geq \log \dfrac{1}{a} \Rightarrow \dfrac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{x}} \leq \dfrac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{a}}$

$\Rightarrow$ $[0, a]$ অন্তরালে $\dfrac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{x}}$ অপেক্ষকটির গরিষ্ঠ মান $\dfrac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{a}}$

এখন $N = \left[\dfrac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{a}}\right] + 1$ নেওয়া হলে

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ অসমতাটি সিদ্ধ হয় যখন $n \geq N$ এবং $x \in [0, a]$ তাই $\{f_n(x)\}_1^\infty$ অনুক্রমটি $[0, \infty]$ অন্তরালে সম-অভিসারী।

উদাহরণ 2 : দেখান যে, $g_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$, $0 \leq x < \infty$ হলে $\{g_n(x)\}_1^\infty$ অনুক্রমটি $[0, \infty]$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী। (উদাহরণ 1-এ বর্ণিত পদ্ধতি অনুসারে নিজে করুন)

11.4.2 অপেক্ষকের অসীম শ্রেণির অভিসরণ এবং সম-অভিসরণ

সংজ্ঞা 1 : ধরি, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots f_k(x) + \cdots$

একটি অসীম শ্রেণি যেখানে শ্রেণিটির পদগুলি অর্থাৎ $f_k(x)$ $(k = 1, 2 \ldots)$ অপেক্ষকগুলি প্রত্যেকে $[a, b]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত। এই অপেক্ষকের শ্রেণিটিকে বলা হবে অভিসারী যখন এর আংশিক যোগফল

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x), \quad n = 1, 2, \ldots$$

গুলির অনুক্রম $\{S_n(x)\}_1^\infty$ অভিসারী হবে।

এই অনুক্রমটি অভিসারী হলে $S_n(x)$-এর সীমাস্থ মান $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ শ্রেণিটির যোগফল বলা হবে।

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ অভিসারী হলে এবং এর যোগফল $S(x)$ হলে আমরা লিখবো $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

সংজ্ঞা 2 : ধরি, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ শ্রেণীটি আভিসীরী এবং এর যোগফল অপেক্ষক (Sum function) হচ্ছে $S(x)$; তাহলে এই শ্রেণীটিকে $[a, b]$ অন্তরালে $S(x)$ অপেক্ষকে সমভাবে অভিসারী বলা হবে যদি এই শ্রেণীটির আংশিক যোগফলগুলির অনুক্রম $\{S_n(x)\}_1^{\infty}, [a, b]$ অন্তরালে $S(x)$ অপেক্ষকে সমভাবে অভিসারী হয়।

অর্থাৎ কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে যদি এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $N \equiv N(\varepsilon)$ পাওয়া যায় যে $S_n(x)$ এবং $S(x)$-এর অন্তর (Difference) নিচের অসমতাটি সিদ্ধ করে

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon \text{ যখন } n > N(\varepsilon) \text{ এবং } x \varepsilon [a, b]$$

অর্থাৎ $\sup\limits_{a \le x \le b} |S(x) - S_n(x)| = \sup\limits_{a \le x \le b} \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \to 0$] যখন $n \to \infty$

উদাহরণ 1 : দেখান যে, $\sum_{k=1}^{\infty} [kxe^{-x^2} - (k-1)xe^{-(k-1)x^2}]$ অসীম শ্রেণীটি $0 \le x \ge 1$ অন্তরালে অভিসারী কিন্তু সমভাবে অভিসারী নয়।

সমাধান : এখানে $S_n(x) = nxe^{-nx^2} \quad 0 \le x \ge 1$

$$\text{এবং} \quad \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} nxe^{-nx^2}$$

$$= \lim_{n \to \infty} x \frac{n}{e^{nx^2}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ আকার } x \neq 0\right)$$

$$= x \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2nxe^{nx^2}} = 0, \quad 0 \le x \ge 1$$

আবার $S_n(0) = 0$

$\Rightarrow S(0) = 0$

অতএব $S(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = 0 \quad 0 \le x \le 1$

ফলে $|S(x)-S_n(x)|=|S_n(x)|=nxe^{-nx^2} \qquad 0 \le x \le 1$

এবং $\lim\limits_{n\to\infty}|S(x)-S_n(x)|=\lim\limits_{n\to\infty} nxe^{-nx^2}=0$

$\Rightarrow$ অসীম শ্রেণীটি অভিসারী।

এখন, $\sup\limits_{0\le x\le 1}|S(x)-S_n(x)|=\sup\limits_{0\le x\le 1}\{nxe^{-nx^2}\}$

$nxe^{-nx^2}=f(x)$ ধরে পাই, $f'(x)=ne^{-nx^2}(1-2nx^2)$

$\Rightarrow f'(x)>0$ যখন $x \le \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$

$\Rightarrow f(x)$ অপেক্ষকটি $0 \le x \le \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ অন্তরালে ক্রমবর্ধমান।

$$\therefore\ [f(x)]_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2e}}$$

অতএব $\sup\limits_{0\le x\le 1}\{nxe^{-nx^2}\}=\sqrt{\dfrac{n}{2e}}\to\infty$ যখন $n\to\infty$ তাই প্রদত্তদ অসীম শ্রেণীটি $0 \le x \ge 1 \quad 0 \le x \ge 1$

অন্তরালে সম-অভিসারী নয়।

উদাহরণ 2 : প্রমাণ করুন যে, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$ অসীম শ্রেণীটি $-a \le x \le a$ অন্তরালে $\dfrac{1}{1-x}$ অপেক্ষকে সমভাবে অভিসারী যখন $0 \le a \le 1$ (সংজ্ঞা থেকে নিজে করুন)।

উদাহরণ 3 : দেখান যে, $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^k$ অসীম শ্রেণীটি $0 \leq x \geq 1$ অন্তরালে নিঃশর্তভাবে অভিসারী হলেও সমভাবে অভিসারী নয়।

সমাধান : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(1-x)x^k = (1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k$

$$= (1-x)\frac{1-x^n}{1-x} = 1 - x^n, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$= 0 \qquad x = 1$$

অতএব, $S(x) = 1 \quad 0 \leq x \leq 1$

$= 0 \quad x = 1$

এখন $|S_n(x) - S(x)| = x^n \qquad 0 \leq x \leq 1$

$= 0 \qquad x = 1$

অতএব কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \quad x^n < \varepsilon \qquad 0 \leq x < 1$$

$$\Rightarrow \quad n \log\tfrac{1}{x} > \log\tfrac{1}{\varepsilon} \qquad 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow \quad n > \frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon}} \qquad 0 < x < 1$$

অতএব $\left[\dfrac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{x}}\right] + 1 = N(\varepsilon, x)$ ধরা যাক।

∴ কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে আমরা এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $N(\varepsilon, x)$ পাচ্ছি যে, $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ অসমতাটি সিদ্ধ হচ্ছে যখন $n \geq N(\varepsilon, x)$; $0 < x < 1$

যেহেতু $N(\varepsilon, x)$ সংখ্যাটি x-এর উপর নির্ভরশীল, অতএব $0 < x < 1$ অন্তরালে শ্রেণীটির অভিসরণ সম নয়। আবার যেহেতু শ্রেণীটির পদগুলি ধনাত্মক, অতএব $0 < x < 1$ অন্তরালে শ্রেণীটির অভিসরণ নিঃশর্ত।

11.4.3 অসীম শ্রেণী সম-অভিসরণে পরীক্ষা

বায়ারস্ট্রাসের M-পরীক্ষা।

অপেক্ষকের অসীম শ্রেণী $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ কোন $[a, b]$ অন্তরালে সমভাবে (এবং নিঃশর্তভাবে) অভিসারী হবে যদি এমন একটি অভিসারী ধনাত্মক সংখ্যার শ্রেণী $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ পাওয়া যায় যে

$$|f_k(x)| \le M_k, \qquad a \le x \le b, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

প্রমাণ : যেহেতু $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ অসীম শ্রেণীটি অভিসারী, কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা N পাওয়া যাবে যে $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$ যখন $n \ge N$

অতএব প্রদত্ত শর্ত থেকে পাই

$$|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon \text{ যখন } n \ge N \text{ এবং } a \le x \le b$$

$$\Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| < \varepsilon, \text{ যখন } n \ge \mathrm{N} \text{ এবং } a \le x \le b$$

অর্থাৎ $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ অসীম শ্রেণীটি $[a, b]$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

আবার, যেহেতু $|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$,যখন $n \ge N$ এবং $a \le x \le b$

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ অসীম শ্রেণীটি $a \le x \le b$ অন্তরালে নিঃশর্তভআবে অভিসারী।

উদাহরণ 1 : দেখান যে, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ অসীম শ্রেণীটি $-\infty < x < \infty$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

প্রমাণ : যেহেতু $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ যখন $-\infty < x < \infty$ এবং $n = 1, 2, ...$

এবং $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ শ্রেণীটি অভিসারী।

অতএব $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$ অসীম শ্রেণীটি $-\infty < x < \infty$

অন্তরালে সমভাবে অভিসারী।

উদাহরণ 2 : প্রমাণ করুন যে, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x}{1+n^4x^2}$ অসীম শ্রেণীটি $0 \le x < \infty$ অন্তরালে সমভাবে অভিসারী হবে।

প্রমাণ : ধরি $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \le x < \infty$

$$\Rightarrow f'_n(x) = \frac{1-n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2} = 0, \text{ যখন } x = \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow (1+n^4x^2)^2 f'_n(x) = 1 - n^4x^2$$

$$\Rightarrow (1+n^4x^2)^2 f'_n(x) + \frac{d}{dx}[1+n^4x^2)^2 f'_n(x) = -2n^4x^2$$

$$\Rightarrow [f'_n(x)]_{x=\frac{1}{n^2}} = \left[\frac{-2n^4x^2}{(1+n^4x^2)^2}\right]_{x=\frac{1}{n^2}} < 0$$

অতএব, $x = \dfrac{1}{n^2}$ হলে $f_n(x)$ অপেক্ষকটির মান পরম হবে এবং এই পরম মানটি হচ্ছে $\dfrac{1}{2n^2}$

অতএব, $|f_n(x)| \le \dfrac{1}{2n^2}$ যখন $0 \le x\ \infty$ এবং $n = 1, 2, 3, \ldots$ আবার, $\sum\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ (এবং, ফলে $\sum\limits_1^{\infty} \dfrac{1}{2n^2}$) শ্রেণীটি অভিসারী। অতএব, বায়াস্ট্রাসের M-পরীক্ষা থেকে পাই যে প্রদত্ত শ্রেণীটি $0 \le x < \infty$ অন্তালে সমভাবে অভিসারী।

11.4.4 অপেক্ষকের অসীম শ্রেণীর যোগফলের সান্তত্য, সমাকলন ও অন্তরকলন

উপপাদ্য 1 : যদি $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ অসীম শ্রেণীটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকে সমভাবে অভিসারী হয় এবং পর পদগুলি অর্থাৎ $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ঐ অন্তরালটির কোন x_0 বিন্দুতে সন্তত হয় তবে $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ শ্রেণীটির যোগফল অপেক্ষক $f(x)$ ঐ বিন্দুতে সন্তত হবে।

প্রমাণ : যেহেতু $\sum\limits_1^{\infty} f_k(x)$ অসীম শ্রেণীটি $[a, b]$ অন্তরালে সম-অভিসারী এবং এর যোগফল অপেক্ষক $f(x)$, অতএব কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা N পাওয়া যাবে যে $\left|\sum\limits_1^{\infty} f_k(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ (1) যখন $n \ge N$ এবং $x \in [a, b]$ এই অসমতাটিতে $x = x_0$ এবং $n = N$ বসিয়ে পাই।

$$\left|\sum_1^{N} f_k(x_0) - f(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

আবার, যেহেতু $\sum\limits_1^{N} f_k(x)$ সীমিত সংখ্যক সন্তত অপেক্ষকের সমষ্টি তাই এটি $[a, b]$ অন্তরালে সন্তত। অতএব কোন $\varepsilon > 0$ প্রদত্ত হলে এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া সম্ভব যে

$$\left|\sum_1^{N} f_k(x) - \sum_1^{N} f_k(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{(3) যখন } |x - x_0| < \delta$$

অতএব যখন $|x - x_0| < \delta$, তখন

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k(x)| + |\sum_{K=1}^{N} f_k(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k(x_0)|$$

$$+ |\sum_{k=1}^{n} f_k(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad [(1),\ (2) \text{ এবং } (3) \text{ থেকে}]$$

$\Rightarrow f(x) \to f(x_0)$ যখন $x \to x_0$

অতএব যোগফল অপেক্ষক $f(x)$ $x = x_0$ বিন্দুতে সন্তত।

অনুসিদ্ধান্ত : যেহেতু x_0 বিন্দুটি $[a, b]$ অন্তরালের একটি যদৃচ্ছ বিন্দু (arbitrary point), উপরের উপপাদ্যটি $[a, b]$ অন্তরালের সর্বত্র প্রযোজ্য তাই উপপাদ্যটির নির্বাচনকে পরিবর্তিত আকারে লেখা যায়—

'যদি $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ অসীম শ্রেণীটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সম-অভিসারী হয় এবং এর পদগুলি অর্থাৎ $f_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, ...)$ ঐ অন্তরালে সন্তত হয়, তাহলে অসীম শ্রেণীটির যোগফল অপেক্ষক $f(x)$ ঐ অন্তরালে সন্তত হবে।'

মন্তব্য 1. : এর বিপরীত উপপাদ্যটি অসত্য। সন্তত পদবিশিষ্ট অপেক্ষকের অসীম শ্রেণীর যোগফল অপেক্ষক সন্তত হলেও সম-অভিসারী না হতে পারে।

মন্তব্য 2 : কিন্তু সন্তত পদবিশিষ্ট অপেক্ষকের অসীম শ্রেণীর যোগফল অপেক্ষকটি যদি কোন অন্তরালে সন্তত না হয় তাহলে ঐ অন্তরালে অসীম শ্রেণীটির অভিসরণ অসম (Non-uniform)।

উদাহরণ 1 : $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ অসীম শ্রেণীটি $-a \le x \le a$ অন্তরালে সম-অভিসারী যখন $0 < a < 1$ এর যোগফল অপেক্ষক $\frac{1}{1-x}, |x| \le a$ অন্তরালে সন্তত যখন $0 < a < 1$, এখানে অসীম শ্রেণীটির পদগুলি $x^k (k = 1, 2, 3, ...)$, $-a \le x \le a$ অন্তরালে সন্তত।

উদাহণ 2 : 11.42 পরিচ্ছেদে প্রদত্ত উদাহরণ 1 এ দেখান হয়েছে যে

$$\sum_{k=1}^{\infty} [kxe^{-kx^2} - (k-1)xe^{-(k-1)x^2}]$$

অসীম শ্রেণীটি [0, 1] অন্তরালে সম-অভিসারী নয়। যদিও এই শ্রেণীটির প্রতিটি পদ-এর যোগফল অপেক্ষক [0, 1] অন্তরালে সন্তত।

উপপাদ্য 2 : $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সম-অভিসারী $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ শ্রেণীটি প্রতিটি পদ $[a, b]$ অন্তরালে সন্তত হয় এবং $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$ হয়, তাহলে

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

প্রমাণ : $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ অসীম শ্রেণীটি $[a, b]$ অন্তরালে সম-অভিসারী, অতএব একটি ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে, $[a, b]$ অন্তরালস্থিত x-এর উপ অনির্ভরশীল এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্য m পাওয়া যাবে যে

$$|f(x) - S_n(x)| < \tfrac{\varepsilon}{b-a}, \qquad \text{যখন } n \geq m \text{ এবং } a \leq x \leq b$$

অতএব $\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - S_n(x)|\, dx$

$$< \int_a^b \left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)dx = \varepsilon, \quad \text{যখন } n > m$$

অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_1^n f_k(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

উদাহরণ 3 : দেখান যে, $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ অসীম শ্রেণীটি (i) $0 \le x \le h$, $(h < 1)$ অন্তরালে সম-অভিসারী, (ii) এর যোগফল অপেক্ষক $\frac{1}{1+x}$ এবং

$$\int_0^h \frac{dx}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{h^{k+1}}{k+1}, \quad 0 \le h < 1$$

সমাধান : $|(-1)^k x^k| < |x|^k < h^k$ যখন $0 \le x \le h$ এবং $\sum_{k=0}^{\infty} h^k$ শ্রেণীটি অভিসারী এবং এর যোগফল অপেক্ষক $\frac{1}{1-h}$ যখন $h<1$। অতএব বায়ারস্ট্রাসের M-পরীক্ষা প্রয়োগ করে পাই যে $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ শ্রেণীটি $0 \le x \le h$ $(h<1)$ অন্তরালে সম-অভিসারী।

এর যোগফল অপেক্ষক $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-(-1)^n x^n}{1+x} = \frac{1}{1+x}, \text{ যখন } 0 \le x < 1$$

আবার $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ শ্রেণীটির প্রত্যেক পদ $0 \le x \le h$ $(h<1)$ অন্তরালে সন্তত।

অতএব $\int_0^h \frac{dx}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^h (-1)^k x^k dx\right)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{h^{k+1}}{k+1}, \quad 0 \le h < 1$$

অর্থাৎ, $\log(1+h) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{h^{k+1}}{k+1}, \quad 0 \le h < 1$

মন্তব্য : প্রমাণ করা যায় যে, উপরে অসীম শ্রেণীটি $0 \leq h \leq 1$ অন্তরালে সম- অভিসারী এবং উপপাদ্য 1 থেকে পাই যে এই শ্রেণীটির যোগফল অপেক্ষক $0 \leq h \leq 1$ অন্তরালে সন্তত হবে। তাই

$$\log(1+h) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{h^{k+1}}{k+1},$$ সম্বন্ধটি $h = 1$ বিন্দুতেও সিদ্ধ হবে।

অতএব $\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$

উপপাদ্য 3 : যদি

(1) $f_k(x)$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ অপেক্ষকগুলির $[a, b]$ অন্তরালে সন্তত অন্তরকলজ থাকে

(2) $[a, b]$ অন্তরালে $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ হয়।

(3) $[a, b]$ অন্তরালে $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ সম-অভিসারী হয় তাহলে $[a, b]$ অন্তরালে

$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) = f'(x)$।

প্রমাণ : $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x)$ বসিয়ে এবং উপপাদ্য 1 প্রয়োগ করে পাই $F(x)$, $[a, b]$ অন্তরালে সন্তত।

এবার উপপাদ্য 2 প্রয়োগ করে পাই

$$\int_a^h F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_a^h f'_k(x)dx\right], \qquad a \leq h \leq b$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}[f_k(h) - f_k(a)]$$

এখন, দ্বিতীয় শর্ত থেকে পাই যে, উপরের ডানদিকের অসীম শ্রেণীটি দুটি অভিসারী শ্রেণীর অন্তর। অতএব

$$\int_a^h F(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(h) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(a)$$

$$= f(h) - f(a)$$

উভয় পক্ষকে h-এর সাপেক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$F(h) = f'(h) \Rightarrow$$

$$f'(h) = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(h), \qquad a \le h \le b$$

উদাহরণ : $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ অসীম শ্রেণীটি $-1 < x < 1$ অন্তরালে অভিসারী

এবং $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad -1 < x < 1$

এই অসীম শ্রেণীটিকে অন্তরকলন করে পাই

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$$

এখন যেহেতু $|kx^{k-1}| \le ka^{k-1}$, যখন $-a \le x \le a$ এবং $a < 1$

এবং $\sum_{k=0}^{\infty} ka^{k-1}$ শ্রেণীটি অভিসারী যখন $a < 1$

(দ্য-আলেমবার্টের অনুপাত পরীক্ষা প্রয়োগ করুন)

অতএব বায়ারস্ট্রাসের M-পরীক্ষা থেকে পাই যে $\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$ শ্রেণীটি $-a \le x \le a$ অন্তরালে সম-অভিসারী যখন $a<1$।

অতএব $\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$,   যখন $-a \le x \le a$

$a = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ বসিয়ে পাই যে

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{1-x^2}$$ সম্বন্ধটি

$[-1 + \varepsilon \le x \le 1 - \varepsilon]$ অন্তরালে সিদ্ধ। যেহেতু $\varepsilon > 0$ যদৃচ্ছ সংখ্যা, অতএব ঐ সম্বন্ধটি $-1 < x < 1$ অন্তরালে সিদ্ধ হবে।

11.5 ঘাত-শ্রেণী, প্রতিপদের সমাকলন ও অন্তরকলনজাত ঘাত শ্রেণীর অভিসরণ

অপেক্ষকের অসীম শ্রেণী অর্থাৎ যে সমস্ত অসীম শ্রেণী পদগুলি অপেক্ষক তাদের একটি বিশেষ ক্ষেত্র হচ্ছে ঘাত শ্রেণী; এখানে শ্রেণীটির পদগুলি হচ্ছে কোন চলের বিভিন্ন ঘাত। এই পরিচ্ছেদে আমরা

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

আকারের অসীম শ্রেণীর আলোচনা করব।

11.5.1 উপপাদ্য 1

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ ঘাতশ্রেণীটি $x = x_0$ বিন্দুতে অভিসারী হলে, এটি $|x|<|x_0|$ অন্তরালে অর্থাৎ $-|x_0|< x < |x_0|$ অন্তরালে নিঃশর্ত অভিসারী হবে।

প্রমাণ : যেহেতু ঘাতশ্রেণীটি $x = x_0$ বিন্দুতে অভিসারী, অতএব $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$

ফলে এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা M পাওয়া যাবে যে $|a_n x_0^n| < M$ যখন $n \geq 0$

কিন্তু $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| . |\frac{x}{x_0^1}|^n$

$$< M \ b^2 \qquad \text{যেখানে } b = \frac{|x|}{|x_0|} < 1$$

$$\text{যখন } |x| < |x_0|$$

অতএব, $|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + ...$

শ্রেণীটির পদগুলি $M \ (1 + b + b^2 + ...)$

এই অভিসারী শ্রেণীটির পদগুলির চেয়ে ক্ষুদ্রতর। ফলে তুলনা পরীক্ষার প্রয়োগে পাই যে $\sum_0^\infty |a_n x^n|$ ঘাতশ্রেণীটি $| \ x \ | < | \ x_0 \ |$ অন্তরালে অভিসারী অর্থাৎ $\sum_0^\infty |a_n x^n|$ ঘাতশ্রেণীটি $|x| < |x_0|$ অন্তরালে নিঃশর্ত অভিসারী।

উপপাদ্য 2 : ঘাতশ্রেণীটি $x = x_0$ বিন্দুতে অভিসারী না হলে এটি $|x| > |x_0|$ অন্তরালের কোন বিন্দুতেই অভিসারী নয়।

প্রমাণ : ধরি, প্রদত্ত ঘাত শ্রেণীটি $x = x_0$ বিন্দুতে অপসারী কিন্তু $x = x_1$ বিন্দুতে অভিসারী যেখানে $|x_1| > |x_0|$ অর্থাৎ $|x_0| < |x_1|$

ফলে, উপপাদ্য 1 থেকে পাই যে, শ্রেণীটি x_0 বিন্দুতে অভিসারী হবে। কিন্তু এটি একটি অসংগতি, কারণ আমরা ধরে নিয়েছি যে শ্রেণীটি $x = x_0$ বিন্দুতে অপসারী। অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

মন্তব্য : এই উপপাদ্য দুটিকে আবেলের উপপাদ্য (Abel’s Theorem) বলা হয়।

11.5.2 ঘাত শ্রেণীর অভিসরণের ব্যাসার্ধ (Radius of Convergence of a Power Series)

প্রতিটি ঘাতশ্রেণীই $x = 0$ বিন্দুতে অভিসারী, এই শ্রেণীটির প্রতি পদের সহগ গুলি (অর্থাৎ a_0, a_1, a_2, ...) যাই হোক না কেন আবেলের উপপাদ্য থেকে ঘাতশ্রেণীর অভিসরণের ক্ষেত্র (Domain of Convergence) বিষয়ে বিচার করা সম্ভব। ঘাত শ্রেণীগুলি তিনরকমের হতে পারে।

1. শ্রেণীটি $x = 0$ বিন্দু ব্যতীত অন্য কোথাও অভিসারী নয়। উদাহরণ স্বরূপ $\sum_0^{\infty} n!x^n$ ঘাত শ্রেণীটি বিবেচনা করা যেতে পারে।

এখানে $u_n = n!x^n$

$u_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$

$$\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)x \to \infty \qquad \text{যখন } n \to \infty$$

অতএব, $x = 0$ বিন্দু ব্যতীত অন্য কোথাও শ্রেণীটি অভিসারী নয়।

2. শ্রেণীটি x চলের সব মানের জন্যই অভিসারী। যেমন $\sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

এক্ষেত্রে $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \to 0$, যখন $n \to \infty$ এবং $x \neq 0$

আবার $x = 0$ বিন্দুতে প্রতিটি ঘাতশ্রেণীই অভিসারী। অতএব এই শ্রেণীটি x-এর সব মানের জন্যই অভিসারী।

3. এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা R পাওয়া যাবে যে $|x|<R$ হলে শ্রেণীটি অভিসারী এবং $|x|>R$ হলে এটি অপসারী। এক্ষেত্রে $-R< x < R$ অন্তরালটি শ্রেণীটির অভিসরণের অন্তরাল এবং ধনাত্মক সংখ্যা R হল অভিসরণের ব্যাসার্ধ। উদাহরণস্বরূপ $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \ldots$ শ্রেণীটি বিবেচনা করুন।

এখানে $$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{\frac{|(-1)^k x^{k+1}|}{k+1}}{\frac{|(-1)^{k-1} x^k|}{k}}$$

$= |x|\dfrac{k}{k+1} \to |x|,$ যখন $k \to \infty$

অতএব, $|x|<1$ হলে শ্রেণীটি অভিসারী এবং $|x|>1$ হলে এটি অপসারী।

$-1<x<1$ হল শ্রেণীটির অভিসরণের অন্তরাল এবং 1 হল এর অভিসরণের ব্যাসার্ধ।

কোন ঘাত শ্রেণীর অভিসরমের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হলে নিচের উপপাদ্যটি প্রয়োগ করা যেতে পারে।

উপপাদ্য 1 : ধরি, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ একটি ঘাতশ্রেণী। এবং

$$\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R} > 0$$

তাহলে, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণীটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী হবে যখন $|x| < R$

এবং $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণী অপসারী হবে যখন $|x| > R$

প্রমাণ : ধরি, $\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} = \dfrac{1}{R} > 0$

অতএব একটি ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m পাওয়া যাবে যে

$$\sqrt[k]{|a_k|} < \frac{1+\varepsilon}{R}, \quad \text{যখন } k > m$$

$$= |a_k x^k| < \left(\frac{1+\varepsilon}{R}\right)^k |x|^k, \quad \text{যখন } k > m$$

অর্থাৎ $|a_k x^k| < r^k$ (যেখানে $r = \dfrac{1+\varepsilon}{R}|x|$), যখন $k > m$

এখন $\sum_{k=m+1}^{\infty} r^k$ গুণোত্তর শ্রেণীটি অভিসারী যখন $|\ r\ | < 1$

অতএব | r | < 1 হলে $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ শ্রেণীটি অভিসারী হবে।

অর্থাৎ, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ শ্রেণীটি অভিসারী হবে যখন | r | < 1

অর্থাৎ, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ শ্রেণীটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী হবে যখন

$$|r| = \left|\frac{1+\varepsilon}{R}\right| |x| < 1$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{R}{1+\varepsilon} < R$$

অর্থাৎ $|x| < R$ হলে $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ শ্রেণীটি নিঃশর্তভআবে অভিসারী হবে।

দ্বিতীয় অংশের প্রমাণ : ধরি, $\sum_{0}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণীটি x-এর একটি নির্দিষ্ট মানের জন্য অভিসারী এবং x-এর এই মানটি $|x| = R(1+\varepsilon) > R$ এই অসমতাটিকে সিদ্ধ করে। এখন $\sum_{0}^{\infty} a_k x^k$ শ্রেণীটি $R(1 + \varepsilon)$ বিন্দুতে অভিসী হওয়ায় $\lim_{k\to\infty} a_k R^k (1+\varepsilon)^k = 0$।

অতএব এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m পাওয়া যাবে যে

$$|a_k| R^k (1 + \varepsilon)^k < 1, \quad \text{যখন } k > m$$

$$\Rightarrow |a_k|^{1/k} R(1 + \varepsilon) < 1, \quad \text{যখন } k > m$$

$$\Rightarrow |a_k|^{1/k} < \frac{1}{R(1+\varepsilon)}, \quad \text{যখন } k > m$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sup |a_k|^{1/k} \le \lim_{k\to\infty} \sup \frac{1}{R(1+\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} \leq \frac{1}{R(1+\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow R(1 + \varepsilon) \leq R$$

কিন্তু উপরের সিদ্ধান্তটি একটি অসংগঠিত। এতএব প্রদত্ত শ্রেণীটি $|x| > R$ হলে অভিসারী হতে পারে না। ফলে দ্বিতীয় অংশ প্রমাণিত হল।

অনুসিদ্ধান্ত :

(i) $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$ হলে ঘাত শ্রেণীটি সর্বত্র অভিসারী।

(ii) $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \infty$ হলে ঘাত শ্রেণীটি $x = 0$ ব্যতীত সর্বত্র অপসারী।

প্রমাণ :

(i) ধরি, $x_0 \neq 0$ এবং $\varepsilon = \dfrac{1}{2|x_0|}$

যেহেতু $\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0,$ এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা m পাওয়া যাবে যে

$|a_k|^{1/k} < \varepsilon,$ যখন $k > m$

বা, $|a_k x_0^k| < \dfrac{1}{2^k},$ যখন $k > m$

বা, $\sum\limits_{m+1}^{\infty} |a_k x_0^k| < \sum\limits_{m+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$

যেহেতু $\sum\limits_{m+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k}$ গুণোত্ত শ্রেণীটি অভিসারী (তুলনা পরীক্ষা থেকে পাই)।

$\sum\limits_{m+1}^{\infty} |a_k x_0^k|$ শ্রেণীটিও অভিসারী হবে। ফলে $\sum\limits_{0}^{\infty} a_k x_0^k|$ শ্রেণীটিও অভিসারী হবে।

অতএব $\sum_{0}^{\infty} a_k x_0^k$ শ্রেণীটি নিঃশর্ত অভিসারী সুতরাং অভিসারী। যেহেতু x_0 একটি ইচ্ছাধীন সংখ্যা, $\sum_{0}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণী সর্বত্র অভিসারী।

(ii) যদি সম্ভব হয়, ধরি $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণীটি $x= x_0$ বিন্দুতে অভিসারী $(x_0 \neq 0)$, তাহলে

$$\lim_{k\to\infty} a_k x_0^k = 0$$

অতএব, $\{a_k x_0^k\}_k^{\infty} = 1$ অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ এবং এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা B পাওয়া যাবে যে $|a_k x_0^k| < B$, প্রত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা k-এর জন্য।

$\therefore\ |a_k|^{1/k} < \dfrac{B^{1/k}}{|x_0|}$, প্রত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা k-এর জন্য।

$\Rightarrow \{|a_k|^{1/k}\}$ অনুক্রমটি সীমাবদ্ধ এবং এই সিদ্ধান্তটি $\limsup_{k\to\infty}(a^k)^{1/k} = \infty$ এই সিদ্ধান্তের বিরোধী।

অতএব, $\sum_{1}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণীটি $x = x_0$ বিন্দুতে অপসারী। যেহেতু x_0 একটি ইচ্ছাধীন অশূন্য বাস্তব সংখ্যা, অতএব $\sum_{1}^{\infty} a_k x^k$ শ্রেণীটি $x = 0$ ব্যতীত সর্বত্র অপসারী।

উদাহরণ : $\dfrac{1}{3} - x + \dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{x^4}{3^4} - x^5 + \ldots$

ঘাত শ্রেণীটির অভিসরণের অন্তরাল নির্ণয় করুন।

ধরি, প্রদত্ত শ্রেণীটি $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

তাহলে, $a_0 = \frac{1}{3,} a_1 = -1, a_2 = \frac{1}{3^2}, a_3 = -1, a_4 = \frac{1}{3^4}$

অতএব, $|a_0| = \frac{1}{3,} |a_1| = -1, |a_2| = \frac{1}{3^2}, |a_3| = 1, |a_4| = \frac{1}{3^4}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sup(|a_k|)^{1/k} = 1 > 0$

অতএব প্রদত্ত শ্রেণীটি অভিসারী এবং এর অভিসরণ ব্যাসার্ধ = 1।

অতএব শ্রেণীটির অভিসরণের অন্তরাল (–1, 1)।

উপপাদ্য 2 : ধরি, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ একটি ঘাতশ্রেণী এবং $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = l$

(i) যদি $l = 0$ হয়, তাহলে শ্রেণীটি সর্বত্র অভিসারী

(ii) যদি $0 < l < \infty$ হয়, তাহলে শ্রেণীটি $|x| < \frac{1}{l}$ অন্তরালে নিঃশর্ত অভিসারী এবং $|x| > \frac{1}{l}$ অন্তরালে অপসারী।

(iii) $l = \infty$ হলে শ্রেণীটি একমাত্র $x = 0$ বিন্দুতে অভিসারী (অর্থাৎ সর্বত্র অপসারী)।

প্রমাণ : আমরা $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k||x|^k$ এই শ্রেণীটির অভিসরণ পরীক্ষার জন্য অনুপাত পরীক্ষা প্রয়োগ করি।

ধরি, $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k||x|^k = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$

তাহলে, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} |x| = l|x|$

এবং $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k||x|^k$ শ্রেণীটি অভিসারী যখন $l|x|<1$ এবং অপসারী যখন $l|x|>1$।

(i) $l=0$ হলে, $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0|x|=0<1,\ \forall x$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}|c_k||x|^k$ শ্রেণীটি অভিসারী, $\forall x$

$\Rightarrow$ প্রদত্ত ঘাত শ্রেণীটি নিঃশর্ত অভিসারী, $\forall x$

(ii) $l|x|<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{l}$

অতএব প্রদত্ত শ্রেণীটি এক্ষেত্রে নিঃশর্ত অভিসারী।

(iii) $l|x|>1 \Rightarrow |x|>\frac{1}{l}$

এক্ষেত্রে $\sum_{k=0}^{\infty}|c_k||x|^k$ শ্রেণীটি অপসারী

এবং $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l|x|>1$

$\Rightarrow \{u_n\}_1^{\infty}$ অনুক্রমটি একটি ক্রমবর্ধমান অনুক্রম

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|c_n||x|^n\neq 0 \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty}c_nx^n\neq 0$

অতএব প্রদত্ত শ্রেণীটি অপসারী।

উদাহরণ : নিম্নলিখিত ঘাত শ্রেণীগুলির অভিসরণের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

1. $1-\frac{2^2}{3^2}x+\frac{2^2.4^2}{3^2.5^2}x^2-\frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2}x^3+\ldots$

2. $1-\frac{x}{1.2}+x^2-\frac{x^3}{2.4}+x^4-\frac{x^5}{4.8}+\ldots$

3. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}(x+1)^k$

3. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)(k+2)}(x-2)^k$

সমাধান :

1. প্রদত্ত শ্রেণীটিকে $\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k$ আকারে লিখে পাই

$$c_0=1,\ c_k=(-1)^k\frac{2^2.4^2.6^2\ldots(2k)^2}{3^2.5^2.7^2\ldots(2k+1)^2},\qquad k=1,2,3,\ldots$$

অতএব $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+3}\right)^2=1$

$\Rightarrow$ প্রদত্ত শ্রেণীটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ = 1

2. ধরি প্রদত্ত শ্রেণীটি $\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$

তাহলে $a_0=1,\ a_1=-\frac{1}{1\cdot 2},\ a_2=1,\ a_3=-\frac{1}{2\cdot 4},\ldots$

অতএব $|a_0|=1,\ |a_1|=\frac{1}{1\cdot 2},\qquad |a_2|=1,\ |a_3|=\frac{1}{2\cdot 4}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sup(a_k)^{1/k}=1$

অতএব প্রদত্ত শ্রেণীটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ = 1।

3. $x + 1 = u$ এবং $\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = c_k$ বসিয়ে পাই $\sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k$ আকারে লিখুন।

তাহলে, $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$।

অতএব অভিসরণের ব্যাসার্ধ = 1.

যেহেতু $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} u^k$ শ্রেণীটি $u = 1$ বিন্দুতে অভিসারী এবং $u = -1$ বিন্দুতে অপসারী (প্রমাণ করুন)।

অতএব উক্ত শ্রেণীটি $-1 < u \leq 1$ অন্তরালে অভিসারী।

ফলে প্রদত্ত শ্রেণীটি $-2 < u \leq 0$ অন্তরালে অভিসারী।

4. $x - 2 = u$ বসিয়ে উদাহরণ 3-এ বর্ণিত পদ্ধতি অনুযায়ী নিজে করুন। এখানেও অভিসরণের ব্যাসার্ধ 1।

11.5.3 ঘাত শ্রেণীর সম-অভিসরণ (Uniform Convergence of Power Series)

উপপাদ্য : ধরি, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ একটি ঘাতশ্রেণী এবং

(i) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R} > 0$

(ii) $0 < S < R$

তাহলে $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণীটি $-S \leq x \leq S$ অন্তরালে সম-অভিসারী।

প্রমাণ : প্রথম শর্ত থেকে পাই R প্রদত্ত ঘাত শ্রেণীর অভিসরণের ব্যাসার্ধ। অতএব শ্রেণীটি $|x|<R$ অন্তরালে নিঃশর্ত অভিসারী। দ্বিতীয় শর্ত থেকে পাই S, R অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর একটি ধনাত্মক সংখ্যা। অতএব $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k s^k|$ শ্রেণীটি অভিসারী।

এখন অপেক্ষকের অসীম শ্রেণীর বায়ারস্ট্রাসের M-পরীক্ষা প্রয়োগ করা যাক

এখানে $|f_k(x)|=|a_k x^k|\le|a_k s^k|$ যখন $|x|\le s,\ M_k = a_k s^k$ বসিয়ে পাই যে

$\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ একটি ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অভিসারী শ্রেণী এবং $|f_k(x)| \le M_k$ যখন $|x| \le s$ এবং $k = 1, 2, 3, \ldots$।

অতএব $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ শ্রেণীটি $|x| \le s$ অন্তরালে সম-অভিসারী।

11.5.4 ঘাত শ্রেণীর যোগফল অপেক্ষকের সান্তত্য, এবং প্রতিপদের সমাকলন

ধরি, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ একটি ঘাতশ্রেণী যার অভিসরণের ব্যাসার্ধ R অর্থাৎ $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R} > 0$ এবং $0 < S < R$

তাহলে এই শ্রেণীটি $-S \le x \le S$ অন্তরালে সম-অভিসারী (11·5·3 পরিচ্ছেদে বর্ণিত উপপাদ্য দেখুন)। অতএব 11·4·4 পরিচ্ছেদের অনুসিদ্ধান্ত 1 অনুযায়ী এই শ্রেণীটির যোগফল অপেক্ষক $f(x)$, $-S \le x \le S$ অন্তরালে সন্তত। আবার S সংখ্যাটি $(0, R)$ অন্তরালে যদৃচ্ছ বিন্দু হওয়ায়, যোগফল অপেক্ষক $f(x)$, $-R < x < R$ অন্তরালে সন্তত হবে।

11·4·4 পরিচ্ছেদের উপপাদ্য 2 থেকে পাই যে, $[a, b]$ অন্তালটি $(-R, R)$ অন্তরালের কোন যথার্থ উপসেট্ হলে, $[a, b]$ অন্তরালে এই শ্রেণীটির প্রতিপদের সমাকলনজাত ঘাতশ্রেণীর যোগফল অপেক্ষক এবং প্রদত্ত শ্রেণীটির যোগফল অপেক্ষকের সমাকল অভিন্ন।

অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b a_k x^k dx,$ যখন $-R < a < b < R$

11.5.5 ঘাত শ্রেণীর প্রতিপদের অন্তরকলন

উপপাদ্য 1 : যদি (1) $\sum\limits_0^\infty a_k x^k$ ঘাতশ্রেণীটি $(-R, R)$ অন্তরালে অভিসারী হয় এবং

$$(2)\ f(x) = \sum_0^\infty a_k x^k,\ \text{যখন}\ -R < x < R$$

তাহলে $f(x)$ অপেক্ষকটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে অন্তরকলন যোগ্য, যখন $-R < a < b < R$

এবং $f'(x) = \sum\limits_1^\infty k a_k x^{k-1} \qquad a \le x \le b$

প্রমাণ : ধরি S, R অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর একটি ধনাত্মক সংখ্যা অর্থাৎ $0 < S < R$ এখন, $|x| \le S$ হলে $|a_n x^n| \le |a_n| S^n$।

যেহেতু প্রত্যেক ঘাতশ্রেণী তার অভিসরণের অন্তরালে নিঃশর্ত অভিসারী হয় তাই $\sum\limits_0^\infty a_n S^n$ শ্রেণীটি নিঃশর্ত অভিসারী এবং এর ফলে বায়ারস্ট্রাসের M-পরীক্ষা থেকে পাওয়া যায় যে $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ ঘাতশ্রেণীটি $[-S, S]$ অন্তরালে সম-অভিসারী।

অতএব, শ্রেণীটি $[a, b]$ অন্তরালে সম-অভিসারী হবে যদি $-S < a < b < S$ হয়।

আবার যেহেতু $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ ঘাতশ্রেণীটির প্রতিপদ $(-R, R)$ অন্তরালে সন্তত এবং অন্তরকলনযোগ্য এবং $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ শ্রেণীটি $[-S, S]$ অন্তরালে সম-অভিসারী, অতএব ঐ ঘাতশ্রেণীর যোগফল অপেক্ষক $f(x)$, $(-R, R)$ অন্তরালে সন্তত এবং অন্তরকলনযোগ্য। এখন $\sum\limits_0^\infty a_n x^n$ ঘাতশ্রেণীটির প্রতিপদের অন্তরকলন জাত ঘাতশ্রেণীটি হচ্ছে $\sum\limits_1^\infty n a_n x^{n-1}$

যেহেতু $\limsup_{n\to\infty} |na_n|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} n^{1/n} |a_n|^{1/n}$

$$= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$$

অতএব, অন্তরকলনজাত ঘাতশ্রেণী $\sum_1^\infty na_n x^{n-1}$-এর অভিসরণের অন্তরাল R এবং এটিও $[-S, S]$ অন্তরালে সম-অভিসারী হবে, অর্থাৎ শ্রেণীটি $[a, b]$ বদ্ধ অন্তরালে সম-অভিসারী যখন $-S < a < b < S$

অতএব, $f'(x) = \sum_1^\infty na_n x^{n-1}, \qquad |x| < R$

$\Rightarrow f'(x) = \sum_1^\infty na_n x^{n-1}$, যখন $a \le x \le b$ এবং $-R < -S < a < b < S < R$

উদাহরণ 2 : 11·5·5 পরিচ্ছেদের উপপাদ্য 1 প্রয়োগ করে

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$$

সমীকরণটি থেকে প্রমাণ করুন যে

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

সমাধান : যেহেতু $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$

শ্রেণীটি অভিসারী এবং এর প্রতিপদের অন্তরকলনজাত শ্রেণীটি অর্থাৎ

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

যেকোন $[-R, R]$ অন্তরালে সম-অভিসারী,

অতএব, $\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{5!}\right) - \dots$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

অর্থাৎ, $\cos x \quad = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

উদাহরণ 2 : $1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \qquad (-\infty < x < \infty)$

শ্রেণীটির মান $f(x)$ নির্ণয় না করে প্রমাণ করুন যে

$$f'(x) = 2x\, f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

প্রমাণ : প্রদত্ত শ্রেণীটি অভিসারী

[এখানে $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2}{n+1} = 0, \qquad \forall x$]

ধরি, $f(x) = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + \dots, \ -\infty < x < \infty$

ডানদিকের শ্রেণীটি অভিসারী হওয়াতে $f(x)$ অপেক্ষকটি অন্তরকলনযোগ্য এবং

$$f'(x) = 2x + 4\frac{x^3}{2!} + 6\frac{x^5}{2!} + \dots$$

$$= 2x\left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \dots\right) = 2x\, f(x)$$

উপপাদ্য 2 : যদি (1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণীটি $|x| < R$ অন্তরালে অভিসারী হয়

এবং (2) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad -R < x < R$

তাহলে, $f^m(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k(k-1)\dots(k-m+1) a_k x^{k-m}$

এবং $f^m(0) = m!\, a_m \qquad (m = 0, 1, 2, \dots)$

প্রমাণ : এখানে $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণিটি অভিসারী হওয়ায় এটির প্রতিপদের অন্তরকলন দ্বারা প্রাপ্ত ঘাতশ্রেণিটির যোগফল এর যোগফল অপেক্ষকের অন্তরকলজের সমান হবে। অর্থাৎ

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \qquad -R < x < R$$

ডানদিকের অন্তরকলনজাত শ্রেণিটি, $(-R, R)$ অন্তরালে অভিসারী। অতএব উপরের সমীকরণটিকে আবার অন্তরকলন করা যায় এবং আমরা পাই

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \qquad -R < x < R$$

এরকম করে m সংখ্যক বার অন্তরকলন করে পাওয়া যাবে

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-m+1) a_k x^{k-m}$$

অতএব, $f^{(m)}(0) = m! a_m \qquad (m = 0, 1, 2, ...)$

অর্থাৎ, $a_m = \dfrac{1}{m!} f^{(m)}(0)$

মন্তব্য : প্রদত্ত ঘাতশ্রেণিটির সহগগুলির এই উপপাদ্যে প্রাপ্ত মান বসিয়ে পাই

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{ki} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{k^k}{k!}$$

এখন, $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^k(0)}{k!} x^k$ ঘাতশ্রেণিটিকে $f(x)$ অপেক্ষকের ম্যাক্‌লরিন শ্রেণি বলা হয়। অর্থাৎ যদি

$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_k x^k \quad (-R < x < R)$ হয়, তাহলে এই ঘাতশ্রেণিটি অপেক্ষকটির ম্যাক্‌লরিন শ্রেণি হবে।

উপপাদ্য 3 : আবেলের উপপাদ্য

যদি (1) $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ ঘাতশ্রেণিটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ R হয়

(2) $\sum_{0}^{\infty} a^n x^n = f(x),$ $\qquad -R < x < R,$

এবং (3) $\sum_{0}^{\infty} a_n R^n$ সাংখ্যিক শ্রেণিটি অভিসারী হয়, তাহলে $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{x \to R-} f(x)$

প্রমাণ : আমরা দেখাবো যে ঘাত শ্রেণিটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ $R = 1$ নিলেও সাধারণত্বের কোনো হানি হবে না (No loss of generality)। $x = Ry$ বসিয়ে পাই,

$$\sum a_n x^n = \sum a_n R^n y^n = \sum b_n y^n, \qquad b_n = a_n R^n$$

এখন, $\sum_{0}^{\infty} b_n y^n$ ঘাতশ্রেণিটির অভিসরম ব্যাসার্ধ R' হলে

$$R' = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left|a_n R^n\right|^{1/n}} = \frac{1}{R \lim\limits_{n\to\infty} \left|a_n\right|^{1/n}} = \frac{R}{R} = 1$$

তাহলে আমাদের প্রমাণ করতে হবে যে

যদি (1) $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ ঘাতশ্রেণিটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ 1 হয়

(2) $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = f(x),$ $\qquad -1 < x < 1$

এবং (3) $\sum_{0}^{\infty} a_n$ শ্রেণিটি অভিসারী হয়, তাহলে $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n$

প্রমাণ : ধরি, $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, $S_{-1} = 0$

এবং $\sum_0^{\infty} a_n = S$

তাহলে, $\sum_0^{m} a_n x^n$

$$= \sum_{n=0}^{m} (S_n - S_{n-1}) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} S_n x^n + S_m x^m - x \sum_{n=0}^{m} S_{n-1} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} S_n x^n - x \sum_{p=o}^{m-1} S_p x^p + S_m x^m \qquad [\text{ যেহেতু } S_{-1} = 0]$$

$$= (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} S_n x^n + S_m x^m$$

অর্থাৎ $\sum_{n=0}^{m} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{m-1} S_n x^n + S_m x^m$

এখন m কে অসীমে অপসৃত করে পাই,

[যেহেতু $|x| < 1, S_m \to S$ এবং $x^m \to 0$]

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

অর্থাৎ $f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$ যখন $0 < x < 1$ (1)

আবার, যেহেতু $S_n \to S$ যখন $n \to \infty$, কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা N পাওয়া যাবে যে

$$|S_n - S| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{যখন } n \geq N \tag{2}$$

অধিকন্তু, $(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1, \ |x| < 1$ (3)

অতএব, যখন $n \geq N$ এবং $0 < x < 1$

$$|f(x) - S| = \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n - S\right| \qquad \text{((1) ব্যবহার করে)}$$

$$= \left|(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(S_n - S)x^n\right| \qquad \text{((3) ব্যবহার করে)}$$

$$\leq (1-x)\sum_{n=0}^{N}(S_n - S)x^n + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \quad \text{((2) ব্যবহার করে)}$$

$$\leq (1-x)\sum_{n=0}^{N}(S_n - S)x^n + \frac{\varepsilon}{2}$$

কিন্তু N একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হলে $(1-x)\sum_{n=0}^{N}(S_n - S)x^n$ একটি ধনাত্মক সন্নত অপেক্ষক, $x = 1$ বিন্দুতে যার মান শূন্য। এতএব এমন একটি ধনাত্মক সংখ্যা δ পাওয়া যাবে যে

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N}|S_n - S|x^n < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{যখন } 1-\delta < x < 1$$

$$\therefore |f(x) - S| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad \text{যখন } 1-\delta < x < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1-0} f(x) = S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

মন্তব্য 1 ঃ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ ঘাতশ্রেণীটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ R এবং $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ শ্রেণীটিও অভিসারী। অতএব সম-অভিসরণের আবেলের পরীক্ষা অনুসারে $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ঘাতশ্রেণীটি $[-R+\varepsilon, R]$ অন্তরালে সম-অভিসারী।

মন্তব্য 2 : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ঘাতশ্রেণিটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ R এবং $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^n$ শ্রেণিটি অভিসারী হলে $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ঘাতশ্রেণিটি $[-R, R-\varepsilon]$ অন্তরালে সম-অভিসারী।

মন্তব্য 3 : যেহেতু কোনো ঘাতশ্রেণির অভিসরণ ব্যাসার্ধ R হলে, এর যোগফল অপেক্ষক $(-R, R)$ অন্তরালে সন্তত হয়, অতএব আবেলের পরীক্ষা থেকে পাওয়া যায়, যোগফল অপেক্ষকটি $(-R, R)$ অন্তরালে সন্তত হবে।

উদাহরণ : দেখান যে

(i) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad -1 \le x \le 1$

(ii) $\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

সমাধান : আমরা জানি যে

(1) $(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, \qquad |x| > 1$

ডানদিকের ঘাতশ্রেণিটি অভিসারী যখন $|x| < 1$ এবং $(-1, 1)$ অন্তরালে এটি নিঃশর্ত অভিসারী এবং (–R, R) বন্ধ অন্তরালে সম-অভিসারী যখন $|R| < 1$। এই শ্রেণিটির প্রতিপদের সমাকলন করে প্রাপ্ত ঘাতশ্রেণিটিও $(-1, 1)$ অন্তরালে নিঃশর্ত অভিসারী এবং $[-R, R]$ অন্তরালে সম-অভিসারী হবে, যখন $|R| < 1$।

(1) সমীকরণটির উভয়পক্ষে সমাকলন করে পাই

$$\tan^{-1} x = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad |x| < 1$$

যেখান c একটি সমাকলন ধ্রুবক।

উভয় পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই $c = 0$

অতএব

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad |x| < 1$$

এখন ডানদিকে 1 বসিয়ে প্রাপ্ত শ্রেণিটি হচ্ছে

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$$

এটি একটি একান্তর শ্রেণি। লীবনিৎসের পরীক্ষা প্রয়োগে দেখা যাচ্ছে এটি একটি অভিসারী শ্রেণি। অতএব,

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

শ্রেণিটি $x = 1$ বিন্দুতে অভিসারী, অনুরূপভাবে দেখানো যায় এটি $x = -1$ বিন্দুতেও অভিসারী। অতএব আবেলের উপপাদ্য অনুযায়ী এই শ্রেণিটি $[-1, 1]$ অন্তরালে সম-অভিসারী। এর ফলে আমরা লিখতে পারি যে,

$$\tan^{-1} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots, \qquad |x| \leq 1$$

$x = 1$ বিন্দুতে (আবেলের উপপাদ্য প্রয়োগ করে)

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = \lim_{x\to 1-} \tan^{-1} x = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

উপপাদ্য 4 : দুটি অভিসারী ঘাত শ্রেণির যোগফল এবং গুণফল যদি

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x), \qquad |x| < R$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = g(x), \qquad |x| < r$

এবং $c_n = a_n + b_n, \qquad d_n = a_0 b_n + a_1 b_n - 1 + \ldots + a_n b_0$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

তাহলে $f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad |x| < S$

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \qquad |x| < S$$

যেখানে, $S = \min\{r, R\}$

(প্রমাণ বর্জিত হল।)

উদাহরণ : দেখান যে

$$\frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{x^6}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) + \cdots, \quad -1 < x \le 1$$

সমাধান : আমরা জানি যে

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad -1 \le x < 1$$

এবং $(1+ x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, -1 < x < 1$

যেহেতু উভয় ঘাতশ্রেণিই $-1 < x < 1$ অন্তরালে নিঃশর্ত অভিসারী, অতএব এদের গুণফলের শ্রেণিটিও $-1 < x < 1$ অন্তরালে নিঃশর্ত অভিসারী হবে এবং

$$\tan^{-1} x.(1+x^2)^{-1} = x - \left(1+\frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)x^5 - \cdots, \quad -1 < x < 1$$

উভয় পক্ষের সমাকলন করে পাই

$$\frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 = c + \frac{x^2}{2} - \left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} + \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{6} - \cdots, \qquad -1 < x < 1$$

$x = 0$ বসিয়ে পাই, $c = 0$

অতএব

$$\frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 = \frac{x^2}{2} - \left(1+\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} + \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\frac{x^6}{6} - \cdots, \quad -1 < x < 1$$

যেহেতু ডানদিকের শ্রেণিটিতে $x = 1$ বসিয়ে প্রাপ্ত শ্রেণিটি অভিসারী (প্রমাণ করুন), অতএব আবেলের উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই

$$\frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{x^6}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) - \cdots, \quad -1 < x \le 1$$

উপপাদ্য 5 : অনন্যতা উপপাদ্য (Uniqueness Theorem)

যদি, (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x), \; -R < x < R, R > 0$

এবং (2) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = f(x), \quad -R < x < R, \; R > 0$

তাহলে $a_n = b_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots$

প্রমাণ : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

এবং $f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots b_n x^n + \ldots$

$$-R < x < R$$

$x = 0$ বসিয়ে পাই,

$$f(0) = a_0 = b_0$$

উভয় শ্রেণির প্রতিপদের অন্তরকলন করে পাই

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \quad , \qquad |x| < R$$

$$f'(x) = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \cdots \quad , \qquad |x| < R$$

$x = 0$ বসিয়ে পাই, $f'(0) = a_1 = b_1$

আবার অন্তরকলন করে পাই

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots \qquad |x| < R$$

$$f''(x) = 2b_2 + 6b_3 x + \cdots \qquad |x| < R$$

$x = 0$ বসিয়ে পাই

$f''(o) = 2a_2 = 2b_2 \Rightarrow a_2 = b_2$

অনুরূপভাবে অগ্রসর হয়ে দেখান যায় যে $a_n = b_n, \; n = 0, 1, 2 \ldots$

উদাহরণ :

ধরি, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ শ্রেণিটির যোগফল অপেক্ষক $f(x)$ যখন $|x| < R$

যদি $f(x)+f(-x)=0, \forall x \in(-R, R)$ হয়, তাহলে প্রমাণ করুন যে

$a_n = 0$ যখন n যুগ্ম ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা।

প্রমাণ : প্রদত্ত শর্তানুসারে $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x|<R$

অতএব $f(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n, \qquad |x|<R$

আবার $f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow$

$f(x) = -f(-x) \qquad \forall x \in(-R, R)$

অর্থাৎ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ এবং $-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n x^n$

শ্রেণি দুটির যোগফল-অপেক্ষক অভিন্ন যখন $-R < x < R$

অতএব $a_n = (-1)\ n{+}1\ a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$

$\Rightarrow a_n = 0,$ যখন $n = 2m,\ m = 0, 1, 2 \ldots\ldots\ldots$

অর্থাৎ n যুগ্ম সংখ্যা হলে $a_n = 0$।

11.6 দৃষ্টান্তমূলক উদাহরণাবলী

1. $\sin^{-1} x=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-t^2}}$ সমীকরণটি থেকে দেখান যে

$\sin^{-1}x$-এর ঘাতশ্রেণিটি হচ্ছে

$$x+\frac{1}{2} \frac{x^3}{3}+\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5}+\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7}+\ldots, \qquad |x|<1$$

প্রমাণ করুন যে এই বিস্তৃতি $|x|=1$ বিন্দু দুটিতেও বৈধ।

সমাধান : $\dfrac{1}{\sqrt{1-1^2}}$ অপেক্ষকটিকে দ্বিপদ-উপপাদ্য প্রয়োগে বিস্তৃত করে পাই

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot 3}{4}t^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6+\cdots \quad |t|>1$$

এখানে $u_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}t^{2n}$

অতএব $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}\cdot\dfrac{1}{t^2}$

$$= \frac{2n+2}{(2n+1)}t^{-2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_n+1} = \frac{1}{t^2}$$

কাজেই, দ্য-অ্যালেমবার্টের অনুপাত পরীক্ষা থেকে পাওয়া যাচ্ছে যে, শ্রেণিটি $|t|>1$ নিঃশর্ত অভিসারী।

আবার $t^2 = 1$ হলে

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_n}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1}-1\right) = \frac{1}{2}<1$$

অতএব রাবে (*Raabe's*)-র পরীক্ষা প্রয়োগ করে পাচ্ছি যে বিস্তৃতি $t = \pm 1$ বিন্দু দুটিতে বৈধ নয়।

$\therefore$ অসীম শ্রেণিটির অভিসরণের অন্তরাল হল $(-1,1)$। আমরা তাই এই শ্রেণিটিকে $[0,x]$ বদ্ধ অন্তরালে সমাকলন করতে পারি, যেখানে $-1 < x < 1$

অতএব $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^x \frac{1}{2}\,dt + \int_0^x \frac{1}{2}.t^2 dt + \int_0^x \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}t^4 dt + \int_0^x \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}t^6 dt+\cdots$

$$\Rightarrow \sin^{-1}x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots, \quad -1 < x < 1$$

$x = 1$ বসিয়ে, প্রতিপদের সমাকলনজাত শ্রেণিটির n তম পদ পাই

$$u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2.4.6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n(2n+2)}\frac{1}{2n+3}$$

কাজেই $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\dfrac{1}{2n+1}\,\dfrac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n)(2n+)(2n+3)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)(2n+1)}$

$$= \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} \to 1, \qquad \text{যখন} \quad n \to \infty$$

আবার, $n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n.\dfrac{6n+5}{(2n+1)^2} = \dfrac{6+\dfrac{5}{n}}{\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^2} \to \dfrac{3}{2} > 1,$ যখন $n \to \infty$

অতএব, $x = 1$ বিন্দুতে শ্রেণিটি অভিসারী।

$x = -1$ বিন্দুতে শ্রেণীটির প্রতিপদ $x = 1$ বিন্দুতে প্রাপ্ত শ্রেণীর প্রতিপদের বিপরীত চিহ্ন যুক্ত। ফলে $x = -1$ বিন্দুতেও শ্রেণিটি অভিসারী হবে।

অতএব $\sin^{-1}x$-এর বিস্তৃতিটি $|x| = 1$ বিন্দু দুটিতেও বৈধ।

2. দেখান যে, $\int_0^x \frac{\sin^{-1}x}{x}dx$ সমাকলটিকে আমরা $sin^{-1}x$-এর বিস্তৃতিটি প্রতিস্থাপন করে, $|x| < 1$ অন্তরালে, প্রতিপদের সমাকলন করতে পারি, আরো দেখান যে

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1}x}{x}dx = \sum_0^\infty \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4..2n}\,\frac{1}{(2n+1)^2}$$

অতঃপর $\dfrac{\sin^{-1}x}{x}$ অপেক্ষকটিকে আংশিক পদ্ধতিতে সমাকলন করে দেখান যে ডানদিকের অসীম শ্রেণিটি

$$\int_0^1 \frac{|\log x|}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

সমাকলটিরও মান।

সমাধান ঃ উদাহরণ 1 থেকে পাই

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots -1 < x < 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^{-1} x}{x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^6}{7} + \ldots\ldots \quad -1 < x < 1$$

ডানদিকের ঘাতশ্রেণীটির অভিসরণের অন্তরাল হল (–1,1) আমরা তাই এই শ্রেণীটিকে [0,x] বদ্ধ অন্তরালে সমাকলন করতে পারি, যেখানে $-1< x <1$। আবার যেহেতু, $\frac{\sin^{-1}}{x}$ অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতে দূরীকরণযোগ্য অসান্তত্য আছে তাই $\int_0^x \frac{\sin^{-1} x}{x} dx$ সমাকলটি যথার্থ সমাকল। ফলে

$$\int_0^x \frac{\sin^{-1} x}{x} dx = \int_0^x 1 dx + \int_0^x \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} dx + \int_0^x \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^4}{5} dx + \ldots\ldots, \quad -1 < x < 1$$

$$= x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{(3)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{(5)^2} + \ldots\ldots, \quad -1 < x < 1$$

$$= \sum_0^\infty \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \frac{1}{(2n+1)^2} x^{2n+1}, \; -1< x < 1$$

ডানদিকের ঘাতশ্রেণীটিতে $x = 1$ বসিয়ে নিচের সাংখ্যিক শ্রেণীটি

$$\sum_0^\infty \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

পাওয়া যায়। 'রাবে'র পরীক্ষা প্রয়োগ করে পাই

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \to \infty} n \left[\frac{(2n+3)^2 (2n+2)}{(2n+1)^3} - 1 \right] = \frac{5}{2} > 1$$

অতএব $x = 1$ বিন্দুতে ঘাতশ্রেণীটি অভিসারী।

কাজেই আবেলের উপপাদ্য থেকে পাই

$$\lim_{x \to 1-} \int_0^x \frac{\sin^{-1} x}{x} dx = \sum_0^\infty \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

বা, $$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{x}\,dx = \sum_0^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6..2n}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{x}\,dx = [\sin^{-1} x\log x]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\log x\,dx \qquad (1)$$

এখন, $\lim\limits_{x\to 0+} \sin^{-1} x\log x$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \theta\log\sin\theta = \lim_{\theta\to 0+} \frac{\log\sin\theta}{\frac{1}{\theta}} \qquad \left(\text{আকার } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{\theta\to 0+} \frac{\cot\theta}{-\frac{1}{\theta^2}} = -\lim_{0\to 0+} \theta^2\cot\theta$$

$$= -\lim_{\theta\to 0+} \frac{\theta}{\sin\theta}.\theta.\cos\theta$$

$$= -\lim_{\theta\to 0+} \frac{\theta}{\sin\theta}.\lim_{0\to 0+}\theta.\lim_{0\to 0+}\cos\theta$$

$$= 0$$

অতএব $$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{x}\,dx = -\int_0^1 \frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^1 \frac{|\log x|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

ফলে, $$\int_0^1 \frac{|\log x|}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{x}\,dx = \sum_0^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6..2n}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (1)$

ধরে নিয়ে দেখান যে

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

সমাধান : (1) থেকে পাই $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$ যখন $x \neq 0$

আবার, যেহেতু $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

আমরা $\frac{\sin x}{x}$ অপেক্ষকটির $x = 0$ বিন্দুতে মান 1 সংজ্ঞিত করতে পারি। তাহলে লেখা যায়

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots$$

এই শ্রেণিটি x-এর সব মানের জন্য অভিসারী। তাই যে-কোনো বদ্ধ অন্তরালে ঘাত-শ্রেণিটির প্রতিপদের সমাকলন করা সম্ভব এবং প্রতিপদের সমাকলনজাত শ্রেণিটির যোগফল অপেক্ষক হবে ঐ অন্তরালে মূল শ্রেণিটির যোগফল অপেক্ষকের সমাকল।

অতএব $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^x 1 \cdot dt - \int_0^x \frac{t^2}{3!} dt + \int_0^x \frac{t^4}{5!} dt - \int_0^x \frac{t^6}{7!} dt + \cdots$

$$= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots$$

ডানদিকের শ্রেণিটিকে $\sum_0^{\infty} a_n$ আকারে লিখে পাই

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$$

অতএব $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)(2n+1)!} \frac{(2n-1)(2n-1)!}{|x^{2n-1}|}$

$$= \frac{2n-1}{2n+1} \frac{1}{(2n+1)2n} |x|^2$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0, \quad \forall x$$

অর্থাৎ, সমাকলনজাত শ্রেণিটি x-এর সব মানের জন্য অভিসারী।

4 : প্রমাণ করুন যে, $\int_0^x \frac{du}{1+u^n} = x - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \cdots$

$-1 < x \le 1,\ n > 0$

এবং $n = 2$ বসিয়ে দেখান যে

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad -1 \le x \le 1$$

প্রমাণ : $\frac{1}{1+u^n} = (1+u^n)^{-1} = 1 - u^n + u^{2n} - u^{3n} + \ldots.$

এটি একটি গুণোত্তর শ্রেণি। এর অভিসরণের অন্তরাল হচ্ছে

$-1 < u^n < 1$ অর্থাৎ $-1 < u < 1$

অতএব $(-1,\ 1)$ অন্তরালের অন্তর্গত যে-কোনো বদ্ধ অন্তরালে এই শ্রেণিটির প্রতিপদের সমাকলন করা সম্ভব। তাই

$$\int_0^x \frac{du}{1+u^n} = \int_0^x 1.\,du - \int_0^x u^n dx + \int_0^x u^{2n} dx - \int_0^x u^{3n} dx + \cdots$$

$-1 < x < 1$

অর্থাৎ $\int_0^x \frac{du}{1+u^n} = x - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \cdots$

$-1 < x < 1, \qquad n > 0$

ডানদিকের ঘাত শ্রেণিটিতে $x = 1$ বসিয়ে

$$1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{3n+1} + \cdots$$

সাংখ্যিক শ্রেণিটি পাওয়া যায়। যার সাধারণ পদ হচ্ছে

$$u_k = (-1)^{k-1} \frac{1}{kn+1}$$

এটি একটি একান্তর শ্রেণি। $\left\{|u_k|\right._{k=0}^{\infty}$ অনুক্রমটি ক্রমহ্রাসমান এবং $\lim\limits_{k\to\infty}|u_k| = 0$ অতএব লীবনিৎসের পরীক্ষা অনুযায়ী পাওয়া যাচ্ছে যে, উপরের সাংখ্যিক শ্রেণিটি অভিসারী। অর্থাৎ সমাকলনজাত শ্রেণিটির অভিসরণের অন্তরাল $-1 < x \le 1$

তাই, $\int_0^x \frac{du}{1+u^n} = x - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{3n+1}}{3n+1} + \cdots, \qquad -1 < x \le 1,\ n > 0$

দ্বিতীয় অংশ :

উভয় পার্শ্বে $n = 2$ বসিয়ে পাই

$$\int_0^x \frac{dx}{1+u^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad -1 < x \le 1$$

এখন ডানদিকের শ্রেণিটিতে $x = -1$ বসিয়ে প্রাপ্ত সাংখ্যিক শ্রেণিটি হচ্ছে

$$-\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

লীবনিৎসের পরীক্ষা প্রয়োগে দেখা যাচ্ছে যে, এটি একটি অভিসারী শ্রেণি। অতএব সমাকলনজাত শ্রেণিটির অভিসরণের অন্তরাল $-1 \le x \le 1$

অতএব

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad -1 \le x \le 1$$

5. $$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

ঘাতশ্রেণিটির অভিসরণের অন্তরালে যোগফল $log(1+x)$ ধরে নিয়ে দেখান যে

$$\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3.4} - \cdots = 2\log 2 - 1$$

সমাধান : $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

শ্রেণিটির অভিসরণের অন্তরাল $\qquad 1 < x \le 1$

অতএব $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots \qquad -1 < x \le 1$

এখন, যদি $[0, h]$, $-1 < x < 1$ অন্তরালের অন্তর্গত একটি বদ্ধ অন্তরাল হয় তাহলে

$$\int_0^h \log(1+x)dx = \int_0^h x dx - \int_0^h \frac{x^2}{2}dx + \int_0^h \frac{x^3}{3}dx - \int_0^h \frac{x^4}{4}dx + \cdots \qquad -1 < h < 1$$

অর্থাৎ, $(1+h)\log(1+h) - \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log(1+\varepsilon) - h$

$$= \frac{h^2}{1\cdot 2} - \frac{h^3}{2\cdot 3} + \frac{h^4}{3\cdot 4} - \frac{h^5}{4\cdot 5} + \cdots, \qquad -1 < h < 1$$

কিন্তু $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log(1+\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\log(1+\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon}}$ $\qquad$ ($\frac{\infty}{\infty}$ আকার)

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{1}{1+\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon} = 0$$

অতএব $(1+h)\log(1+h) - h = \dfrac{h^2}{1\cdot 2} - \dfrac{h^3}{2\cdot 3} + \dfrac{h^4}{3\cdot 4} - \dfrac{h^5}{4\cdot 5} + \cdots, \qquad -1 < h < 1$

সমাকলনজাত শ্রেণিটিতে $h = 1$ বসিয়ে পাই

$$\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$$

এই সাংখ্যিক শ্রেণিটি অভিসারী। অর্থাৎ সমাকলনজাত শ্রেণিটি $h = 1$ বিন্দুতেও অভিসারী। অতএব আবেলের উপপাদ্য থেকে পাই।

$$\lim_{h \to 1-} [(1+h)\log(1+h) - h] = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots$$

অর্থাৎ $\dfrac{1}{1\cdot 2} - \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} - \dfrac{1}{4\cdot 5} + \cdots = 2\log 2 - 1$

6 : ধরি, $-\infty < x < \infty$ অন্তরালে

$a_0 + a_1x + a_2 x^2 + \ldots$ ঘাতশ্রেণীটির যোগফল অপেক্ষক $f(x)$।

যদি $-\infty < x < \infty$ অন্তরালে $f'(x) = f(x)$ হয় এবং $f(0) = 1$ হয়, তবে প্রমাণ করুন যে

$$a_n = \frac{1}{n!}, n = 1,2,3 \ldots\ldots..$$

প্রমাণ : প্রদত্ত

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \ldots, \qquad -\infty < x < \infty$$

উভয় পক্ষে অন্তরকলন করে পাই

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots, \qquad -\infty < x < \infty$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে $\quad f'(x) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty$

অতএব অনন্যতা উপপাদ্য থেকে পাই

$$a_1 = a_0$$
$$2a_2 = a_1$$
$$3a_3 = a_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$na_n = a^{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

অর্থাৎ $\quad a_n = \frac{1}{n}a_{n-1}$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}a_{n-2}$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\frac{1}{n-2}\cdots\frac{1}{2}a_1$$

$$= \frac{1}{n!}a_0 \qquad \text{[যেহেতু } a_1 = a_0\text{]}$$

যেহেতু $f(0) = 1$, অতএব $a_0 = 1$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}$$

11.7 সারাংশ

A. সাংখ্যিক শ্রেণি :

সংজ্ঞা :

ধরি, $\sum_{1}^{\infty} u_k$ একটি অসীম শ্রেণি এবং $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, \quad n = 1,2,\ldots$ উক্ত শ্রেণিটির প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল। যদি $\{S_n\}_1^{\infty}$ অনুক্রমটি অভিসারী হয়, তাহলে $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ শ্রেণিটি অভিসারী হবে।

কোনো অসীম শ্রেণি অভিসারী না হলে, শ্রেণিটিকে অপসারী বলা হবে।

অভিসরণের প্রয়োজনীয় শর্ত :

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \text{ একটি অভিসারী শ্রেণি হলে } \lim_{k\to\infty} u_k = 0$$

কোশি নির্ধারক :

কোন অসীম শ্রেণি $\sum_{1}^{\infty} u_k$ অভিসারী হবে, যদি এবং একমাত্র যদি, কোনো ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর অনুষঙ্গী এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা $N(\varepsilon)$ পাওয়া যায় যে

$$\left|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}\right| < \varepsilon \text{ যখন } \quad n \geq N(\varepsilon) \text{ এবং } p \geq 1$$

ধনাত্মক পদ বিশিষ্ট অসীম শ্রেণির অভিসরণের তুলনা পরীক্ষা :

যদি $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ এবং $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ এমন দুটি ধনাত্মক পদ বিশিষ্ট অসীম শ্রেণি হয়, যে $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ (যেখানে $l \neq 0$), একটি সসীম সংখ্যা হয়, তাহলে $\sum_{1}^{\infty} u_k$ এবং $\sum_{k=1}^{\infty} V_k$ যুগপৎ অভিসারী অথবা অপসারী হবে।

প্রথম তুলনা শ্রেণি, গুণোত্তর শ্রেণি :

$\sum_{0}^{\infty} r^k$ অসীম শ্রেণিটি $|r| < 1$ হলে অভিসারী এবং $|r| \geq 1$ হলে অপসারী হবে।

দ্বিতীয় তুলনা শ্রেণি : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ অসীম শ্রেণিটি $p > 1$ হলে অভিসারী এবং $p \leq 1$ হলে অপসারী হবে।

অভিসরণের অন্যান্য পরীক্ষা :

1. কোশির সমাকল পরীক্ষা :

$u(x)$ একটি অঋণাত্মক, ক্রম হ্রাসমান, সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক হলে অযথার্থ সমাকল $\int_1^{\infty} u(x)dx$ এবং অসীম শ্রেণি $\sum_{1}^{\infty} u_n$ যুগপৎ অভিসারী অথবা অপসারী হবে।

2. দ্য-আলেম্‌বার্টের অনুপাত পরীক্ষা :

যদি $\sum u_n$ এমন একটি ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণি হয়, যে

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

তাহলে শ্রেণিটি

(i) অভিসারী হবে, যখন $l < 1$

(ii) অপসারী হবে, যখন $l > 1$

(iii) পরীক্ষাটি ব্যর্থ, যখন $l = 1$

3. কোশির বীজ পরীক্ষা :

যদি $\sum u_n$ এমন একটি ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণি হয়, যে

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 1$$

তাহলে শ্রেণিটি (*i*) অভিসারী হবে, যখন $l < 1$

(*ii*) অপসারী হবে, যখন $l > 1$

(*iii*) $l = 1$ হলে পরীক্ষাটি থেকে শ্রেণিটির অভিসরণ বা অপসরণ নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

4. রাবের পরীক্ষা (Raabe's Test) :

যদি $\sum_1^\infty u_n$ এমন একটি ধনাত্মক পদবিশিষ্ট অসীম শ্রেণি হয়, যে

$\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right\} = l$ হয়, তাহলে শ্রেণিটি অভিসারী হবে যখন $l > 1$ এবং অপসারী হবে যখন $l < 1$। $l = 1$ হলে পরীক্ষাটি থেকে শ্রেণিটির অভিসরণ বা অপসরণ নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

একান্তর শ্রেণির অভিসরণের লীবনিৎসের পরীক্ষা :

যদি $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} u_k$ একান্তর শ্রেণিটি এমন হয় যে $\{u_k\}_k^\infty = 1$ অনুক্রমটি ক্রম হ্রাসমান এবং $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$, তাহলে উক্ত শ্রেণিটি অভিসারী হবে।

নিঃশর্ত এবং শর্তাধীন অভিসরণ :

সংজ্ঞা : $\sum_1^\infty u_n$ শ্রেণিটিকে নিঃশর্ত অভিসারী বলা হবে, যখন $\sum_1^\infty |u_n|$ শ্রেণিটি অভিসারী। নিঃশর্ত অভিসারী অসীম শ্রেণি অভিসারী হয়। আবার যদি $\sum_1^\infty |u_n|$ অসীম শ্রেণিটি অপসারী অথচ $\sum_1^\infty u_n$ শ্রেণিটি অভিসারী হয় তাহলে $\sum_1^\infty u_n$ শ্রেণিটিকে শর্তধীনভাবে অভিসারী বলা হয়।

নিঃশর্ত অভিসরণের সীমা পরীক্ষা :

যদি $\lim\limits_{n\to\infty} n^p u_n = A$ (একটি সসীম সংখ্যা) যখন $p > 1$ দারলে $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n$ শ্রেণিটি নিঃশর্তভাবে অভিসারী হবে।

অপসরণের সীমা পরীক্ষা : যদি $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = A(\neq 0)$ অথবা $A = \pm\infty$ হয়, তাহলে $\sum u_n$ অপসারী হবে। $A = 0$ হলে পরীক্ষাটি ব্যর্থ।

B. অপেক্ষকের অনুক্রম, অপেক্ষকের অসীম শ্রেণি, সম-অভিসরণ :

সংজ্ঞা :1 $[a, b]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$, অপেক্ষকগুলির অনুক্রম $[a, b]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত অপেক্ষক $f(x)$-এ অভিসারী হবে যদি $[a,b]$ অন্তরালস্থিত প্রত্যেক বিন্দু x এবং প্রত্যেক ধনাত্মক সংখ্যা ε-এর জন্য এমন একটি ধনাত্মক অখন্ড সংক্যা $N \equiv N(\varepsilon,x)$ পাওয়া যায় যে

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{যখন} \qquad n < N(\varepsilon,x)$$

সংজ্ঞা : 2

$[a,b]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$, অপেক্ষকগুলির অনুক্রম $[a, b]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত অপেক্ষক $f(x)$-এ সম-অভিসারী হবে যদি কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে এমন একটি ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা $N \equiv N(\varepsilon)$ পাওয়া যায় মোট $[a,b]$ অন্তরালস্থিত x-এর উপর অনির্ভরশীল যে

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \text{ যখন } \ n < N(\varepsilon) \text{ এবং } x \in [a,b]$$

সংজ্ঞা 3 : অপেক্ষকের অসীম শ্রেণির অভিসরণ : সম-অভিসরণ :

যদি $\{f_k(x)\}_1^{\infty}$ $[a,b]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত $f_k(x)$ $(k = 1,2, ...)$ অপেক্ষকগুলির অনুক্রম হয়, তাহলে $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ শ্রেণিটিকে অপেক্ষকের অসীম শ্রেণি বলা হয়। এই শ্রেণিটি অভিসারী হবে যখন এর আংশিক যোগফলগুলির অনুক্রম

$$\left\{S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right\}_1^{\infty} \ \text{অভিসারী}$$

এই অনুক্রমটি অভিসারী হলে $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$-কে বলা হবে শ্রেণিটির যোগফল।

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ অভিসারী হলে এবং এর যোগফল $S(x)$ হলে আমরা লিখবো

$$S(x) = \sum_{1}^{\infty} f_k(x)$$

কোনে ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে যদি এমন একটি ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা $N \equiv N(\varepsilon)$ পাওয়া যায় যে, $S_n(x)$ এবং $S(x)$-এর অন্তর নিচের অসমতাটি সিদ্ধ করে।

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| < \varepsilon$$

যখন $n > N(\varepsilon)$ এবং $x \in [a,b]$

অর্থাৎ $\sup\limits_{a\le x\le b} |S(x) - S_n(x)| = \sup\limits_{a\le x\le b} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)\right| \to 0$, যখন $n \to \infty$

তাহলে $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ অসীম শ্রেণিটিকে $[a,b]$ অন্তরালে সম-অভিসারী বলা হবে।

বায়ারস্ট্রাসের M-পরীক্ষা :

অপেক্ষকের অসীম শ্রেণি $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ কোন $[a,b]$ অন্তরালে সম (এবং নিঃশর্ত) অভিসারী হবে যদি এমন একটি অভিসারী ধনাত্মক সংখ্যার শ্রেণি $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ পাওয়া যায় যে

$$|f_k(x)| \le M_k, \qquad a \le x \le b, \quad k = 1,2,.........$$

অপেক্ষকের অসীম শ্রেণির যোগফলের সান্তত্য, সমাকলন ও অন্তরকলন :

যদি $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ অসীম শ্রেণিটি $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে সম-অভিসারী হয় এবং এর পদগুলি অর্থাৎ $fk(x)$, $(k = 1,2,.......)$ ঐ অন্তরালে সন্তত হয় তাহলে অসীম শ্রেণিটির যোগফল অপেক্ষক $S(x)$ ঐ অন্তরালে সন্তত হবে।

যদি $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে সম-অভিসারী $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ অসীম শ্রেণিটি প্রতিটি পদ $[a,b]$ অন্তরালে সন্তত হয় এবং

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ হয়, তাহলে}$$

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right\} \quad dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx$$

যদি

(1) $f_k(x)$, $(k = 1,2,3,...)$ অপেক্ষকগুলির $[a,b]$ অন্তরালে সন্তত অন্তরকলজ থাকে

(2) $[a,b]$ অন্তরালে $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x)$ হয়

(3) $[a,b]$ অন্তরালে $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ সম-অভিসারী হয়, তাহলে $[a,b]$ অন্তরালে

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = f'(x)$$

অর্থাৎ $[a,b]$ অন্তরালে $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

C. ঘাতশ্রেণি

সংজ্ঞা : অভিসরণের ব্যাসার্ধ

ধরি, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ একটি ঘাতশ্রেণি এবং

$$\lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R} > 0$$

তাহলে, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণিটি অভিসারী হবে যখন $|x| < R$ এবং এটি অপসারী হবে যখন $|x| > R$, তাহলে R কে বলা হবে ঘাতশ্রেণিটির অভিসরণের ব্যাসার্ধ এবং $(-R, R)$ অন্তরালকে বলা হবে ঘাতশ্রেণিটির অভিসরণের অন্তরাল। $\frac{1}{R} = 0$ হলে, ঘাতশ্রেণিটি সর্বত্র অভিসারী (Everywhere convergent) আবার $\frac{1}{R} = \infty$ হলে ঘাতশ্রেণিটি সর্বত্র অপসারী (Nowhere convergent)।

অভিসরণের ব্যাসার্ধ নির্ণয়ের দ্বিতীয় পরীক্ষা :

ধরি, $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ একটি ঘাতশ্রেণি এবং $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{n \to \infty} = \frac{1}{R}$

(i) $R = \infty$ হলে শ্রেণিটি সর্বত্র অভিসারী।

(ii) $R = 0$ হলে শ্রেণিটি সর্বত্র অপসারী।

(iii) $0 < \frac{1}{p} < \infty$ হলে শ্রেণিটি $|x| < R$ অন্তরালে অভিসারী এবং $|x| > R$ অন্তরালে অপসারী।

ঘাতশ্রেণির সম-অভিসরণ :

ধরি, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ একটি ঘাতশ্রেণি এবং

(i) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{R} > 0$ *(ii)* $0 < S < R$ তাহলে $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণিটি $-s \le x \le s$ অন্তরালে সম-অভিসারী। অর্থাৎ কোনো ঘাতশ্রেণির অভিসরণের ব্যাসার্ধ R হলে এটি $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$ বন্ধ অন্তরালে সম-অভিসারী হবে। এখানে $\varepsilon > 0$ একটি যদৃচ্ছ সংখ্যা।

ঘাতশ্রেণির যোগফল অপেক্ষকের সান্তত্য

ধরি, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণিটি $(-R, R)$ অন্তরালে অভিসারী এবং এই অন্তরালে এর যোগফল অপেক্ষক $f(x)$, তাহলে এই অপেক্ষকটি অর্থাৎ $f(x)$ $(-R, R)$ অন্তরালে সন্তত হবে।

ঘাতশ্রেণির প্রতিপদের সমাকলন

$\sum\limits_{0}^{\infty} a_k x^k$ ঘাতশ্রেণিটির অভিসরণের অন্তরাল $(-R,R)$ এবং এই অন্তরালে শ্রেণিটির যোগফল অপেক্ষক $f(x)$ হলে, এবং $[a,b]$ $(-R,R)$ অন্তরালের কোন যথার্থ উপসেট্ হলে $[a,b]$ বদ্ধ অন্তরালে এই শ্রেণিটির প্রতিপদের সমাকলনজাত ঘাতশ্রেণিটির যোগফল অপেক্ষক এবং প্রদত্ত শ্রেণিটির যোগফল অপেক্ষকের সমাকল অভিন্ন। অর্থাৎ

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b a_k x^k dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_a^b a_k x^k dx, -R < a < b < R$$

ঘাতশ্রেণির প্রতিপদের অন্তরকলন

কোন অভিসারী ঘাতশ্রেণির অভিসরণের অন্তরালে এর প্রতিপদের অন্তরকলন সম্ভব। অর্থাৎ

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{0}^{\infty} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d}{dx}(x^k) \qquad -R < x < R$$

11.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. নিম্নলিখিত অসীম শ্রেণিগুলির অভিসরণের পরীক্ষা করুন।

(i) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^3}{3^k}$ (ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-k}}{\sqrt{k+\pi}}$

(iii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2}$ (iv) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\log k}{k^p}$

2. *(a)* দ্য-আলেমবার্টের অনুপাত পরীক্ষা, *(b)* কোশির বীজ পরীক্ষা এবং *(c)* কোশির সমাকল পরীক্ষা প্রয়োগে $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$ অসীম শ্রেণিটির অভিসরণের পরীক্ষা করুন।

3. অভিসরণের সীমা পরীক্ষা প্রয়োগ করে $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k\alpha}}{k}$ অসীম শ্রেণিটির অভিসরণ পরীক্ষা করুন।

4. দেখান যে, (*i*) $\sum_{1}^{\infty} r^n \cos nx$ এবং $\sum_{1}^{\infty} r^n \sin nx$ অসীম শ্রেণি দুটি $0 < r < 1$ হলে, x-এর সব মানের জন্য সম-অভিসারী।

5. প্রমাণ করুন যে, $\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$ অসীম শ্রেণিটি $p > 1$ হলে, x-এর সকল মানের জন্য সম-অভিসারী।

6. দেখান যে $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ অসীম শ্রেণিটি $-R \le x \le R$ অন্তরালে সম-অভিসারী।

7. প্রমাণ করুন যে, $\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} dx = e - 1$

8. মান নির্ণয় করুন $\lim_{x \to 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kx}{k(k+1)}$

9. [0,1] অন্তরালে $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$ অসীম শ্রেণিটির প্রতিপদের অন্তরকলন সম্ভব কিনা বিচার করুন।

10. $a_0 = 1, \quad a_n = (\sqrt[n]{n} + 1)^n, \quad n \ge 1$ হলে $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ ঘাতশ্রেণিটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

11. $\frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 5}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 8}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}x^4 + \ldots$ ঘাতশ্রেণিটির অভিসরণ ব্যাসার্ধ নির্ণয় করুন।

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{n^n} x^n$ ঘাতশ্রেণিটির অভিসরণের অন্তরাল নির্ণয় করুন।

13. $(1+x)^{-1}$ এবং $(1-x)^{-1}$-এর গুণোত্তর শ্রেণি দুটি ব্যবহার করে দেখান যে

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\ldots\right) \text{ যখন }, \ |x|<1$$

14. প্রমাণ করুন যে, $\int_0^1 \sin(x^2)dx = 0\cdot3103$ (আসন্ন মান)

15. দেখান যে, $\int_0^x \frac{\sinh x}{x}\, dx = x+\frac{x^3}{3\cdot3!}+\frac{x^5}{5\cdot5!}+\ldots$

[ঈঙ্গিত ঃ $\sinh x = \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}], e^x$-এর ঘাতশ্রেণি হচ্ছে

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots]$$

11.9 উত্তরমালা

1 (*i*) অভিসারী, (*ii*) অভিসারী (*iii*) অভিসারী (*iv*) অভিসারী

2. অভিসারী 3. $\alpha > 0$ হলে অভিসারী, $\alpha \leq 0$ হলে অপসারী

8. $\frac{1}{2}$ 9. সম্ভব নয় 10. $\frac{1}{2}$ 11. $\frac{3}{2}$

পাঠসহায়ক পুস্তকাবলী

1. *Advanced Calculus,* David V. Widder, Prentice Hall of India Private Limited, 2nd Edition, 1974.
2. *Methods of Real Analysis,* Richard R. Goldberg, Oxford and I.B.H. Publishing Company, Indian Edition, 1970.
3. *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals,* H. S. Carslaw, Dover Publications, Third Revised Edition, 1930.
4. *Differential and Integral Calculus,* N-Pishkunov, Peace Publishers, Moscow.
5. *Introduction to Real Anslysis,* S. K. Mapa, Asoke Prakashan, 1997.

একক 12 ❑ সীমিত পর্যায়যুক্ত সমাকলনযোগ্য অপেকের ফুরিয়ার শ্রেণি (Fourier Series of Bounded Integrable and Periodic Functions)

গঠন

12.1 প্রস্তাবনা

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots$$

অর্থাৎ $$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1}$$

আকারের অপেক্ষকের শ্রেণিকে ত্রিকোণমিতিক শ্রেণি বলা হয়।

$$\frac{a_0}{2}, a_1, b_1, a_2, b_2 \ldots, a_k, b_k, \cdots$$

প্রভৃতি ধ্রুবকগুলিকে ত্রিকোণমিতিক শ্রেণিটির সহগ বলা হয়। এই শ্রেণিটি অভিসারী হলে এর যোগফল অপেক্ষক $f(x)$ একটি 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক হবে ; কারণ $\sin kx$, $\cos kx$... অপেক্ষকগুলি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক। অতএব $f(x) = f(x + 2\pi)$ ইঞ্জিনিয়ারিং ও গাণিতিক পদার্থবিদ্যার বিভিন্ন সমস্যার সমাধানে এই ধরণের ত্রিকোণমিতিক শ্রেণির প্রয়োগ দেখা যায় তাপ-পরিবহণ (Heat-conduction)

তত্ত্বের আলোচনায় ফুরিয়ার প্রথম এই ধরণের ত্রিকোণমিতিকে শ্রেণীর প্রয়োগ করেন। তাই এই ত্রিকোণমিতিক শ্রেণীগুলিকে ফুরিয়ার শ্রেণী বলা হয়।

একটি 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$ কি কি শর্ত পালন করলে একটি অভিসারী ত্রিকোণমিতিক শ্রেণি নির্ণয় করতে পারা যায় যেটির যোগফল অপেক্ষক হবে $f(x)$, এই সমস্যাটির সমাধানই হবে এই এককটির মূল আলোচ্য বিষয়।

12.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনারা—

- ফুরিয়ার শ্রেণির সংজ্ঞা ও ফুরিয়ার সহগগুলি নির্ণয়ের পদ্ধতি জানতে পারবেন।
- ফুরিয়ার শ্রেণির অভিসরণের সমস্যা এবং দিরিক্লের শর্তাবলী প্রয়োগে এই সমস্যার সমাধান বিষয়ে সম্যক অবহিত হবেন।
- 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত এবং দিরিক্লের শর্তাবলী পালনকারী অপেক্ষকের অভিসারী ফুরিয়ার শ্রেণি নির্ণয় করতে পারবেন।

12.3 ফুরিয়ার শ্রেণির সংজ্ঞা

এই পরিচ্ছেদে কোন বাস্তব চলের অপেক্ষকে

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos kx, \sin kx, \ldots\}$

এই সেটের অপেক্ষকগুলির সাহায্যে বিস্তৃতি বিষয়ে আলোচনা করা হবে।

12.3.1 উপপাদ্য

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = 0, \quad (k,n = 0,1,2, \ldots, \quad k \neq n)$

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \begin{cases} \pi, & (n = 1,2,\ldots) \\ 2\pi, & (n = 0) \end{cases}$

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx\, dx = 0, (k,n = 1,2, \ldots, \quad k \neq n)$

(iv) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi, \qquad (n=1,2\ldots)$

(v) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx\, dx = 0, \qquad (k,n = 0,1,2, \ldots)$

প্রমাণ : নিচের ত্রিকোণমিতিক অভেদগুলি থেকে

$$\cos kx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(k-n)x + \cos(k+n)x]$$

$$\sin kx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(k-n)x - \cos(k+n)x]$$

$$\sin kx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(k+n)x + \sin(k-n)x]$$

$[-\pi,\pi]$ অন্তরালে সমাকলন করে উপপাদ্যের সিদ্ধান্তগুলি প্রমাণ করা যায়। যেমন, দ্বিতীয় অভেদটিতে $k = n$ বসিয়ে পাই

$$\sin^2 nx = \frac{1}{2}[1 - \cos 2nx]$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2nx)dx = \frac{1}{2}[\pi + \pi] = \pi$$

আবার

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \sin(k+n)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k-n)x dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(n+k)x}{n+k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(k-n)x}{k-n}\right]_{-\pi}^{\pi} (k \neq n)$$

অনুরূপভাবে অন্য সিদ্ধান্তগুলিও প্রমাণিত হবে।

12.3.2

ধরুন, $[-\pi\ \pi]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত অপেক্ষক f কে

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (-\pi \le x \le \pi) \qquad (1)$$

আকারে প্রকাশ করা যায়।

এখন (1) সমীকরণটির উভয় পক্ষকে $[-\pi\ \pi]$ অন্তরালে সমাকলন করে পাই

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx\right\}$$

অতএব (1) শ্রেণিটির প্রতি পদের সমাকলনের বৈধতা ধরি নিয়ে পাই

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \cdots \tag{2}$$

এবারে, n একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ধরে (1) সমীকরণটির উভয়পক্ষকে cosn$x$ দিয়ে গুণ করে, গুণফলকে $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সমাকলন করে পাই

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{d_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nxdx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx\right)$$

এখন 12.3.1 এর উপপাদ্য প্রয়োগ করে দেখছি ডানদিকের মাত্র একটি পদ অশূন্য। সেই পদটি হল

$$a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\,dx = \pi a_n$$

অতএব $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \pi a_n$, অর্থাৎ

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, n = 1,2,\ldots] \tag{3}$$

লক্ষ্য করুন যে (3) সমীকরণটিতে $n = 0$ বসালে সমীকরণ (2) পাওয়া যায়। এজন্য সমীকরণ (1) এর ডানদিকের প্রথম পদটি a_0 না নিয়ে $\frac{a_0}{2}$ নেওয়া হয়। অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,,\quad n = 1,2,\ \ldots. \tag{4}$$

12.3.3 সংজ্ঞা

$[-\pi, \pi]$ বদ্ধ অন্তরালে f একটি সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক হলে

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \quad (-\pi \le x \le \pi)$$

শ্রেণিটিকে f অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণি বলা হবে যদি

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad (k = 0,1,2,\ \ldots)$$

এবং $b_k = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad (k = 1,2, \ ...)$ হয়।

a_k এবং b_k সংখ্যাগুলিকে f অপেক্ষকটির ফুরিয়ার সহগ বলা হয়।

এক্ষেত্রে $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ লেখা হবে। লক্ষ্য করুন '=' প্রতীকটি ব্যবহার না করে '~' প্রতীকটি ব্যবহার করা হয়েছে। কারণ, $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য $f(x)$ অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণিটি অভিসারী কিনা অথবা এই শ্রেণিটি x এর সব মানের জন্য বা কোন বিশেষ মানের জন্য $f(x)$ অপেক্ষকের অভিসারী কিনা এখনো দেখান হয়নি।

উদাহরণ : ধরি

$$f(x) = -1, \quad -\pi \le x \le 0$$
$$= 1, \quad 0 < x \le \pi$$

তাহলে

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1dx + \int_{0}^{\pi} 1dx\right) = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\cos kxdx + \int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx\right) = 0, \quad k = 1,2,....$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin kxdx = \frac{2}{\pi k}[\cos kx]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k}[1-(-1)^k]$$

অতএব $b_k = \dfrac{4}{\pi k}$ যখন $k = 1, 3, 5,...$

$= 0$ যখন $k = 2, 4, 6, \ ...$

এবং $a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ ....$

কাজেই

$$f \sim \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right]$$

লক্ষ্যণীয় যে $x = 0$ বিন্দুতে f অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণিটির যোগফল অপেক্ষকের মান শূন্য অথচ $f\ (0) = -\ 1.$

অনুশীলনী–12.3

1. $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত কোন অপেক্ষক $f(x)$ যুগ্ম অপেক্ষক হবে যখন $f(-x) = f(x)$ $(-\pi \le x \le \pi)$। $(-\pi, \pi)$ অন্তরালে সংজ্ঞিত কোন অপেক্ষক $f(x)$ কে অযুগ্ম অপেক্ষক বলা হবে যখন $f(-x) = -f(x)$, $(-\pi \le x \le \pi)$ দেখান যে

(a) $f(x)$ যুগ্ম অপেক্ষক হলে $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$

(b) $f(x)$ অযুগ্ম অপেক্ষক হলে $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$

(c) $f(x)$ যুগ্ম এবং $g(x)$ অযুগ্ম হলে $f(x)$ $g(x)$ অযুগ্ম অপেক্ষক

(d) $f(x)$, $g(x)$ উভয়েই যুগ্ম অথবা উভয়েই অযুগ্ম হলে $f(x)$ $g(x)$ যুগ্ম অপেক্ষক হবে

(e) ধরুন, $f(x)$ অপেক্ষকটি $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য এবং

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

দেখান যে $b_1 = b_2 = \ldots\ldots = 0$ যখন $f(x)$ যুগ্ম এবং $a_1 = a_2 = \ldots\ldots\ldots$ 0 যখন $f(x)$ অযুগ্ম অপেক্ষক।

2. যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত হয় এবং

$$g(x) = f(x) + f(-x) \qquad [-\pi \le x \le \pi]$$
$$h(x) = f(x) - f(-x) \qquad (-\pi \le x \le \pi)$$

তাহলে দেখান যে $g(x)$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক এবং $h(x)$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক। আরো প্রমাণ করুন যে, $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত যে-কোনো অপেক্ষককে একটি যুগ্ম এবং অপরটি অযুগ্ম অপেক্ষকের যোগফল হিসাবে প্রকাশ করা যাবে।

3. নিচের প্রত্যেক $f(x)$ অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণি নির্ণয় করুন :

(a) $f(x) = -\pi \quad (-\pi \le x < 0)$
$\quad\; = \pi \quad (0 < x \le \pi)$

(b) $f(x) = x \quad (-\pi \le x \le \pi)$

(c) $f(x) = |x| \quad (-\pi \le x \le \pi)$

(d) $f(x) = e^x \quad (-\pi \le x \le \pi)$

(e) $f(x) = \sin x + \cos 2x \quad (-\pi \le x \le \pi)$

সমাধান :

(a) এখানে $f(x)$ অপেক্ষকটি অযুগ্ম কিন্তু $\cos\ kx$ অপেক্ষক যুগ্ম। তাই $f(x)\ \cos\ kx$ অযুগ্ম, ফলে

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = 0 \Rightarrow ak = 0, k = 0,1,2,\dots$$

কিন্তু $f(x)\sin\ kx$ যুগ্ম। তাই

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx = \left[2\pi\frac{\cos kx}{-k}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{k}[1-\cos k\pi]$$

$$\Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi}.\frac{2\pi}{k}[1-(-1)^k]$$

$= \frac{4}{k}$ যখন k অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

$= 0,$ যখন k যুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

অতএব $f(x) \sim 4\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right]$

(b) $f(x)$ অযুগ্ম $(-\pi \le x \le \pi) \Rightarrow a_k = 0, (k = 0,1,2,\dots)$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x}{k}\cos kx + \frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{\pi}\frac{\pi}{k}(-1)^k = \frac{2}{\pi}(-1)^{k-1}$$

অতএব, $x \sim 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots\right]$

(c) $f(x) = |x| \qquad -\pi \le x \le \pi$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\, dx = \frac{2}{\pi k^2}[\cos k\pi - 1], \quad k = 1,\ 2,\ \dots$$

$a_0 = \pi$

$b_k = 0$, যেহেতু $f(x)$ যুগ্ম অপেক্ষক।

অতএব

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{2}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

(d) $f(x) = e^x$, $-\pi \leq \pi \leq \pi$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x}{k^2+1}(\cos kx + k \sin kx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^k}{k^2+1}[e^{\pi} - e^{-\pi}]$$

$$= \frac{2}{\pi}\sinh \pi \frac{(-1)^k}{k^2+1}, \qquad k = 0,1,2 \;......$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin kx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^x}{k^2+1}(-k\cos kx + \sin kx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{\pi}\sinh \pi (-1)^k \frac{k}{k^2+1} \qquad k = 1,2,3...$$

অতএব $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

$$\Rightarrow e^x \sim \frac{1}{\pi}\sinh \pi + \frac{2}{\pi}\sinh \pi \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2+1}(\cos dx - k \sin kx)$$

(e) $f(x) = \sin x + \cos 2x$

এখানে

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x + \cos 2x)dx$$

$$= 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin x + \cos 2x)\cos kx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin x \cos kx\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x \cos kx\, dx$$

$$= 0 + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos 2x \cos kx\, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[\cos(k-2)x + \cos(k+2)]x\, dx = 0 \text{ যদি } k \neq 2$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 1$$

অনুরুপভাবে দেখানো যাবে যে, $b_k = 0$ যদি $k \neq 1$ এবং $b_1 = 1$

অতএব $\sin x + \cos 2x$ এর ফুরিয়ার শ্রেণী $\sin x + \cos 2x$.

12.3.4 উপপাদ্য

1. $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ শ্রেণীটি $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষক-এ সমঅভিসারী হলে (1) শ্রেণীটি $f(x)$ অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণী হবে।

প্রমাণ : প্রদত্ত অসীম শ্রেণীটির প্রত্যেক পদকে $\cos mx$ দিয়ে গুণ করে পাই (m একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা)।

2. $\frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx \cos mx + b_k \sin kx \cos mx)$

এখন $a_k \cos kx + b_k \sin kx = f_k(x)$ লিখে পাই

3. $\frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\cos mx$

আবার $\left|\frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{k=1}^{n} fk(x)\cos mx - f(x)\cos mx\right|$

4. $\leq \left|\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right|$

এখন যেহেতু প্রদত্ত (1) শ্রেণীটি $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সম-অভিসারী এবং এর যোগফল অপেক্ষক $f(x)$ অতএব কোন ধনাত্মক সংখ্যা ε প্রদত্ত হলে এমন একটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (x-এর উপর অনির্ভরশীল) $N(\varepsilon)$ পাওয়া যাবে যে

$$\left|\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x)\right| < \varepsilon \text{ যখন } n > N(\varepsilon) \text{ এবং } -\pi \le x \le \pi$$

অতএব অসমতা (4) থেকে পাই যে

$$\frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx \cos mx + b_k \sin kx \cos mx)$$

শ্রেণীটি $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সম-অভিসারী এবং এর যোগফল অপেক্ষক $f(x) \cos mx$, অতএব এই শ্রেণীটির প্রতি পদের $[-- \pi, \pi]$ অন্তরালে সমাকলন বৈধ এবং এর ফলে

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos mx\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \cos mx\, dx$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

অনুরুপভাবে, $b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx \qquad m = 1,2,3, \ldots$

অতএব প্রদত্ত (1) শ্রেণীটি $f(x)$ অপেক্ষকের ফুরয়ার শ্রেণী।

12.3.5 উপপাদ্য

যদি $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে $f(x)$ একটি সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক হয় এবং a_k, b_k অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর সহগ হয় তাহলে $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ শ্রেণীটি অভিসারী।

প্রমাণ : $\left[f(x) - \sum_{n=1}^{m}(a_n \cos nx + d_n \sin nx)\right]^2$ অঋণাত্মক হওয়ায়

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]^2 dx \geq 0$$

এখন, $\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-\sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]^2 dx$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{1}^{m}(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right]^2 dx$$

$$-2\sum_{1}^{m}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\right]$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx+\pi\sum_{1}^{m}a_n^2+\pi\sum_{1}^{m}b_n^2-2\pi\sum_{1}^{m}a_n^2-2\pi\sum_{1}^{m}b_n^2$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\pi\sum_{1}^{m}a_n^2-\pi\sum_{1}^{m}b_n^2$$

অর্থাৎ $=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2dx-\sum_{1}^{m}(a_n^2+b_n^2)\geq 0$

$$\Rightarrow \sum_{1}^{m}(a_n^2+b_n^2)\leq\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty}\sum_{1}^{m}(a_n^2+b_n^2)\leq\lim_{m\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx$$

এখন $f(x)$ অপেক্ষকটি [-- π, π] অন্তরালে সমাকলনযোগ্য কাজেই $[f(x)]^2$ অপেক্ষকটিও ঐ অন্তরালে সমাকলনযোগ্য এবং এর ফলে উপরের অসমতাটি থেকে পাই যে $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ অসীম শ্রেণীটির অভিসারী।

মন্তব্য : উপরের অসমতাটিকে বেসেলের অসমতা বলা হয়। (Bessel's Inequality)

অনুসিদ্ধান্ত : [– π, π] অন্তরালে $f(x)$ একটি সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক হলে

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt = 0$$

প্রমাণ : 1,2,3,5 উপপাদ্য থেকে পাই

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) \text{ অসীম শ্রেণীটি অভিসারী}$$

অতএব এর সাধরণ পদ $a_k^2 + b_k^2 \to 0$ যখন $k \to \infty$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0 = \lim_{k\to\infty} b_k$$

অর্থাৎ

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin dt = 0$$

12.4 ফুরিয়ার শ্রেণীর অভিসরণের সমস্যার সূত্রাকার প্রকাশ (Formulation of Convergence Problems)

12.4.1

[– π,π] অন্তরালে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক $f(x)$-এর ফুরিয়ার শ্রেণী [– π,π] অন্তরালস্থিত নির্দিষ্ট কোন x বিন্দুতে $f(x)$ মানে অভিসারী কিনা জানতে হলে দেখতে হবে $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ সম্বন্ধটি সিদ্ধ হচ্ছে কিনা। এখানে $S_n(x)$ = ফুরিয়ার শ্রেণীর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল। অর্থাৎ

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) \qquad (-\pi \le t \le \pi) \tag{1}$$

a_k, b_k-এর সংজ্ঞা ব্যবহার করে পাই

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos kx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt + \sin kx\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cos kt + \sin kx\sin kt)\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]dt$$

এখন $\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos k\theta$ অভেদটিতে $k = 0,1,2,...,n$ বসিয়ে এবং যোগ করে পাই

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(-\frac{1}{2}\theta\right) = 2\sin\frac{1}{2}\theta(\cos 0\theta + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta)$$

অর্থাৎ

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \sin\frac{1}{2}\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta(1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta)$$

$$\Rightarrow \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\left(\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k\theta = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta} \quad \left[\text{যদি } \sin\frac{1}{2}\theta \neq 0\right]$$

$$\equiv D_n(\theta) \ (-\infty < \theta < \infty)$$

(3) অভেদটি (2) সমীকরণে বসিয়ে পাই (3)

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt$$

এখন $x-t = u$ বসিয়ে পাই

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_n(u)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)D_n(t)dt \ \left[\because D_n(t) = D_n(-t)\right]$$

$f(x)$ অপেক্ষকটি যদি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক হয় এবং এর পর্যায় 2π হয় অর্থাৎ, যদি $f(u+2\pi)=f(u)$ হয়, তাহলে যেহেতু $D_n(u)$ অপেক্ষকটিও 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক, $f(x+u)D_n(u)$ অপেক্ষকটিও 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক হবে।

ধরি, $f(x+u)D_n(u) \equiv F(u)$

অহলে

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)du$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-x-\pi}^{x-\pi} F(u)\int_{-\pi}^{\pi} F(u)du + \int_{\pi}^{-x+\pi} F(u)du\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-x-\pi}^{x-\pi} F(u-2\pi)du + \int_{-\pi}^{\pi} F(u)du + \int_{\pi}^{-x+\pi} F(u)du\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-x-\pi}^{\pi} F(u)du + \int_{-\pi}^{\pi} F(u)du + \int_{\pi}^{-x+\pi} F(u)du\right] \text{ [যেহেতু } F(u-2\pi) = \mathrm{F}(u)]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u)du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)du \tag{4}$$

অতএব

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+u)D_n(u)du + \int_{0}^{\pi} f(x+u)D_n(u)du\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(+t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(-t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+t)D_n(t)dt + \int_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt\right]$$

[যেহেতু $\mathrm{D}_n(t) = \mathrm{D}_n(-t)$]

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t) + f(x-t)]D_n(t)dt \tag{5}$$

একটি বিশেষ ক্ষেত্রে, ধরি $f(x) = 1$

তাহলে

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi.\, dx = 2$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, dx = 0, \quad k \geq 1$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, dx = 0, \quad k \geq 1$$

$$\therefore S_n(x) = 1, \forall_n$$

অতএব, সমীকরণ (5) থেকে পাই, $1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)dt$ (6)

সমীকরণ (6) এর উভয় পার্শ্বে $f(x)$ দিয়ে গুণ করে পাই ($f(x)$, $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য অপেক্ষক)

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t) f(x) dt \tag{7}$$

(5) থেকে (7) বিয়োগ করে পাই

$$S_n(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right] D_n(t)dt$$

তাহলে প্রমাণিত হল যে

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = f(x), \text{ যদি এবং একমাত্র যদি}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x) - f(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - f(x)\right] D_n(t)dt = 0$$

যেখানে $D_n(t)\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$

মন্তব্য 1 : $D_n(t) = -\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ অপেক্ষকটিকর $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ বিন্দুগুলিতে দূরীকরণযোগ্য অসন্ততি আছে। কারণ

$$\lim_{t\to 2k\pi} D_n(t) \lim_{\theta\to 0} D_n(2k\pi + \theta)$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = n + \frac{1}{2} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

অতএব, $t = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$, বিন্দুগুলিতে $D_n(t) = n + \frac{1}{2}$ সংজ্ঞিত করলে $D_n(t)$ অপেক্ষকটি $(-\infty, \infty)$ অন্তরালে সন্তত হবে।

মন্তব্য 2: $f(t)$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার ক্ষেত্র $[-\pi, \pi]$ ধরা হয়েছিল। এখন $f(t+2\pi) = f(t)$ এই সম্পর্কটি দ্বারা এর সংজ্ঞার ক্ষেত্রকে t-এর সব মানের জন্য সম্প্রসারিত করা হল। যদি $f(-\pi) \neq f(\pi)$ হয় তাহলে অবশ্য $f(t)$ অপেক্ষকটি $t = \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$ মানগুলির জন্য সংজ্ঞিত হবে না । এইসব ব্যতিক্রমী ক্ষেত্রে $f(t)$ কে যদৃচ্ছ সংজ্ঞিত করা যেতে পারে, এর ফলে $f(t)$ অপেক্ষক-সংশ্লিষ্ট সমাকলগুলির মানের কোন পরিবর্তন ঘটবে না।

12.4.2 উপপাদ্য

2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$ নিচের সম্পর্কগুলিকে সিদ্ধ করে :

(i) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha+2\pi}^{\beta+2\pi} f(x)dx$

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx$

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma + x)dx$

(iv) $\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx = \int_{0}^{2\pi} f(x)dx$

যেখানে α, β, γ যদৃচ্ছ সংখ্যা।

প্রমাণ :

(i) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, সমাকলনটিতে $x = t - 2\pi$ বসিয়ে পাই $t = x + 2\pi$, $dt = dx$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha+2\pi}^{\beta+2\pi} f(t-2\pi)dt = \int_{\alpha+2\pi}^{\beta+2\pi} f(t)dt \quad [\because f(t-2\pi) = f(t)]$$

(ii) $$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx = \int_{\alpha}^{-\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)dx$$

$$= \int_{\alpha}^{-\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\alpha} f(x)dx \quad \text{[(i) ব্যবহার করে]}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

(iii) $\gamma + x = t$ বসিয়ে পাই

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma + x)dx = \int_{\gamma-\pi}^{\gamma+\pi} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)dt$$

[$\gamma - \pi = \alpha$ বসিয়ে]

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad \text{[(ii) ব্যবহার করে]}$$

(iv) $$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx = \int_{\alpha}^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)dx$$

$$= \int_{\alpha}^{2\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x+2\pi)dx$$

$$= \int_{\alpha}^{2\pi} f(x)dx + \int_{0}^{\alpha} f(x)dx \qquad [\because f(x+2\pi) = f(x)]$$

$$= \int_{0}^{2\pi} f(x)dx$$

12.4.3 অপেক্ষকের কতকগুলি ক্লাস (Several Classes of Functions)

অপেক্ষকগুলিকে $[-\infty, \infty]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত ধরা হচ্ছে।

1. আংশিকভাবে সন্তত অপেক্ষকের ক্লাস (class of piecewise continuous functions) D.

কোন অপেক্ষক, প্রত্যেক সীমিত অন্তরালে সীমিত সংখ্যক বিন্দু ব্যতীত সর্বত্র সন্তত হলে এবং ঐ ব্যতিক্রমী বিন্দুগুলিতে অপেক্ষকটির সাধারণ অসান্তত্য (ordinary discontinuity) থাকলে, আংশিকভাবে সন্তত হবে। এই রকম অপেক্ষকের ক্লাসটিকে বলা হবে D.

এই ক্লাসের অন্তর্ভূক্ত অপেক্ষকগুলির কোন বদ্ধ অন্তরাল $[a,b]$ এর অন্তস্থ বিন্দুতে দক্ষিণ-পক্ষীয় সীমা এবং বাম-পক্ষীর সীমা দুটিই বর্তমান এবং সীমিত। অর্থাৎ

$$f(x+0) = \lim_{\substack{z\to 0 \\ z>0}} f(x+z) \text{ এবং } f(x-0) = \lim_{\substack{z\to 0 \\ z<0}} f(x+z)$$

সীমাগুলি অসীম নয়। $[a,b]$ অন্তরালের প্রান্তবিন্দু দুটিতে $f(a+0)$ এবং $f(b - 0)$ সীমাস্থ মান দুটিও সসীম। $f(x)$ অপেক্ষকটি যে সমস্ত বিন্দুতে সন্তত সেগুলিতে $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$. মাত্র কতকগুলি সীমিত সংখ্যক বিন্দুতে $f(x+0) \neq f(x-0)$ এবং $f(x+0) - f(x - 0)$ সংখ্যাটি সসীম।

মন্তব্য : সমস্ত সন্তত অপেক্ষকের ক্লাসকে C প্রতীক দিয়ে চিহ্নিত করা হবে। দেখান যে $f \in C \Rightarrow f \in D$.

অর্থাৎ কোন অপেক্ষক সন্তত হলে এটি আংশিকভাবে সন্তত হবে।

2. আংশিকভাবে মসৃণ অপেক্ষকের ক্লাস (class of piecewise smooth functions) D'.

$f(x)$ এই ক্লাসের অন্তর্ভুক্ত অপেক্ষক হলে এটি আংশিকভাবে সন্তত হবে এবং কোন বদ্ধ অন্তরাল $[a.b]$ এর কতিপয় সীমিত সংখ্যক বিন্দু ব্যতীত সর্বত্র $f'(x)$-এর অস্তিত্ব থাকবে ; ঐ ব্যতিক্রমী বিন্দুগুলিতে $f'(x)$- এর দক্ষিণ-পক্ষীয় সীমা

$$f'(x+0) = \lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} f'(x+z) \text{ এবং বাম-পক্ষীয় সীমা } f'(x-0) = \lim_{\substack{z\to 0\\ z<0}} f'(x+z)$$

সসীম হবে। $[a,b]$ অন্তরালের প্রান্তবিন্দু দুটিতে $f'(a+0)$ এবং $f'(b-0)$ সীমা দুটিও সসীম। $f(x)$ একটি আংশিকভাবে মসৃণ অপেক্ষক হলে, কোন বদ্ধ অন্তরাল $[a,b]$ এর x বিন্দুতে এর দক্ষিণ-পক্ষীয় অন্তরকলজ (সামান্যীকৃত)।

$$f'_R(x) = \lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{f(x+z)-f(x+0)}{z} = \lim_{t\to x+} \frac{f(t)-f(x+)}{t-x}$$

এবং সামান্যীকৃত বাম-পক্ষীয় অন্তরকলজ

$$f'_L(x) = \lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{f(x-z)-f(x-0)}{-z} = \lim_{t\to x-} \frac{f(t)-f(x-)}{t-x}$$

দুটি সসীম হবে।

কোন অপেক্ষক f, D' ক্লাসের অন্তর্ভুক্ত দেখাতে হলে, দেখাতে হবে যে

(1) $f\in D$ এবং

(2) $f'_R(x), f'_L(x)$ সীমা দুটির (x এর প্রত্যেক মানের জন্য) অস্তিত্ব বিদ্যমান।

3. পর্যাবৃত্ত অপেক্ষকের ক্লাস p

$f(x)$ অপেক্ষকটি পর্যাবৃত্ত হবে, যদি এমন একটি সংখ্যা T পাওয়া যায় যে

$$f(x+T) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

উদাহরণ হিসাবে ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলির উল্লেখ করা যায়। ত্রিকোণমিতিক অপেক্ষকগুলি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক। এদের পর্যায় 2π. আমরা ফুরিয়ার শ্রেণীর আলোচনায় p ক্লাসটিকে এভাবে সংজ্ঞিত করছি।

$$f(x)\in p \Leftrightarrow f(x+2\pi) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

12.4.4 উদাহরণ

উদাহরণ 1. $f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$

$f(0) = 0$

এখানে, যেহেতু $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ এবং x-এর অন্য মানের জন্য $f(x)$ সন্তত, অতএব, $f(x) \in C$ ফলে $f(x) \in D$

$x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$-এর অন্তরকলজের অস্তিত্ব নেই।

এবং $f'_R(0) = \lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{f(0+z)-f(0+0)}{z}$

$$= \lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{z\sin\frac{1}{z}-0}{z} \qquad [\because \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \text{ অতএব } f(0+) = f(0-) = 0]$$

$$= \lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \sin\frac{1}{z}$$

কিন্তু ডান দিকের সীমাটির অস্তিত্ব নেই। ফলে $f'_R(0)$ এর অস্তিত্ব নেই। তাই

$f(x) \in D'$

উদাহরণ 2. $f(x) = x\sin\frac{1}{x} \quad 0 < x < \infty$

$= 1 \quad -\infty < x \leq 0$

এখানে $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি অসন্তত। অন্যত্র এটি সন্তত।

এবং $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x\sin\frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$

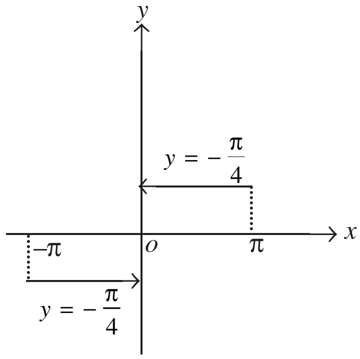
উদাহরণ 1 এর মত এখানেও $f'_R(0)$ এর অস্তিত্ব নেই। তাই

$f(x) \notin C, f(x) \in D, f(x) \notin D'$

উদাহরণ 3. $f(x) = \frac{\pi}{4}, \quad 0 < x < \pi$

$= -\frac{\pi}{4}, \quad -\pi < x < 0$

$= 0, \quad x = 0$



এই অপেক্ষকটির লেখচিত্রটি পাশে দেওয়া হল।

যেহেতু

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{\pi}{4} = f(0+)$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = -\frac{\pi}{4} = f(0-)$$

এবং $f(0) = 0$

অতএব $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকটি অসন্তত। কিন্তু $f(0+) - f(0-) = \frac{\pi}{2}$ (সসীম)। ফলে $f(x) \notin C$, কিন্তু $f(x) \in D$, যেহেতু $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি অসন্তত অতএব এই বিন্দুতে এর অন্তরকলজ নেই।

বস্তুত $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{\pi}{4}-0}{x} = +\infty$

এবং $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0-} \frac{-\frac{\pi}{4}-0}{x} = \infty$

অথচ $f'_R(0) = \lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{f(0+z)-f(0+0)}{z} = 0$

এবং $f'_L(0) = \lim\limits_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{f(0-z)-f(0+0)}{-z} = 0$

অতএব $f(x) \in D'$

উদাহরণ 4. দেখান যে, $D_n(t) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \in P$

সমাধান : $$D_n(t+2\pi) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(t+2\pi)\right]}{2\sin\frac{1}{2}(t+2\pi)}$$

$$= \frac{\sin\left[2n\pi+\pi+\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\pi+\frac{1}{2}t\right)}$$

$$= \frac{\sin\left[\pi+\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{2\sin\left(\pi+\frac{1}{2}t\right)} \qquad [\because \sin x \in P]$$

$$= \frac{(-1)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{(-1)2\sin\frac{1}{2}t}$$

$$= D_n(t)$$

12.4.5

যেহেতু $f(x) \in D$ হলে, $f(x)$ অপেক্ষকটি যে-কোন বদ্ধ অন্তরালে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য হবে তাই আমরা 12.3.5 অনুচ্ছেদের উপপাদ্য এবং অনুসিদ্ধান্তটিকে এভাবে লিখতে পারি।

উপপাদ্য 1

$f(x) \in D$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ শ্রেণীটি অভিসারী

অনুসিদ্ধান্ত 1

$f(x) \in D$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\ dt = \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt = 0$$

উপরের অনুসিদ্ধান্তটি থেকে আমরা দ্বিতীয় অনুসিদ্ধান্তটি প্রমাণ করতে পারি।

অনুসিদ্ধান্ত 2

$f(x) \in .\ D$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\, dt$$

প্রমাণ : $\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t = \sin kt\cos\frac{1}{2}t + \cos kt\sin\frac{1}{2}t$

এখন, যেহেতু $\cos\frac{t}{2} \in C$ এবং $\sin\frac{t}{2} \in C$ এবং $f(t) \in D$

অতএব $f(t)\ \cos\frac{t}{2} \in D$ এবং $f(t)\sin\frac{t}{2} \in D$

তাই অনুসিদ্ধান্ত 1 থেকে পাই

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\frac{t}{2}\sin kt\, dt = 0 = \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin\frac{t}{2}\cos kt\, dt$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\, dt = 0$$

12.4.1 অনুচ্ছেদে দেখানো হয়েছে যে $[-\pi, \pi]$ বদ্ধ অন্তরালে সীমাবদ্ধ এবং সমাকলনযোগ্য 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$-এর ফুরিয়ার শ্রেণীর n-তম আংশিক যোগফল

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)du$$

(4নং সমীকরণটি দেখুন)

যেখানে $D_n(u) = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{1}{2}u}$

ঐ অনুচ্ছেদে (6 নং সমীকরণ দেখুন) প্রমাণিত হয়েছে

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du \quad [\because\ D_n(-u) = D_n(n)]$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(u)f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(u)du$$

$$\Rightarrow S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+u) - f(x)]D_n(u)du$$

অর্থাৎ নিচের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

উপপাদ্য 2

1. $f(x) \in D$
2. $f(x) \in P$

$$\Rightarrow S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+u) - f(x)]D_n(u)du$$

12.4.6 ফুরিয়ার শ্রেণীর অভিসরণের উপপাদ্য (The Convergence Theorem)

উপপাদ্য 1

1. $f(x) \in P$
2. $f(x) \in D'$
3. $f(x) \in C$ যখন $x = x_0$

$$\Rightarrow f(x_0) = \lim_{x\to\infty-} S_n(x_0)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0)$$

প্রমাণ : 12.4.5 অনুচ্ছেদের উপপাদ্য 2 থেকে পাই,

$$S_n(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x_0+u) - f(x_0)]D_n(u)du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{[f(x_0+u) - f(x_0)]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du \qquad (1)$$

এখানে, $g(u) = \dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{2\sin\frac{u}{2}}$, আমরা দেখাবো যে $g(u) \in D$.

এখন $g(u+2\pi) = \dfrac{f(x_0+u+2\pi)-f(x_0)}{2\sin\left(\pi+\frac{u}{2}\right)}$

$$= -\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{2\sin\frac{u}{2}} \qquad [\because f(u) \in P]$$

$$= -\ g(u)$$

অতএব এটা দেখালেই যথেষ্ট হবে যে $-\pi \le x \le \pi$ অন্তরালে $g(u)$ অপেক্ষকটির সীমিত সংখ্যক সসীম অসান্তত্য আছে। কিন্তু ঐ অন্তরালে $g(u)$ এবং $f(u)$ অপেক্ষক দুটির অসান্তত্য-বিন্দুগুলি অভিন্ন ; $g(u)$ এর $u = 0$ বিন্দুতে একটি অতিরিক্ত অসান্তত্যা-বিন্দু থাকতে পারে।

এখন

$$g(0+) = \lim_{u\to 0+}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}\cdot \lim_{u\to 0+}\frac{u}{2\sin\frac{u}{2}}$$

$$= \lim_{u\to 0+}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}\cdot f_R'(x_0) \qquad [\ \because f(x) \in D'\ ]$$

অনুরূপভাবে $g(0-) = \lim\limits_{u\to 0-}\dfrac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}\cdot f_L'(x_0)$

অতএব $g(u) \in D$.

অতএব 12.4.5 অনুচ্ছেদের অনুসিদ্ধান্ত 2 থেকে পাই

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)u\,du = 0$$

অর্থাৎ $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\,du = 0$

অর্থাৎ $\lim_{n\to\infty}[S_n(x_0) - f(x_0)] = 0$ [1নং সম্পর্কটি দেখুন]

$$\Rightarrow f(x_0) = \lim_{n\to\infty} S_n(x_0)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0)$$

উদাহরণ : ধরি, $f(x) = \frac{1}{4}\pi$ যখন $2n\pi < x < (2n + 1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

$= -\frac{1}{4}\pi$ যখন $(2n - 1)\pi < x < 2n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

$= 0$ যখন $x = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

এখানে

1. $f(x) \in P$
2. $f(x) \in D'$

$f(x)$ অযুগ্ম অপেক্ষক, $-\pi < x < \pi$

অতএব $a_k = a, (k = 0, 1, 2, \cdots)$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\pi \sin kx\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2k}[1 - \cos k\pi]$$

$$= \frac{1}{2m+1}, \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

তাই $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)x = \frac{\pi}{4}$ যখন $2n\pi < x < (2n + 1)\pi$

$= \frac{-\pi}{4}$ যখন $(2n - 1)\pi < x < 2n\pi$

$= 0$ যখন $x = n\pi$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

12.4.7 অসান্তত্যা-বিন্দুতে ফুরিয়ার শ্রেণীর অভিসরণের উপপাদ্য (The Convergence Theorem-Points of Discontinuity)

উপপাদ্য 2

1. $f(x) \in P$
2. $f(x) \in D'$

$$\Rightarrow \frac{f(x+) + f(x-)}{\cdot 2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), -\infty < x < \infty$$

প্রমাণ : $f(x)$ অপেক্ষকটি x বিন্দুতে সন্তত হলে $\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = f(x)$ এবং তখন উপপাদ্য 1 প্রয়োগ করে উপরের সিদ্ধান্তটি প্রমাণিত হবে।

ধরি $g(x) = \frac{\pi}{4}$ যখন $0 < x < \pi$

$= \frac{-\pi}{4}$ যখন $-\pi < x < 0$

$= 0$ যখন $x = 0$

এবং $g(x + 2\pi) = g(x), -\infty < x < \infty$

তাহলে $g(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীটি হল

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

এখন $x = 0$ বিন্দুতে $g(x)$ অসন্তত। $g(0+) = \frac{\pi}{4}$, $g(0-) = \frac{-\pi}{4}$

অতএব, $\frac{g(0+) + g(0-)}{2} = 0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\right)_{x=0}$

যেহেতু $g(x)$ পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক, এর সমস্ত অসান্তত্য বিন্দুর জন্যই $\frac{g(x+) + g(x-)}{2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}\right)$ সম্পর্কটি সিদ্ধ হবে। কাজেই $g(x)$ অপেক্ষকের জন্য উপপাদ্য 2 বৈধ।

ধরি $x = c$, $f(x)$ অপেক্ষকটির একটি অসান্ততা বিন্দু।

এবারে, $h(x) = f(x) - \frac{2J}{\pi} g(x-c)$, $J = f(c+) - f(c-)$ অপেক্ষকটি $x = c$ বিন্দুতে সন্তত কিনা দেখা যাক।

এখন $h(c) = f(c)$

$$h(c+) = f(c+) - \frac{2J}{\pi} g(0+) = f(c+) - \frac{2J}{\pi} \frac{\pi}{4}$$

$$= f(c+) - \frac{1}{2}\{f(c+) - f(c-)\}$$

$$= \frac{f(c+) + f(c-)}{2}$$

এবং $h(c-) = f(c-) - \frac{2J}{\pi} g(0-)$

$$= f(c-) - \frac{2J}{\pi}\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$= f(c-) + \frac{1}{2}[f(c+) - f(c-)]$$

$$= \frac{f(c+) + f(c-)}{2}$$

অতএব $h(x)$ অপেক্ষকটির $x = c$ বিন্দুতে একটি দূরীকরণযোগ্য অসন্ততি আছে। তাই $h(x)$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞাটি পরিবর্তন করা যাক। (এই পরিবর্তনের ফলে $h(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার সহগের কোন পরিবর্তন হবে না।)

এবারে ধরি $h(x) = f(x) - \frac{2J}{\pi} g(x-c)$, $x \neq c$

এবং $h(c) = \frac{1}{2}[f(c+) + f(c-)]$

এখন $h(x)$ অপেক্ষকটি c বিন্দুতে সন্তত। অতএব উপপাদ্য 1 প্রয়োগ করে পাই যে, $x = c$ বিন্দুতে $h(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর যোগফল এবং $h(c)$ অভিন্ন। অর্থাৎ

$h(c)$ = [$x = c$ বিন্দুতে $h(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর যোগফল]

= [$x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর যোগফল]

$+$ [$x = c$ বিন্দুতে $\frac{-2J}{\pi} g(x-c)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণির যোগফল]

$=$ [$x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর যোগফল] $+ \ 0$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kc + b_k \sin kc)$$

অর্থাৎ $\frac{f(c+)+f(c-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kc + b_k \sin kc)$

যেহেতু c বিন্দুটি $f(x)$ অপেক্ষকটির যদৃচ্ছ অসান্ততা বিন্দু, অতএব উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

মন্তব্য 1 : ফুরিয়ার শ্রেণীর অভিসরণের যথেষ্ট শর্তগুলি দিরিক্লের শর্ত (Dirichlet's conditions) নামে পরিচিত।

মন্তব্য 2 : $f(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর যোগফল অপেক্ষককে $S(x)$ ধরা হলে উপপাদ্য 1 এবং উপপাদ্য 2 থেকে পাই।

$S(x) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ যখন $-\pi \le x \le \pi$

অর্থাৎ $S(x) = \frac{1}{2}\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}[f(x+h)+f(x-h)]$

অতএব $S(\pi) = \frac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}[f(\pi+h)+f(\pi-h)]$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}[f(-\pi+h)+f(\pi-h)] \qquad [\because f(x) \in P]$$

$$= \frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$$

অনুরূপভাবে $S(-\pi) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$

12.5 উদাহরণ

উদাহরণ 1. নিচে সংজ্ঞিত $f(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী নির্ণয় করুন :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad -\pi \le x \le 0 \\ &= x, \quad 0 \le x \le \pi \\ f(x+2\pi) &= f(x), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

$x = 0, \pm\pi, 4\pi$ এবং -5π বিন্দুগুলিতে ঐ শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করুন।

উত্তর : এখানে, যেহেতু $f(x+2\pi) = f(x)$ অতএব $f(x) \in P$ আবার, প্রদত্ত অপেক্ষকটি $-\pi < x < \pi$ অন্তরালে সর্বত্র সন্তত অতএব $f(x) \in C$, যখন $-\pi < x < \pi$, $x = 0$ বিন্দুতে অপেক্ষকটির অন্তরকলজের অস্তিত্ব নেই কিন্তু $f'_R(0) = 1$ এবং $f'_L(0) = 0$.

তাই $f(x) \in D'$

ফলে, উপপাদ্য 1 প্রযোজ্য।

a_k, b_k অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর সহগ হলে

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos kx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\frac{(\sin kx)}{k} - 1.\frac{(-\cos kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} \quad k \ne 0$$

$$= \frac{1}{\pi}[\cos k\pi - 1]\frac{1}{k^2}$$

$= 0$ যখন k যুগ্ম।

$= -\dfrac{2}{\pi k^2}$ যখন k অযুগ্ম।

এবং $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{-\cos kx}{k}\right) - 1.\left(\frac{-\sin kx}{k^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\,\frac{\pi\cos k\pi}{k} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

অতএব

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2m+1)^2}\cos(2m+1)x + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m}\sin mx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right\}$$

$$+\left\{\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right\}, \qquad -\pi < x < \pi$$

যেহেতু $f(x) \in C$ যখন $x = 0$, অতএব

$$f(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right\}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$x = \pm\pi$ বিন্দুতে

$$\frac{1}{2}[f(\pi - 0) + f(-\pi + 0)] = S(\pm\pi)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)\pi$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}$$

অর্থাৎ

$$\frac{1}{2}[\pi + 0] = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$S(4\pi) = S(0) = 0$$

$$S(-5\pi) = S(\pi) = \frac{\pi}{2}$$

উদাহরণ 2. $f(x) = x + x^2, \quad -\pi < x < \pi$

অপেক্ষকটিকে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন।

সমাধান : $f(x)$ অপেক্ষকটিকে $(-\pi, \pi)$ অন্তরালের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে সংজ্ঞিত করা হয়নি। আমরা এই দুটি বিন্দুতে অপেক্ষকটিকে যদৃচ্ছ সংজ্ঞিত করতে পারি।

ধরা যাক $f(x) = x + x^2, \quad -\pi \le x \le \pi$ তাহলে $f(x) \in C, -\pi \le x \le \pi$ এবং যেহেতু $f'(x) = 2x + 1$, এই অন্তরালে সর্বত্র সংজ্ঞিত, অতএব $f(x) \in D'$.

আমরা $f(x)$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার ক্ষেত্রকে $f(x) = f(x + 2\pi)$ সম্পর্কটি দ্বারা $-\infty < x < \infty$ অন্তরালে সম্প্রসারিত করি। তাহলে $f(x) \in P$

অতএব উপপাদ্য 1 প্রযোজ্য।

a_k, b_k অপেক্ষকটির ফুরিয়ার সহগ হলে

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x + x^2)\cos kx\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos kx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x^2\,\frac{\sin kx}{k} - 2x\left(\frac{-\cos kx}{k^2}\right) + 2.1\left(\frac{-\sin kx}{k^3}\right)\right]_0^{\pi}, \quad k \ne 0$$

$$= \frac{4}{\pi}\pi\frac{\cos k\pi}{k^2} = \frac{4}{k^2}(-1)^k$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[x\left(\frac{-\cos kx}{k}\right) - 1.\left(\frac{-\sin kx}{k^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2}{k}\cos k\pi = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

অতএব $f(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর যোগফল অপেক্ষক $S(x)$ হলে

$$S(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+4\left[-\cos x+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 4x}{4^2}-\cdots\right]$$

$$+2\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots\right]$$

$$=\frac{\pi^2}{3}-4\left[\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\cdots\right]$$

$$+2\left[\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots\right]$$

যেহেতু $f(x)\in C$ যখন $-\pi<x<\pi$ অতএব $f(x)=x+x^2=S(x)$ যখন $-\pi<x<\pi$ এখন $(-\pi,\pi)$ অন্তরালের প্রান্তবিন্দু দুটিতে ফুরিয়ার শ্রেণীর যোগফল

$$=\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]$$

$$=\frac{1}{2}[-\pi+\pi^2+\pi+\pi^2]=\pi^2$$

অর্থাৎ $\pi^2 = S(\pi)$

$$=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}}{k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{6}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

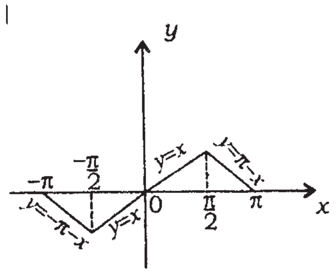
উদাহরণ 3. প্রদত্ত $f(x) = x, \qquad 0\le x\le\frac{\pi}{2}$

$$= \pi - x, \quad \frac{\pi}{2}\le x\le\pi$$

$$= -f(-x), \quad -\pi\le x\le 0$$

দেখান যে, $f(x)$ অপেক্ষকটি $[-\pi,\pi]$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্তগুলি পালন করে। $[-\pi,\pi]$ অন্তরালে এই অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীটি নির্ণয় করুন।

সমাধান : $y = f(x)$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র পাশে দেওয়া হল।



$f(x)$-এর প্রদত্ত সংজ্ঞা থেকে পাই

$$\begin{aligned} f(x) &= -\pi - x, & -\pi \le x \le \frac{-\pi}{2} \\ &= x, & \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ &= \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{aligned}$$

$f(x)$ অপেক্ষকটি $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে একটি অযুগ্ম অপেক্ষক। এটি এই অন্তরালে সন্তত অর্থাৎ $f(x) \in C, -\pi < x < \pi$, $x = \frac{-\pi}{2}$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে এর অন্তরকলজ সংজ্ঞিত নয়। কিন্তু

$$f'_R\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \qquad f'_L\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

এবং $f'_R\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1, \qquad f'_L\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1$

অর্থাৎ অপেক্ষকটি এই অন্তরালে আংশিকভাবে মসৃণ

$$\Rightarrow f(x) \in D'$$

অপেক্ষকটির সংজ্ঞার ক্ষেত্রকে $f(x + 2\pi) = f(x)$, সম্পর্ক দ্বারা $(-\infty, \infty)$ অন্তরালে সম্প্রসারিত করা হলে $f(x) \in P$

অতএব $f(x)$ অপেক্ষকটি দিরিক্লের শর্ত পালন করে।

a_k, b_k এই অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর সহগ হলে $a_k = 0$, যেহেতু $f(x)$ অযুগ্ম অপেক্ষক। এবং

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\sin kx\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin kx\, dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\sin kx\, dx + \int_0^{\pi/2} t\sin k(\pi - t)dt\right]$$ [দ্বিতীয় সমাকলটিতে $\pi - x = t$ বসিয়ে]

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\{1 + (-1)^{k+1}\}\sin kx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\{1+(-1)^{k+1}\}\int_0^{\pi/2} x \sin kx\, dx = 0, \text{ যখন } k \text{ যুগ্ম।}$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} x \sin kx\, dx, \text{ যখন } k \text{ অযুগ্ম।}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[x\left(\frac{\cos kx}{-k}\right) - 1\left(\frac{\sin kx}{-k^2}\right)\right]_0^{\pi/2}, \quad k \text{ অযুগ্ম।}$$

$$= \frac{4}{\pi k^2}\sin k\frac{\pi}{2}, k \text{ অযুগ্ম।}$$

$$b_{2m+1} = \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{(2m+1)^2}\sin(2m+1)\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\,\frac{1}{(2m+1)^2}(-1)^m \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}$$

অতএব নির্ণেয় ফুরিয়ার শ্রেণী

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}\sin(2m+1)x, \qquad -\pi < x < \pi$$

উদাহরণ 4 : $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$ অপেক্ষকটিকে $(-\pi, \pi)$ অন্তরালে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন। এবং দেখান যে $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$

সমাধান : $f(x)$ অপেক্ষকটি $(-\pi, \pi)$ অন্তরালে সর্বত্র সন্তত এবং $f'(x)$ অপেক্ষকটিরও এই অন্তরালে কোথায়ও বিচ্ছিন্নতা নেই। তাই $f(x)$ অপেক্ষকটিকে আংশিকভাবে মসৃণ বলা যেতে পারে। অর্থাৎ $f(x) \in D'$.

এখন $f(x + 2\pi) = f(x)$ সম্পর্কটি দ্বারা অপেক্ষকটির সংজ্ঞার ক্ষেত্রকে $(-\infty, \infty)$ অন্তরালে সম্প্রসারিত করা হলে $f(x) \in P$.

এবার ধরুন, a_n, b_n এই অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর সহগ।

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1-\cos x}\ \cos nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos x}\ \cos nx\, dx \qquad [\because\ f(x)\ \cos\ nx \text{ যুগ্ম অপেক্ষক}]$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin\frac{x}{2}\cos nx\ dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{\pi} 2\cos nx \sin\frac{x}{2}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} - \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\left\{\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right\} - \left\{\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{n+\frac{1}{2}} - \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{n-\frac{1}{2}}\right\}\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} \qquad [\text{ যেহেতু } \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi = 0]$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{4n^2-1}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0 \quad [\text{ যেহেতু } f(x) = \sqrt{1-\cos x} \text{ যুগ্ম অপেক্ষক}]$$

অতএব নির্ণেয় ফুরিয়ার শ্রেণী

$$\sqrt{1-\cos x} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos nx\right]$$

এখন $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ সন্তত, অতএব

$$f(0) = S(0) \Rightarrow$$

$$0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2 - 1}\right]$$

অর্থাৎ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$

12.6 সারাংশ

$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos kx, \sin kx, \cdots\}$

সেট্‌টির অপেক্ষকগুলির দ্বারা কোন অপেক্ষক $f(x)$ কে $(-\pi, \pi)$ অন্তরালে বিস্তৃত করা হলে, বিস্তৃতিটিকে $f(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী বলা হয়। এই বিস্তৃতিটির সহগগুলি হল

$$\left\{\frac{1}{2}a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots a_k, b_k, \cdots\right\}$$

সহগগুলি নির্ণয়ের সূত্র হচ্ছে

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

তাহলে $f(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীটি হল

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

এবং এক্ষেত্রে লেখা হবে

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ধরি $S_n(x) = \dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$

তাহলে $S_n(x)$ হল $f(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর n-তম আংশিক যোগফল। এখন $\{S_n(x)\}_1^{\infty}$ অনুক্রমটি অভিসারী হলে এবং $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x), \forall x$ হলে

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$ সমীকরণটি বৈধ।

$f(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর অভিসরণের জন্য $f(x)$ অপেক্ষকটির উপর কতকগুলি শর্ত আরোপ করার প্রয়োজন হয়। ফুরিয়ার শ্রেণীর অভিসরণের যথেষ্ট শর্তসমূহের সেট্‌গুলির মধ্যে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ হচ্ছে দিরিক্লেব শর্তাবলী (Dirichlet's conditions)।

দিরিক্লের শর্তাবলী

1. $f(x)$ অপেক্ষকটিকে 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক হতে হবে।

2. (a) $f(x)$ অপেক্ষকটি যে-কোন সীমিত অন্তরালে হয় সন্তত হবে আর নয়ত এই অন্তরালের সীমিত সংখ্যক বিন্দুতে এর সসীম অসান্তত্য থাকবে।

   (b) ঐ অন্তরালের প্রত্যেক বিন্দুতে

$$f'_R(x) = \lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z}$$

ও $$f'_L(x) = \lim_{\substack{z\to 0\\ z>0}} \frac{f(x-z) - f(x-0)}{-z}$$

সীমা দুটির অস্তিত্ব থাকবে।

অপেক্ষকের তিনটি ক্লাস (Three Classes of Functions)

1. শর্তটি পালনকারী অপেক্ষকগুলির ক্লাসকে P দিয়ে চিহ্নিত করা হয়েছে।

2. (a) শর্ত পালনকারী অপেক্ষকগুলির ক্লাসকে D. এবং

2. (a), 2 (b) উভয় শর্ত পালনকারী অপেক্ষকগুলির ক্লাসকে D' দিয়ে চিহ্নিত করা হয়েছে।

ফুরিয়ার শ্রেণীর অভিসরণের উপপাদ্য

পর্যায়বৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$ দিরিক্লের শর্তাবলী পালন করলে এর ফুরিয়ার শ্রেণীটি অভিসারী হবে এবং যে-কোন x বিন্দুতে শ্রেণীটির যোগফলের মান এবং $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$ এর মান অভিন্ন হবে।

12.6 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. $f(x) = \sin x, \quad 0 < x \leq \pi$
$\quad\; = 0, \quad -\pi < x \leq 0$

অপেক্ষকটিকে ফুরিয়ারের শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন এবং এটি থেকে $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করুন।

2. $f(x) = -\pi, \quad -\pi < x < 0$
$\quad\; = x, \quad 0 < x < \pi$

অপেক্ষকটিকে ফুরিয়ারের শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন এবং এটি থেকে দেখান যে

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

3. ধরুন, $f(x) = 0, \quad -\pi \leq x \leq 0$

এবং $f(x) = \pi, \quad 0 < x \leq \pi$

$x = 0, -\pi$ এবং π বিন্দুতে অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করুন ; পরে, অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী নির্ণয় করে প্রাপ্ত ফলের যাথার্থ্য প্রতিপাদন করুন।

4. $f(x) = -x^2, \quad -\pi \leq x \leq 0$
$\quad\; = x^2, \quad 0 < x \leq \pi$

অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী নির্ণয় করুন এবং $x = 0, -\pi, \pi$ বিন্দুতে 12.4.7 উপপাদ্য প্রয়োগ করে প্রাপ্ত শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করুন।

5. $-\pi < x < \pi$ অন্তরালে e^{ax} অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীটি নির্ণয় করুন।

6. দেখান যে $-\pi < x < \pi$ অন্তরালে

$$\frac{\pi}{2\sin h\pi}e^x = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\cos nx - n\sin nx}{1+n^2}$$

এখান থেকে দেখান যে

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}=\frac{\pi}{2}\cot h\pi-\frac{1}{2}$$

7. দেখান যে, যখন $-\pi < x < \pi$

(i) $\sin mx = \frac{2}{\pi}\sin m\pi\left(\frac{\sin x}{1^2 - m^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2 - m^2} + \cdots\right)$

(ii) $\cos mx = \frac{2}{\pi}\sin m\pi\left(\frac{1}{2m} + \frac{m\cos x}{1^2 - m^2} - \frac{m\cos 2x}{2^2 - m^2} + \cdots\right)$

(iii) $\frac{\cosh mx}{\sin hm\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2m} - \frac{m\cos x}{1^2 + m^2} + \frac{m\cos 2x}{2^2 + m^2} + \cdots\right)$

8. যদি

$$\begin{aligned} f(x) &= C_1, \quad \text{যখন} \quad -\pi < x < \frac{-\pi}{3} \\ &= C_2, \quad \text{যখন} \quad \frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3} \\ &= C_3, \quad \text{যখন} \quad \frac{\pi}{3} < x < \pi \end{aligned}$$

হয় তাহলে প্রমাণ করুন যে,

$$f(x) = \frac{1}{3}(C_1 + C_2 + C_3) + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\frac{\pi}{3} \times$$

$$\left\{2(C_3 - C_1)\sin 2k\frac{\pi}{3}\sin kx + (2C_3 - C_1 - C_2)\cos kx\right\}$$

9. যদি

$$\begin{aligned} f(x) &= -1 \quad \text{যখন} \quad -\pi < x < 0 \\ &= 0, \quad \text{যখন} \quad x = 0 \\ &= 1, \quad \text{যখন} \quad 0 < x < \pi \end{aligned}$$

তাহলে প্রমাণ করুন যে,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\cdots$$

10. $f(x) = \pi + x, \quad -\pi < x < 0$

$\quad = \pi + x \quad 0 < x < \pi$

অপেক্ষকটিকে $(-\pi, \pi)$ অন্তরালে ফুরিয়ারের শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন।

12.8 উত্তরমালা

1. $\frac{1}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(2n)^2-1^2}+\frac{1}{2}\sin x\ ;\ \frac{1}{2}$

2. $\frac{-\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)$

$$+3\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{3\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\cdots$$

[ইংগিত, $x = 0$ বিন্দুতে $f(x)$ অসন্তত। অতএব $\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2}=S(0)$]

3. x বিন্দুতে ফুরিয়ার শ্রেণীর যোগফল $S(x)$ হলে

$$S(0)=\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$S(-\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{0+\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$S(x)=\frac{1}{2}\pi+2\left\{\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right\}$$

4. $a_k=0,\ b_k=\frac{2\pi}{k}(-1)^{k+1}-\frac{4}{\pi}\{1+(-1)^{k+1}\}\frac{1}{k^3}$

অতএব

$$S(x)=2\left(\pi-\frac{4}{\pi}\right)\sin x-\pi\sin 2x+\frac{2}{3}\left(\pi-\frac{4}{9\pi}\right)\sin 3x-\frac{\pi}{2}\sin 4x+\cdots$$

0, 0, 0

5. $e^{ax} = \dfrac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{\pi} \left\{ \dfrac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n^2 + a^2} (a \cos nx - n \sin nx) \right\}$

6. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4} \left(\dfrac{1}{1^2} \cos x + \dfrac{1}{3^2} \cos 3x + \dfrac{1}{5^2} \cos 5x + \cdots \right)$

সহায়ক পাঠ্যপুস্তকাবলী :

1. *Advanced Calculus,* David V. Widder, Prentice Hall of India Private Limited, 1974.
2. *Methods of Real Analysis,* Richard R. Goldberg, Oxford and I.B.H Publishing Company, 1973.
3. *Multiple Integrals, Field Theory and Series* B. M. Budak, S. V. Fomin, Mir Publishers, Moscow, 1973.
4. *Introduction to the Theory of Fourier Series and Integrals,* H. S. Carslaw, Dover Publications, Inc., 1930.
5. *Mathematical Analysis,* S. C. Malik and Savita Arora,. Wiley Eastern Limited, 1991.

একক 13 ❒ বিভিন্ন ফুরিয়ার শ্রেণী (সাইন, কোসাইন ইত্যাদি) ও অন্যান্য প্রয়োগমূলক উদাহরণ (Different Types of Fourier Series such as Sine, Cosine Series, etc., and Other Applicable Examples)

গঠন

13.1 প্রস্তাবনা

$(-\pi, \pi)$ অন্তরালে আংশিকভাবে মসৃণ এবং 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$-এর ফুরিয়ার শ্রেণী নির্ণয় করার পদ্ধতি দ্বাদশ এককে বর্ণিত হয়েছে। ফুরিয়ার শ্রেণীর সহগগুলি

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \qquad (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ এবং}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt, \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

সূত্র দুটির প্রয়োগে নির্ণয় করা হয়। অপেক্ষকটি যুগ্ম হলে $b_k = 0$, $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ এবং অযুগ্ম হলে $a_k = 0$, $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ হয়। ফলে যুগ্ম অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণীটি সাইন অপেক্ষক বর্জিত এবং অযুগ্ম অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণীটি কোসাইন অপেক্ষক বর্জিত হবে।

তাই $(0, \pi)$ অন্তরালে সংজ্ঞিত কোণ আংশিকভাবে মসৃণ এবং 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$ কে ইচ্ছামত সাইন অথবা কোসাইন শ্রেণীতে বিস্তৃত করতে পারা যায়।

আবার, চলের উপযুক্ত প্রতিস্থাপন দ্বারা $[a, b]$, $[0, 2\pi]$, $[-l, l]$ অন্তরালগুলিকে $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে পরিবর্তিত করা যায় কিন্তু এর ফলে অপেক্ষকটির বৈশিষ্ট্য (characteristics) অপরিবর্তিত থাকে অর্থাৎ আংশিকভাবে মসৃণ ও পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক পরিবর্তিত অন্তরালেও আংশিকভাবে মসৃণ ও পর্যাবৃত্ত থাকে। তাই $(-\pi, \pi)$ ব্যতীত অন্যান্য অন্তরালেও কোন অপেক্ষককে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করতে পারা যায়।

13.2 উদ্দেশ্য

এই এককটি পাঠ করে আপনারা

- কোন অপেক্ষকের অর্ধপাল্লার সাইন শ্রেণী ও কোসাইন শ্রেণী সম্পর্কে জানতে পারবেন।
- $[-\pi, \pi]$ অন্তরাল ব্যতীত অন্যান্য অন্তরাল, যথা $[a, b]$, $[0, 2\pi]$, $[-l, l]$ প্রভৃতি অন্তরালে ফুরিয়ার শ্রেণী সম্পর্কে অবহিত হবেন, এবং
- জটিল রাশির প্রয়োগে ফুরিয়ার শ্রেণীকে সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করার পদ্ধতি জানতে পারবেন।

13.3 সাইন শ্রেণী ও কোসাইন শ্রেণী (The Sine Series and the Cosine Series)

13.3.1 যুগ্ম ও অযুগ্ম অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণী

যদি $f(x)$ অপেক্ষকটি যুগ্ম অপেক্ষক হয়, তাহলে $f(x)\cos nx$ যুগ্ম অপেক্ষক এবং $f(x)\sin nx$ অযুগ্ম অপেক্ষক হবে। কাজেই a_n, b_n এই অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর সহগ হলে

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\ dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

এবং $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$

অতএব কোন যুগ্ম অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণী সাইন অপেক্ষকবর্জিত হবে।

আবার, যেহেতু $\quad f(0+) = \lim\limits_{h\to 0+} f(h) = \lim\limits_{h\to 0+} f(-h) = f(0-) = f(0)$

এবং $f(-\pi + 0) = \lim\limits_{h\to 0+} f(-\pi + h) = \lim\limits_{h\to 0+} f(\pi - h) = f(\pi - 0)$

অতএব $x = 0$ বিন্দুতে শ্রেণীটির যোগফল অপেক্ষকের মান হবে $f(0)$ এবং $x = \pi$ বিন্দুতে শ্রেণীটির যোগফল অপেক্ষকের মান হবে $f(\pi - 0)$

$f(x)$ অপেক্ষকটি অযুগ্ম অপেক্ষক হলে, $f(x) \cos nx$ অপেক্ষকটি অযুগ্ম এবং $f(x) \sin x$ অপেক্ষকটি যুগ্ম হবে। অতএব এক্ষেত্রে

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = 0 \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

এবং $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

তাই কোন অযুগ্ম অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণী কোসাইন অপেক্ষকবর্জিত হবে। আবার, যেহেতু অযুগ্ম অপেক্ষকের ক্ষেত্রে

$$f(-h) = -f(h) \text{ এবং } f(\pi - h) = -f(-\pi + h)$$

অতএব $f(0-) = -f(0)$ এবং $f(\pi-) = -f(-\pi+)$

$\Rightarrow x = 0$ এবং π বিন্দুতে যোগফল অপেক্ষকের মান 0.

উদাহরণ 1 ঃ $(-\pi, \pi)$ অন্তরালে সংজ্ঞিত অপেক্ষক

$$f(x) = |\sin x|$$

এর ফুরিয়ার শ্রেণীটি নির্ণয় করুন। এবং $x = \pi$ বিন্দুতে প্রাপ্ত শ্রেণীটির যোগফল অপেক্ষকের মান নির্ণয় করুন।

সমাধান ঃ $f(x) = |\sin x|$ হলে

$$f(-x) = |\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x| = f(x),$$

অতএব, $f(x)$ অপেক্ষকটি যুগ্ম অপেক্ষক ফলে এর ফুরিয়ার শ্রেণীটি সাইন অপেক্ষক বর্জিত হবে এবং

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^\pi \quad (n \neq 1)$$

$$= \frac{1}{\pi}[1+(-1)^n]\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right]$$

$$= \frac{-2}{\pi}[1+(-1)^n]\frac{1}{n^2-1}$$

অতএব $a_n = 0$ যখন n অযুগ্ম এবং $n \neq 1$

$$a_n = \frac{-4}{\pi}\,\frac{1}{n^2-1} \text{ যখন } n \text{ যুগ্ম।}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\, 2x\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^\pi = 0$$

অতএব

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \cdots + \frac{\cos 2kx}{4k^2-1} + \cdots\right]$$

$x = \pi$ বিন্দুতে যোগফল অপেক্ষকটির মান $= \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$

$$= f(\pi - 0)$$

$$= 0$$

মন্তব্য ঃ $x = \pi$ বিন্দুতে $|\sin x|$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর যোগফল $= 0$, অতএব

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

উদাহরণ 2 : $f(x) = -k, \qquad -\pi < x < 0$

$\qquad\qquad = k, \qquad 0 < x < \pi$

এবং $f(x + 2\pi) = (x)$

উপরে সংজ্ঞিত পর্যাবৃত্ত অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী নির্ণয় করুন এবং দেখান যে

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n - 1} = \frac{\pi}{4}$$

সমাধান : যেহেতু, $f(x)$ অপেক্ষকটি অযুগ্ম, অতএব এর ফুরিয়ার শ্রেণী কোসাইন অপেক্ষক বর্জিত হবে ;

এবং $\quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$

$$= \frac{2}{\pi} k \int_0^{\pi} \sin nx \; dx = \frac{2}{\pi} k \left[\frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2k}{n\pi} [1 - (-1)^n]$$

$$= \frac{4k}{n\pi}, \text{ যখন } n \text{ অযুগ্ম}$$

$$= 0, \text{ যখন } n \text{ যুগ্ম।}$$

অতএব নির্ণেয় ফুরিয়ার শ্রেণীটি হচ্ছে

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n + 1)x}{2n + 1}$$

এখন $x = \frac{\pi}{2}$ বিন্দুতে অপেক্ষকটি সন্তত। অতএব এই বিন্দুতে যোগফল অপেক্ষকটির মান = $f(\pi/2) = k$

অর্থাৎ $$k = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

13.3.2 কোসাইন শ্রেণী

ধরি $[0, \pi]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত $f(x)$ অপেক্ষকটি ঐ অন্তরালে দিরিক্লের শর্তাবলী পালন করে। এখন $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে এমন একটি যুগ্ম অপেক্ষক $F(x)$ সংজ্ঞিত করা হল যে,

$$F(x) = f(x), \qquad 0 \le x \le \pi$$

এবং $$F(x) = F(-x)$$

$$= f(-x) \qquad -\pi \le x \le 0$$

তাহলে $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত যুগ্ম অপেক্ষক $F(x)$ ঐ অন্তরালে দিরিক্লের শর্তাবলী পালন করবে। এখন যদি $F(x + 2\pi) = F(x)$ সম্পর্কটি দ্বারা $F(x)$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার ক্ষেত্রটিকে $(-\infty, \infty)$ অন্তরালে সম্প্রসারিত করা হয়, তাহলে এই অপেক্ষকটিকে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করা সম্ভব হবে। কিন্তু, এক্ষেত্রে

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)\cos nt\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\, dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

এবং $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin nt\, dt$$

$$= 0$$

অতএব এই অপেক্ষকটির বিস্তৃতিতে সাইন অপেক্ষকগুলি থাকবে না।

আবার, এখানে $F(x)$ যুগ্ম অপেক্ষক হওয়ায়

$$\frac{1}{2}[F(+0)+F(-0)] = \frac{1}{2}[F(+0)+F(+0) = f(+0)$$

এবং $$\frac{1}{2}[F(-\pi+0)+F(\pi-0)] = \frac{1}{2}[F(\pi-0)+F(\pi-0)] = F(\pi-0)$$

$$= f(\pi - 0)$$

(যদি $f(+0)$ এবং $f(\pi - 0)$ সীমা দুটির অস্তিত্ব থাকে)। অতএব এক্ষেত্রে $x = 0$ বিন্দুতে ফুরিয়ার শ্রেণীর যোগফল $f(+0)$ এবং $x = \pi$ বিন্দুতে এটি $f(\pi - 0)$.

অতএব নিচের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

যদি কোন যদৃচ্ছ অপেক্ষক $f(x)$, $[0, \pi]$ অন্তরালে দিরিক্লেব শর্তাবলী পালন করে তাহলে

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt + \frac{2}{\pi}\sum_1^{\infty}\cos nx\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\, dt$$

কোসাইন শ্রেণীটির যোগফল হবে $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, যখন $0 < x < \pi$

0 এবং π বিন্দুতে এই যোগফল হবে যথাক্রমে $f(0+)$ এবং $f(\pi - 0)$

উদাহরণ 3 : $0 < x < \pi$ অন্তরালে সংজ্ঞিত $f(x) = \pi - x$ অপেক্ষকটির কোসাইন শ্রেণিটি নির্ণয় করুন।

সমাধান : $-\pi < x < 0$ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকটিকে $f(x) = f(-x) = \pi + x$ সংজ্ঞিত করলে $-\pi < x < \pi$ অন্তরালে নতুন করে সংজ্ঞিত $f(x)$ অপেক্ষকটি যুগ্ম অপেক্ষক হল। তাই এই অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীতে কোনসাইন অপেক্ষকের পদ থাকবে না এবং শ্রেণীটির সহগগুলি হবে

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - k)\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\left[(\pi - x)\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - (-1)\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}[\cos nx]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}[1-(-1)^n], \quad n \neq 0$$

$f(x)$ অপেক্ষকটি $0 < x < \pi$ অন্তরালে সন্তত বলে, আমরা লিখতে পারি

$$\pi - x = \frac{1}{2}\pi + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right)$$

$x = 0$ বিন্দুতে শ্রেণীটির যোগফল হবে $f(0+) = \pi$ এবং $x = \pi$ বিন্দুতে শ্রেণীটির যোগফল হবে $f(\pi-) = 0$। উভয় সম্পর্ক থেকেই আমরা নিচের সূত্রটি পাই,

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

13.3.3 সাইন শ্রেণী

ধরি $[0, \pi]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত $f(x)$ অপেক্ষকটি ঐ অন্তরালে দিরিক্লের শর্তগুলি পালন করে। এখন $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে এমন একটি অযুগ্ম অপেক্ষক $F(x)$ সংজ্ঞিত করা হল যে

$$F(x) = f(x), \qquad 0 \le x \le \pi$$

এবং $$F(x) = -F(-x) = -f(-x), \quad -\pi \le x \le 0$$

তাহলে $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত অযুগ্ম অপেক্ষক $F(x)$ ঐ অন্তরালে দিরিক্লের শর্তগুলি পালন করবে। এবারে $F(x)$ অপেক্ষকটির সংজ্ঞার ক্ষেত্রকে $F(x + 2\pi) = F(x)$ সম্পর্কটি দ্বারা $(-\infty, \infty)$ অন্তরালে সম্প্রসারিত করা হলে এটিকে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করা সম্ভব হবে। কিন্তু $F(x)$ অযুগ্ম অপেক্ষক হওয়ায় এর ফুরিয়ার শ্রেণীতে কোসাইন অপেক্ষকের পদগুলি থাকবে না কারণ, এক্ষেত্রে

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\, dt = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

এবং $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin nt\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)\sin nt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\, dt \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

যেহেতু $x = 0$ এবং π হলে

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

শ্রেণীটির প্রত্যেক পদের মান শূন্য, এই দুটি বিন্দুতে ফুরিয়ার শ্রেণীটির যোগফল হবে শূন্য। অতএব নিচের উপপাদ্যটি প্রমাণিত হল।

যদি কোন যদৃচ্ছ অপেক্ষক $f(x)$, $[0, \pi]$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্তগুলি পালন করে তাহলে

$$\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\sin nx \int_0^{\pi} f(t)\sin nt\, dt$$

সাইন শ্রেণীটির যোগফল হবে

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)], \quad 0 < x < \pi$$

এবং যখন $x = 0$ অথবা $x = \pi$, যোগফলটির মান শূন্য।

উদাহরণ 4 : $0 < x < \pi$ অন্তরালে সংজ্ঞিত $f(x) = \pi - x$ অপেক্ষকটিকে ফুরিয়ারের সাইন শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন।

সমাধান : ধরি $F(x) = f(x) = \pi - x$, যখন $0 < x < \pi$

এবং $F(x) = -F(-x)$

$$= -f(-x) = \pi + x, \quad \text{যখন } -\pi < x < \pi$$

তাহলে $F(x)$ অপেক্ষকটি $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত একটি অযুগ্ম অপেক্ষক এবং $F(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীই হবে নির্ণেয় সাইন শ্রেণী। $F(x)$ অযুগ্ম অপেক্ষক বলে এর ফুরিয়ার শ্রেণীতে কোন কোসাইন অপেক্ষকের পদ থাকবে না অর্থাৎ

$$a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

এবং

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\ dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - t)\sin nt\ dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(\pi - t)\left(\frac{-\cos nt}{n}\right) + 1\left(\frac{-\sin nt}{n^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n}$$

যেহেতু $(0, \pi)$ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকটি সন্তত, অতএব

$$f(x) = \pi - x = \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right), \quad 0 < x < \pi$$

মন্তব্য 1 ; উপরের ফুরিয়ার শ্রেণীটির $x = 0$ এবং $x = \pi$ উভয় বিন্দুতেই যোগফল শূন্য। কিন্তু $x = 0$ বিন্দুতে $f(0) = \pi \neq 0$.

মন্তব্য 2 : $[0, \pi]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত অপেক্ষকের ফুরিয়ারের সাইন ও কোসাইট শ্রেণীগুলিকে অর্ধ-পাল্লার (half-range) শ্রেণী বলা হয়। অর্ধ-পাল্লার সাইন ও কোসাইন শ্রেণি দুটির যোগফল-অপেক্ষক 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক।

13.4 $[-\pi, \pi]$ ব্যতীত অন্যান্য অন্তরালের ফুরিয়ার শ্রেণী

$f(x)$ অপেক্ষকটি $[-\pi, \pi]$ অন্তরাল ব্যতীত অন্য কোনো সীমিত অন্তরালে সংজ্ঞিত হলে এবং ঐ অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালন করলে আমরা উপযুক্ত প্রতিস্থাপন দ্বারা ঐ অন্তরালটিকে $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে পরিবর্তিত করতে পারি। তাই $[-\pi, \pi]$ অন্তরাল ব্যতীত অন্যান্য অন্তরালেও কোন অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃতি সম্ভব।

13.4.1 অন্তরাল $[0, 2\pi]$

$x = \pi + y$ প্রতিস্থাপন করে পাই $0 < x < 2\pi \Rightarrow -\pi < y < \pi$, অর্থাৎ x চলটির এলাকা 0 থেকে 2π হলে y চলটির এলাকা $-\pi$ থেকে π.

ধরি $f(x) = f(\pi + y) = F(y) =$ একটি 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক। এখন $f(x)$ অপেক্ষকটি $[0, 2\pi]$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্তগুলি পালন করলে $F(y)$ অপেক্ষকটি $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে অনুরূপ শর্ত পালন করবে।

অতএব $\frac{1}{2}a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n \cos ny + b'_n \sin ny)$ শ্রেণীটির

[যেখানে $a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\cos ny\, dy. \quad n = 0, 1, 2, \cdots$

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\sin ny\, dy \quad n = 1, 2, \ldots$$]

যোগফল $\frac{1}{2}[F(y+0)+F(y-0)]$, যখন $-\pi < y < \pi$, এবং এই যোগফল

$$= \frac{1}{2}[F(-\pi+0)+F(\pi-0)], \text{ যখন } y = \pm\pi$$

কিন্তু
$$a'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\cos ny\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} F(x-\pi)\cos n(x-\pi)\, dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{0}^{2\pi} F(x-\pi)\cos nx\, dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$a'_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} F(x-\pi)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$b'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y)\sin ny\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} F(x-\pi)\sin n(x-\pi)\, dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

অতএব $\frac{1}{2}a'_0 + \sum_{1}^{\infty}(a'_n\cos ny + b'_n\sin ny)$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\cos n(x-\pi)\left[(-1)^n\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\sin n(x-\pi)\left[(-1)^n\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty a_n \cos nx + \sum_1^\infty b_n \sin nx$$

যেখানে $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

আবার, $\frac{1}{2}[F(y+0) + F(y-0)] = \frac{1}{2}[f(y+\pi+0) + f(y+\pi-0)]$

$$= \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$$

এবং $\frac{1}{2}[F(-\pi+0) + F(\pi-0)]$

$$= \frac{1}{2}[f(\pi-\pi+0) + f(\pi+\pi-0)]$$

$$= \frac{1}{2}[f(0+) + f(2\pi-0)]$$

তাহলে প্রমাণিত হল যে, যদি $f(x)$ একটি 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক হয় এবং $(0, 2\pi)$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্তগুলি পালন করে তবে

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx + \sum_1^\infty \cos nx \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt + \sum_1^\infty \sin nx \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

ত্রিকোণমিতিক শ্রেণীটির যোগফল হবে $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0), 0 < x < 2\pi$ এবং যোগফল $\frac{1}{2}[f(0+) + f(2\pi-0)]$ যখন $x = 0$ এবং $x = 2\pi$.

উদাহরণ 5 : $f(x) = e^x,\ 0 \le x \le 2\pi$

অপেক্ষকটিকে ফুরিয়ারের শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন। এবং এটি প্রয়োগ করে $\sum_l^\infty \frac{1}{k^2+1}$ শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : $0 \le x \le 2\pi$ অন্তরালে $f(x) = e^x$ এবং এর অন্তরকলজ $f'(x) = e^x$ উভয়েই সন্তত বলে এই অন্তরালে অপেক্ষকটি দিরিক্লের শর্ত পালন করছে। এবারে $f(x + 2\pi) = f(x)$ এই সম্পর্কটি প্রয়োগের সংজ্ঞার ক্ষেত্রকে $-\infty < x < \infty$ অন্তরালে সম্প্রসারিত করা হল। তাহলে $f(x)$ অপেক্ষকটিকে

ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করা সম্ভব। এবং বিস্তৃতিটির যোগফল অপেক্ষককে $S(x)$ দিয়ে নির্দেশিত করলে পাই,

$$S(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^t dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx\int_0^{2\pi} e^t \cos kt\, dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx\int_0^{2\pi} e^t \sin kt\, dt$$

এবং $S(x) = \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ যখন $0 < x < 2\pi$

$$S(0) = \frac{1}{2}[f(0+)+f(2\pi-0)] = S(2\pi)$$

এখন $\int_0^{2\pi} e^t \cos kt\, dt = \frac{1}{k^2+1}\{e^t[\cos kt + k\sin kt]\}_0^{2\pi}$

$$= (e^{2\pi}-1)\frac{1}{k^2+1} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

এবং $\int_0^{2\pi} e^t \sin kt\, dt = -(e^{2\pi}-1)\frac{k}{k^2+1}$, $k = 1, 2, \ldots$

অতএব $\frac{1}{2}[f(x+0)f(x-0)] = S(x)$

$$\Rightarrow\ f(x) = S(x) = \frac{1}{2\pi}(e^{2\pi}-1) + \frac{1}{\pi}(e^{2\pi}-1)\sum_1^{\infty}\frac{1}{k^2+1}\cos kx$$

$$+\frac{1}{\pi}(e^{2\pi}-1)\sum_1^{\infty}\frac{-k}{k^2+1}\sin kx, \text{ যখন } 0 < x < 2\pi$$

আবার $S(0) = \frac{1}{2}[f(0+)+f(2\pi-0)]$ সম্পর্কটি থেকে পাই,

$$\frac{1}{2\pi}(e^{2\pi}-1) + \frac{1}{\pi}(e^{2\pi}-1)\sum_1^{\infty}\frac{1}{k^2+1} = \frac{1}{2}(1+e^{2\pi})$$

অর্থাৎ $$\sum_1^{\infty}\frac{1}{k^2+1} = \frac{1}{2}\frac{(e^{2\pi}+1)}{e^{2\pi}-1}\pi - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}\coth\pi - \frac{1}{2}$$

$$= (\pi \ \mathrm{cot}h\ \pi - 1)/2$$

13.4.2 অন্তরাল [–*l*, *l*]

ধরি, $f(x)$, $(-l, l)$ অন্তরালে $2l$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক।

$y = \pi \frac{x}{l}$ বসিয়ে পাই

$-l < x < l \Rightarrow -\pi < \pi \frac{x}{l} \pi$

$\Rightarrow - \pi < y < \pi$

এবং $f(x) = f\left(\frac{l}{\pi} y\right) = F(y)$ ধরি

$= F\left(\frac{\pi}{l} x\right)$

অতএব, $f(x)$ অপেক্ষকটি $(-l, l)$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্তপালন করলে $F(y)$ অপেক্ষকটি $(-\pi, \pi)$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালন করবে।

আবার $f(x)$ অপেক্ষকটি $2l$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক বলে।

$$f(x + 2l) = f(x) \Rightarrow f\left(\frac{1}{\pi} y + 2l\right) = f\left(\frac{1}{\pi} y\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{\pi}(y + 2\pi)\right) = F(y)$$

$$\Rightarrow F(y + 2\pi) = F(y)$$

অর্থাৎ $F(y)$, 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক। কাজেই $F(y)$ অপেক্ষকটিকে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করা সম্ভব।

ধরি, $\frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos ny + b_n' \sin ny)$

(যেখানে, $a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y) \cos ny \, dy \quad n = 0, 1, 2, \cdots$

এবং $a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y) \sin ny \, dy \quad n = 1, 2, 3, \cdots)$

হল $F(y)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী।

এই শ্রেণীটির যোগফল অপেক্ষককে $S(y)$ দিয়ে নির্দেশিত করে পাই

$S(y) = \frac{1}{2}[F(y + 0) + F(y - 0)]$ যখন $- \pi < y < \pi$

এবং $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}[F(-\pi + 0) + F(\pi - 0)]$

কিন্তু $a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(y) \cos ny \, dy$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} F\left(\frac{\pi}{l} x\right) \cos n \frac{\pi}{l} x \, dx . \frac{\pi}{l}$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

অনুরূপভাবে $b'_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

অতএব $\frac{1}{2}a'_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a'_k \cos ky + b'_k \sin ky)$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos ky\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin ky\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx + \frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\frac{\pi}{l}x\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,dx$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\frac{\pi}{l}x\int_{-l}^{l} f(x)\sin k\frac{\pi}{l}x\,dx$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_k \cos k\frac{\pi}{l}x + \sum_{1}^{\infty} b_k \sin k\frac{\pi}{l}x \quad \text{(ধরি)}$$

যেখানে $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,dx, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin k\frac{\pi}{l}x\,dx, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

আবার, $\frac{1}{2}[F(y+0) + F(y-0)] = \frac{1}{2}\lim_{\substack{h\to 0+\\ h>0}} [F(y+h) + F(y-h)]$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0+}\left[F\left(\frac{\pi}{l}x + h\right) + F\left(\frac{\pi}{l}x - h\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0+}\left[F\left(\frac{\pi}{l}(x+k)\right) + F\left(\frac{\pi}{l}(x-k)\right)\right]$$

(যেখানে $k = \frac{l}{\pi}h \to 0$ যখন $h \to 0$)

$$= \frac{1}{2} \lim_{k \to 0+} [f(x+k) + f(x-k)]$$

$$= \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)]$$

$$= \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$$

এবং $\frac{1}{2}[F(-\pi+0) + F(\pi-0) = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{l}{\pi}(-\pi+0)\right) + f\left(\frac{l}{\pi}(\pi-0)\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}[f(-l+0) + f(l-0)]$$

তাহলে, প্রমাণিত হল যে, যদি $f(x)$ একটি $2l$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক হয় এবং $(-l, l)$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালন করে তবে

$$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty}\cos k\frac{\pi}{l}x\int_{-l}^{l} f(t)\cos k\frac{\pi}{l}t\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\sin k\frac{\pi}{l}x\int_{-l}^{l} f(t)\sin k\frac{\pi}{l}t\,dt$$

ত্রিকোণমিতিক শ্রেণীটির যোগফল হবে $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, যখন $-l < x < l$ এবং

এই যোগফলটি হবে $\frac{1}{2}[f(-l+0) + f(l-0)]$, যখন $x = -l$ অথবা l

উদাহরণ 6 : $f(x) = 0, \quad -2 < x < 0$

$= 1, \quad 0 < x < 2$

$f(x+4) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$

উপরে সংজ্ঞিত অপেক্ষকটিকে $(-2, 2)$ অন্তরালে ফুরিয়ার শ্রেণির বিস্তৃত করুন।

সমাধান ঃ প্রদত্ত আপেক্ষকটি $(-2, 2)$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালন করে এবং এটি একটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক ; এর পর্যায় 4. অতএব একে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করা সম্ভব। বিস্তৃতিটির সহগগুলি হবে

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

অর্থাৎ, $$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos n\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2} 1.\cos n\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos nu\, du) \times \frac{2}{\pi} \quad \left(\frac{\pi}{2}x = u \text{ বসিয়ে}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nu\, du$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nu}{n}\right]_0^{\pi} = 0, \qquad n \neq 0,\ n = 1,\ 2,\ \cdots$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 1.\, dx = 1$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 1.\sin n\frac{\pi}{2}x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nu\, du = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos nu}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = 0, \quad \text{যখন } n = \text{যুগ্ম}$$

$$= \frac{2}{(2k-1)\pi}, \quad \text{যখন } n = 2k-1,\ k = 1, 2, 3,\ \cdots$$

অতএব নির্ণেয় ফুরিয়ার শ্রেণীটি হল

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x\frac{\pi}{2}}{2k-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{1} + \frac{\sin 3\frac{\pi}{2}x}{3} + \frac{\sin 5\frac{\pi}{2}x}{5} + \ldots\right]$$

13.4.3 অনুসিদ্ধান্ত

(0, l) অন্তরালে অর্ধ-পাল্লার সাইন ও কোসাইন শ্রেণী (Half-range Sine and Cosine series in 0, l)]

1. $f(x)$ অপেক্ষকটি (0, l) অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালন করলে

$$\frac{1}{l}\int_0^l f(t)dt + \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\cos n\frac{\pi}{l}x\int_0^l f(t)\cos n\frac{\pi}{l}t\, dt, \qquad 0 \leq x \leq l$$

শ্রেণীটির যোগফল হবে $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, যখন $0 < x < l$ এবং $x = 0$ ও $x = l$ বিন্দু দুটিতে এই শ্রেণীটির যোগফল হবে যথাক্রমে $f(0+)$ এবং $f(l-)$.

2. $f(x)$ অপেক্ষকটি $(0, l)$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালন করলে

$$\frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\sin n\frac{\pi}{l}x\int_0^l f(t)\sin n\frac{\pi}{l}t\,dt, \qquad 0 \le x \le l$$

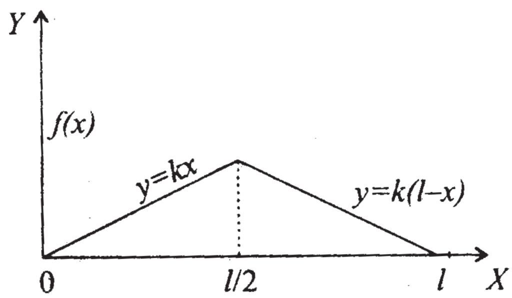
শ্রেণীটির যোগফল হবে $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, যখন $0 < x < l$, $x = 0$ এবং $x = l$ বিন্দু দুটিতে এই যোগফল হবে 0. [$u = \pi\frac{x}{l}$ প্রতিস্থাপন করে $(0, l)$ অন্তরালটিকে $(0, \pi)$ অন্তরালে পরিবর্তিত করা যায় অতঃপর 13·3·2 এবং 13·3·3 পরিচ্ছেদে প্রাপ্তফল প্রয়োগ করুন।]

উদাহরণ 7. $f(x) = kx, \qquad 0 \le x \le \frac{l}{2}$

$$= k\,(l - x), \qquad \frac{l}{2} \le x \le l$$

অপেক্ষকটির অর্ধ-পাল্লার কোসাইন শ্রেণীটি নির্ণয় করুন এবং $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\ldots$ শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত অপেক্ষক $(0, l)$ অন্তরালে সন্তত। $x = \frac{l}{2}$ বিন্দুতে $f'(x)$-এর অস্তিত্ব নেই। কিন্তু ঐ বিন্দুতে $f'_R(x) \equiv$ সামান্যীকৃত দক্ষিণপক্ষীয় অন্তরকলজ $= -k$ এবং $f'_L(x) \equiv$ সামান্যীকৃত বামপক্ষীয় অন্তরকলজ $= k$. অতএব $f(x)$ এই অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালন করছে। [এই অপেক্ষকটির লেখচিত্র পাশে দেওয়া হল।]



অর্ধ-পাল্লার কোসাইন শ্রেণীটি হচ্ছে

$$\frac{1}{l}\int_0^l f(t)dt + \frac{2}{l}\sum_{1}^{\infty}\cos n\frac{\pi}{l}x\int_0^l \cos n\frac{\pi}{l}t\,f(t)dt$$

এখন

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \cos n\frac{\pi}{l} t\, f(t)dt$$

$$= \frac{2}{l}\left[\int_0^{l/2} kt\cos n\frac{\pi}{l}t\,dt + \int_{l/2}^{l} k(l-t)\cos n\frac{\pi}{l}t\,dt\right]$$

$$= \frac{2k}{l}\left[\int_0^{l/2} t\cos n\frac{\pi}{l}t\,dt + \int_0^{l/2} u\cos\left(n\pi - \frac{n\pi}{l}u\right)du\right]$$

(দ্বিতীয় সমাকলটিতে $l - t = u$ বসিয়ে)

$$= \frac{2k}{l}\left[1+(-1)^n\right]\int_0^{l/2} t\cos n\frac{\pi}{l}t\,dt$$

$= 0$, যখন n অযুগ্ম

এবং $\quad a_n = a_2{}^m = \dfrac{4k}{l}\displaystyle\int_0^{l/2} t\cos^2\frac{m}{l}\pi t\,dt,\qquad$ যখন $n = 2m$

$(m = 1, 2, 3, \ldots)$

এবার $\dfrac{2\pi}{l}t = v$ বসিয়ে পাই

$$a_2m = \frac{4k}{l}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\int_0^{\pi} v\cos mv\,dv$$

$$= \frac{lk}{\pi^2}\left[v\left(\frac{\sin mv}{m}\right) - 1.\left(-\frac{\cos mv}{m^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$= -\dfrac{lk}{\pi^2 m^2}\left[1-(-1)^m\right] = 0$, যখন m যুগ্ম

$= -\dfrac{lk}{\pi^2(2r+1)^2}$ যখন m (অযুগ্ম) $= 2r+1$, $r = 0, 1, 2, \ldots$

অতএব $a_{4r+2} = -\dfrac{8lk}{\pi^2}\dfrac{1}{(4r+2)^2}$, $r = 0, 1, 2, ...$

আবার $\quad \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{l}\int_0^l f(t)\,dt$

$$= \frac{1}{l}\left[\int_0^{l/2} k\,x\,dx + \int_{l/2}^{l} k(l-x)dx\right]$$

$$= \frac{k}{l}\left[\int_0^{l/2} x\,dx + \int_o^{l/2} u\,dx\right] = \frac{2k}{l}\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{2} = \frac{kl}{4}$$

অতএব নির্ণেয় শ্রেণীটি হচ্ছে

$$\frac{kl}{4} - \frac{8kl}{\pi^2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\cos(4r+2)x}{(4r+2)^2}$$

$$= \frac{kl}{4} - \frac{8kl}{\pi^2}\left[\frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{6^2} + \frac{\cos 10x}{10^2} + \ldots\right]$$

$x = 0$ বিন্দুতে এই শ্রেণীটির যোগফল হচ্ছে $f(0+)$

অতএব $k\dfrac{l}{4} = \dfrac{8kl}{\pi^2}\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(4r+2)^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

উদাহরণ 8 : নিচের অপেক্ষকটিকে একটি সাইন শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন :

$$f(x) = \sin x, \text{ যখন } 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$$

$$= \cos x, \text{ যখন } \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

সমাধান : $f(x)$ অপেক্ষকটি $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ অন্তরালে সন্তত। $\frac{\pi}{4}$ বিন্দুটিতে এর অন্তরকলজের অস্তিত্ব নেই। কিন্তু $f'_R\left(\frac{\pi}{4}\right), f'_L\left(\frac{\pi}{4}\right)$ সীমা দুটি বিদ্যমান $\left[f'_R\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}, f'_L\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\right]$ অতএব অপেক্ষকটি দিরিক্লের শর্ত পালন করছে। কাজেই এই অপেক্ষকটির $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ অন্তরালে অর্ধ-পাল্লার সাইন শ্রেণীটি হচ্ছে

$$\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\sum_1^{\infty} \sin n\frac{\pi}{l}x\int_0^l f(t)\sin n\frac{\pi}{l}t\,dt, \qquad l = \frac{\pi}{2}$$

$$= \sum_1^{\infty} b_n \sin n\frac{\pi}{l}x = \sum_1^{\infty} b_n \sin 2nx$$

যেখানে

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi/2} f(t)\sin n\frac{\pi}{\frac{\pi}{2}}t\,dt \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\sin 2nt\,dt \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\pi/4}\sin t\sin 2nt\,dt + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos t\sin 2nt\,dt\right] \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\pi/4}\sin t2nt\,dt + \int_0^{\pi/4}\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\sin 2n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)du\right] \\
&= \frac{4}{\pi}\left[1+(-1)^{n+1}\right]\int_0^{\pi/4}\sin t\sin 2nt\,dt \\
&= \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin t\sin 2nt\,dt, \text{ যখন } n \text{ অযুগ্ম}
\end{aligned}$$

অর্থাৎ,

$$\begin{aligned}
b_2m_{-1} &= \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin t\sin(4m-2)t\,dt, \qquad n = 2m-1, \quad m = 1, 2, 3, \cdots \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}[\cos(4m-3)t - \cos(4m-1)t]dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(4m-3)t}{4m-3} - \frac{\sin(4m-1)t}{4m-1}\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{4m-3}\sin\left(m\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{4m-1}\sin\left(m\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}(-1)^{m+1}\frac{1}{(4m-1)(4m-3)}$$

অতএব নির্ণেয় সাইন শ্রেণী

$$\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{1}{(4m-1)(4m-3)}\sin(4m-2)x$$

$$= \frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}\left[\frac{\sin 2x}{1.3} - \frac{\sin 6x}{5.7} + \frac{\sin 10x}{9.11} + \ldots\right]$$

13.4.4 যে-কোন $[a, b]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণী

উপপাদ্য : $f(x)$ অপেক্ষকটি $[a, b]$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্তগুলি পালন করলে

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi(2x-a-b)}{(b-a)}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi(2x-a-b)}{(b-a)}\right)\right]$$

শ্রেণীটির যোগফল হবে

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)], \qquad \text{যখন } a < x < b$$

এবং

$$\frac{1}{2}[f(a+)+f(b-)], \qquad \text{যখন } x = a,\ b$$

এখানে

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)\cos\frac{n\pi(2u-a-b)}{b-a}\,du, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

এবং $$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)\sin\frac{n\pi(2u-a-b)}{b-a}\,du, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

এবং শ্রেণীটি $(b - a)$ পর্যায়যুক্ত হবে।

প্রমাণ : $y = \dfrac{\pi(2x-a-b)}{b-a}$ (1) প্রতিস্থাপন করে পাই

$$a < x < b \Rightarrow -\pi < y < \pi$$

কারণ (1) থেকে পাই $\dfrac{(b-a)y}{\pi} + a + b = 2x$

অর্থাৎ $$\frac{b-a}{2\pi}y + \frac{a+b}{2} = x$$

অতএব $$x > a \Rightarrow \frac{b-a}{2\pi}y + \frac{a+b}{2} > a$$

$$\Rightarrow \frac{(b-a)}{\pi}y + (a+b) < 2a$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{\pi}y > a-b$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\pi} > -1 \Rightarrow y > -\pi$$

এবং অনুরূপভাবে $$x < b \Rightarrow \frac{b-a}{2\pi}y + \frac{a+b}{2} < b$$

$$\Rightarrow \frac{(b-a)}{\pi}y + (a+b) < 2b$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{\pi}y < b-a \Rightarrow y < \pi$$

অতএব, $$a < x < b \Rightarrow -\pi < y < \pi$$

আবার, $f(x) = f\left(\frac{b-a}{2\pi} y + \frac{b+a}{2}\right) = F(y)$ (ধরি)

অতএব $f(x)$ অপেক্ষকটি $[a, b]$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্তাবলী পালন করলে $F(y)$ অপেক্ষকটি $[-\pi, \pi]$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্তাবলী পালন করবে।

এবং $f(x)$ অপেক্ষকটি $(b - a)$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক হল $F(y)$ অপেক্ষকটি 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক হবে। কারণ, $f(x)$ অপেক্ষকটি $(b - a)$ পর্যায়ভুক্ত হলে

$$f(x + b - a) = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad f\left(\frac{b-a}{2\pi} y + b - a + \frac{b+a}{2}\right) = F(y)$$

$$\Rightarrow \quad f\left(\frac{b-a}{2\pi}(y + 2\pi) + \frac{b+a}{2}\right) = F(y)$$

অর্থাৎ $F(y + 2\pi) = F(y)$

অতঃপর 13.4.2 পরিচ্ছেদে বর্ণিত পদ্ধতিতে অগ্রসর হলে উপপাদ্যটি প্রমাণিত হবে।

13.4.5 $[a, b]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত অপেক্ষকের কোসাইন শ্রেণী, সাইন শ্রেণী

ধরি, $y = lx + m$ প্রতিস্থাপন দ্বারা $a < x < b$ অন্তরালটিকে $0 < y < \pi$ অন্তরালে পরিবর্তিত করা যায়।

তাহলে $0 = la + m$

এবং $\pi = lb + m$ শর্তদুটি সিদ্ধ হবে।

ফলে $l = \frac{\pi}{b-a}$ এবং $m = -\frac{\pi a}{b-a}$

এবং $y = \frac{\pi}{b-a}(x - a) \Rightarrow x = a + \frac{b-a}{\pi} y$

অর্থাৎ $f(x) = f\left[a + \frac{b-a}{\pi} y\right] \equiv F(y)$ (ধরি)

অতএব $[a, b]$ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞিত হলে $[0, \pi]$ অন্তরালে $F(y)$ অপেক্ষকটি সংজ্ঞিত হবে।

ধরি, $F(y)$ অপেক্ষকটিকে ফুরিয়ারের কোসাইন শ্রেণীতে বিস্তৃত করা সম্ভব এবং বিস্তৃতিটি হল

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos ky$$

যেখানে $$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(y)dy \text{ এবং}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(y)\cos ky\, dy$$

এখন $y = \frac{\pi}{b-a}(x-a)$ অর্থাৎ $x = \frac{b-a}{\pi}y + a$ বসিয়ে পাই

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b F\Big(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\Big)dx = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

এবং $$a_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\Big(k\frac{\pi}{b-a}(x-a)\Big)dx$$

অতএব $[a, b]$ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকটির কোসাইন শ্রেণীটি হবে

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$+\frac{2}{b-a}\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\frac{\pi(x-a)}{b-a}\int_a^b f(t)\cos k\pi\frac{(t-a)}{b-a}dt \qquad a \le x \le b$$

অনুরূপভাবে দেখানো যাবে যে, এই অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকটির সাইন শ্রেণটি হল

$$\frac{2}{b-a}\sum_{1}^{\infty}\sin k\pi\Big(\frac{x-a}{b-a}\Big)\int_a^b f(t)\sin k\pi\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big)dt, \qquad a \le x \le b$$

উদাহরণ 9. $5 < x < 15$ অন্তরালে $f(x) = 10 - x$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন।

সমাধান : অপেক্ষকটি (5, 15) অন্তরালে দিরিক্লের শর্তগুলি পালন করে। $f(x + 10) = f(x)$ সম্পর্কটি দ্বারা এই অপেক্ষকটির সংজ্ঞার ক্ষেত্রকে $(-\infty, \infty)$ অন্তরালে সম্প্রসারিত করি। তাহলে এই অপেক্ষকটির (5, 15) অন্তরালে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করা সম্ভব এবং শ্রেণীটি হবে

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left[\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\right] + \sum_{1}^{\infty} b_n \sin\left[\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\right]$$

যেখানে, $a = 5$, $b = 15$ এবং

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)\cos\left[\frac{n\pi(2u-a-b)}{b-a}\right]du, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)\sin\left[\frac{n\pi(2u-a-b)}{b-a}\right]du, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

a এবং b-এর মান বসিয়ে পাই

$$a_n = \frac{2}{10}\int_5^{15}(10-x)\cos\left(\frac{n\pi(2x-20)}{10}\right)dx$$

$$= \frac{1}{5}\int_5^{15}(10-x)\cos\left\{\frac{n\pi}{5}(x-10)\right\}dx$$

$\frac{\pi}{5}(x-10) = u$ বসিয়ে পাই,

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{5u}{\pi}\cos nu\left(\frac{5}{u}\right)du$$

$$= -\frac{5}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} u\cos nu\, du = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = -\frac{5}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} u\sin nu\, du$$

$$= -\frac{10}{\pi^2}\int_0^{\pi} u\sin nu\, du$$

$$= -\frac{10}{\pi^2}\left[u\left(\frac{-\cos nu}{n}\right) - 1\left(\frac{-\sin nu}{n^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{10}{n\pi^2}\pi\cos n\pi$$

$$= \frac{10}{\pi}\frac{(-1)^n}{n}$$

অতএব নির্ণেয় ফুরিয়ার শ্রেণীটি হল

$$\frac{10}{\pi}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \sin(x-10)\frac{n\pi}{5}$$

$$= \frac{10}{\pi}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{n\pi x}{5}-2n\pi\right) = \frac{10}{\pi}\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{n\pi x}{5}$$

উদাহরণ 10 : নিচের অপেক্ষকটিকে $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ অন্তরালে ফুরিয়ার কোসাইন শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন।

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{যখন } \frac{3}{2} < x \leq 2 \\ 3-x, & \text{যখন } 2 < x < 3 \end{cases}$$

সমাধান : $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকটি সন্তত। $x = 2$ বিন্দুতে $f(x)$-এর অন্তরকলজ সংজ্ঞিত নয়। কিন্তু সামান্যীকৃত বামপক্ষীয় অন্তরকলজ $f'_L(x) = 0$ সামান্যীকৃত দক্ষিণপন্থীয় অন্তরকলজ $f'_R(x) = -1$, অতএব অপেক্ষকটি এই অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালন করে। $f\left(x+\frac{3}{2}\right) = f(x), -\infty < x < \infty$ সম্পর্কটি দ্বারা অপেক্ষকটির সংজ্ঞার ক্ষেত্রকে $(-\infty, \infty)$ অন্তরালে সম্প্রসারিত করা হল। অতএব $f(x)$ অপেক্ষকটিকে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করা সম্ভব।

13.4.5 পরিচ্ছেদে প্রদত্ত সূত্র অনুসারে নির্ণেয় কোসাইন শ্রেণীটি হচ্ছে

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_k \cos k\pi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

যেখানে $a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \qquad a = 3/2,\ b = 3$

এবং $a_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos k\pi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)dx, \qquad a = 3/2,\ b = 3$

অতএব

$$a_0 = \frac{2}{\frac{3}{2}}\int_{3/2}^{3} f(x)dx = \frac{4}{3}\int_{3/2}^{2} 1.\,dx + \frac{4}{3}\int_{2}^{3}(3-x)\,dx$$

$$= \frac{4}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)_2^3$$

$$= \frac{2}{3}+\frac{4}{3}\left(3-\frac{3^2}{2}+\frac{2^2}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}+\frac{4}{3}\left(5-\frac{9}{2}\right) = \frac{2}{3}+\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a_k = \frac{4}{3}\int_{3/2}^{2}\cos k\pi\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}\right)dx + \frac{4}{3}\int_{2}^{3}(3-x)\cos k\pi\left(\frac{2}{3}x-1\right)dx$$

$$= \frac{4}{3}\int_{3/2}^{2}\cos\left(k\pi - 2k\pi\frac{x}{3}\right)dx + \frac{4}{3}\int_{2}^{3}(3-x)\cos\left(k\pi - 2k\frac{\pi}{3}x\right)dx$$

$$= \frac{4}{3}(-1)^k\int_{3/2}^{2}\cos 2k\pi\frac{x}{3}\,dx + \frac{4}{3}(-1)^k\int_{2}^{3}(3-x)\cos 2k\pi\frac{x}{3}\,dx$$

$$= \frac{4}{3}(-1)^k\left[\frac{\sin 2k\pi\frac{x}{3}}{2k\frac{\pi}{3}}\right]_2^3 + \frac{4}{3}(-1)^k\left[(3-x)\frac{\sin 2k\pi\frac{x}{3}}{2k\frac{\pi}{3}} - \frac{\cos 2k\pi\frac{x}{3}}{\left(2k\frac{\pi}{3}\right)^2}\right]_2^3$$

$$= \frac{2(-1)^k}{k\pi}\left[\sin 4k\frac{\pi}{3} - \sin k\pi\right] + \frac{2(-1)^k}{k\pi}\left[(3-x)\sin 2k\pi\frac{x}{3} - \frac{3}{2k\pi}\cos 2k\pi\frac{x}{3}\right]_2^3$$

$$= \frac{2(-1)^k}{k\pi}\left[\sin 4k\frac{\pi}{3} - 0\right] + \frac{2(-1)^k}{k\pi}\left[-\sin 4k\frac{\pi}{3} - \frac{3}{2k\pi}\cos 2k\pi + \frac{3}{2k\pi}\cos 4k\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= \frac{2(-1)^k}{k\pi}\times\frac{3}{2k\pi}\left[\cos 4k\frac{\pi}{3} - \cos 2k\pi\right]$$

$$= \frac{3(-1)^k}{k^2\pi^2}\left[\cos 4k\frac{\pi}{3} - 1\right]$$

অতএব নির্ণেয় শ্রেণীটি হচ্ছে

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^2}\left(\cos 4k\frac{\pi}{3}-1\right)\cos\left(\frac{2}{3}k\pi x-k\pi\right)$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\left(4k\frac{\pi}{3}-1\right)\cos\left(\frac{2}{3}k\pi x\right)$$

13.5 ফুরিয়ার শ্রেণীর জটিল আকার, পারসেভ্যালের সূত্র

13.5.1 জটিল রাশির মাধ্যমে ফুরিয়ার শ্রেণী (Complex Form of Fourier Series)

$2l$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$ এর ফুরিয়ার শ্রেণীটি হচ্ছে

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x+b_n\sin n\frac{\pi}{l}x\right) \quad (1)$$

যেখানে $$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos n\frac{\pi}{l}t\,dt, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin n\frac{\pi}{l}t\,dt, \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

এবারে $\cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$ এবং $\sin\theta=\frac{1}{2l}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$ সূত্র প্রয়োগ করে পাই

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\left(\frac{e^{in\frac{\pi}{l}x}+e^{-in\frac{\pi}{l}x}}{2}\right)+b_n\left(\frac{e^{in\frac{\pi}{l}x}-e^{-in\frac{\pi}{l}x}}{2i}\right)\right\}$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}(a_n-ib_n)e^{in\frac{\pi}{l}x}+\frac{1}{2}(a_n+ib_n)e^{in\frac{\pi}{l}x}\right\}$$

$$=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{c_ne^{in\frac{\pi}{l}x}+c_{-n}e^{-in\frac{\pi}{l}x}\right\} \quad (2)$$

যেখানে $c_0 = \frac{1}{2} a_0$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), c_{-n} = (a_n + ib_n)$$

এখন
$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$$

$$= \frac{1}{2l}\left\{\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}\,dx - i\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos n\frac{\pi}{l}x - i\sin n\frac{\pi}{l}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{in\pi}{l}x}dx$$

অনুরূপভাবে $c_{-n} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\frac{in\pi}{l}x}dx$

c_0, c_n এবং c_{-n} নির্ণয়ের সূত্রগুলিকে একসঙ্গে

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-in\frac{\pi}{l}x}dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

সূত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায়।

তাহলে, জটিল রাশির মাধ্যমে $2l$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণীকে নিচের সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করা গেল $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{l}x}$

যেখানে
$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-in\frac{\pi}{l}x}dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, 3\pm, \ldots.$$

উদাহরণ 11 : $f(x) = \cos ax$, $-\pi < x < \pi$ (a অখণ্ড সংখ্যা নয়) অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীটিকে জটিল আকারে (Complex Form) প্রকাশ করুন।

সমাধান : এখানে
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ax\, e^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^{iax} + e^{-iax})\tfrac{1}{2}\, e^{-inx}dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[e^{i(a-n)x} + e^{-i(a+n)x}\right]dx$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{i(a-n)x}}{i(a-n)} - \frac{e^{-i(a+n)x}}{i(a+n)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}(-i)\left[\left(\frac{e^{i(a-n)\pi}}{a-n} - \frac{e^{-i(a-n)\pi}}{a-n}\right) - \left(\frac{e^{-i(a+n)\pi} - e^{i(a+n)\pi}}{a+n}\right)\right]$$

$$= \frac{-i}{4\pi}\left[e^{in\pi}\left(e^{ia\pi - ia\pi}\right)\left(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right)\right],$$

[যেহেতু $e^{in\pi} = cos\ n\pi + isin\ n\pi = cos\ n\pi = e^{-in\pi}$]

$$= \frac{a}{\pi}\frac{1}{(a^2 - n^2)}(-1)^n\left(\frac{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a}{\pi}\sin a\pi(-1)^n\frac{1}{a^2 - n^2}$$

অতএব নির্ণেয় ফুরিয়ার শ্রেণী

$$f(x) \sim \frac{a}{\pi}\sin a\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{a^2 - n^2}e^{inx}$$

$$= \frac{a}{\pi}\sin a\pi\left[\frac{1}{a^2} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cos nx}{a^2 - n^2}\right]$$

13.5.2 পারসেভ্যালের সূত্র (Parseval's Formula)

উপপাদ্য : যদি $(-l, l)$ অন্তরালে কোন অপেক্ষক $f(x)$ এর ফুরিয়ার শ্রেণীটি

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\frac{\pi}{l}x + b_k\sin k\frac{\pi}{l}x\right)$$

ঐ অন্তরালে সম-অভিসারী হয়, তাহলে

$$\int_{-l}^{l}[f(x)]^2\,dx = l\left\{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b^2n)\right\}$$

প্রমাণ : প্রদত্ত সম-অভিসরণের শর্তের জন্য আমরা লিখতে পারি

(1) $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\frac{\pi}{l}x + b_k\sin k\frac{\pi}{l}x\right), \qquad -l \le x \le l$$

উভয়পক্ষকে $f(x)$ অপেক্ষক দিয়ে গুণ করে পাই

$$(2) \qquad \left[f(x)^2\right] = \frac{a_0}{2} f(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x + b_k f(x)\sin k\frac{\pi}{l}x\right]$$

(1) শ্রেণীটি সম-অভিসারী বলে (2) শ্রেণীটিও সম-অভিসারী হবে। অতএব এর প্রতি পদের সমাকলন (Term by term Integration) প্রক্রিয়াটি বৈধ। তাই

$$(3) \qquad \int_{-l}^{l}[f(x)]^2 dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l} f(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,dx$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-l}^{l} f(x)\sin k\frac{\pi}{l}x\,dx$$

এখন $\quad a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

এবং $\quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin k\frac{\pi}{l}x\,dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

এই সূত্রগুলি (3) সম্পর্কটিতে ব্যবহার করে পাই

$$\int_{-l}^{l}[f(x)]^2 dx = l\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2\right]$$

উদাহরণ 12 : $f(t) = t, \quad -\pi \le t \le \pi$

অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী নির্ণয় করুন এবং পারসেভ্যালের সুত্র প্রয়োগ করে দেখান যে

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

সমাধান : $f(t) = t$ অপেক্ষকটি অযুগ্ম অপেক্ষক বলে এর ফুরিয়ার শ্রেণীটি কোসাইন অপেক্ষক বর্জিত হবে, অর্থাৎ $a_k = 0$ এবং

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin kt\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t}{k}\cos kt - 1\left(\frac{-\sin kt}{k^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi}{k}\cos k\pi\right] = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

অতএব ফুরিয়ার শ্রেণীটি হল

$$t = 2\left[\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \frac{\sin 4t}{4} + \cdots\right]$$

এবার পারসেভ্যালের সূত্র প্রয়োগ করে পাই

$$\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$$

$$= \pi \sum_{1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\pi^3 = 4\pi \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

অর্থাৎ $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

13.6 উদাহরণাবলী

উদাহরণ 1. $f(x) = \begin{cases} x - [x] = \frac{1}{2}, & \text{যখন } x \text{ অখণ্ড সংখ্যা নয়} \\ 0 & \text{যখন } x \text{ অখণ্ড সংখ্যা} \end{cases}$

এবং $[x] = x$ অপেক্ষা বৃহত্তর নয় এমন অখণ্ড সংখ্যাগুলির মধ্যে বৃহত্তম সংখ্যাটি।

উপরে বর্ণিত অপেক্ষকটিকে $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ অন্তরালে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন।

সমাধান : $0 < x < \frac{1}{2}$ হলে, $[x] = 0$, অতএব

$$f(x) = x - \frac{1}{2}, \qquad 0 < x < \frac{1}{2}$$

এবং $-\frac{1}{2} < x < 0$ হলে $[x] = -1$ ফলে

$$f(x) = x - (-1) - \frac{1}{2}$$

$$= x + \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} < x < 0$$

এবং $f(0) = 0$

তাহলে $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকটিকে এভাবে সংজ্ঞিত করা যায়

$$f(x) = x + \frac{1}{2}, \qquad -\frac{1}{2} \le x < 0$$
$$= x - \frac{1}{2}, \qquad 0 < x \le \frac{1}{2}$$

এখন $x > 0$ হলে

$$f(-x) = f(t) \qquad (t = -x < 0)$$
$$= t + \frac{1}{2}$$
$$= -x + \frac{1}{2} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)$$
$$= -f(x) \tag{1}$$

অনুরূপভাবে $x < 0$ হলে

$$f(-x) = f(t) = t - \frac{1}{2}$$
$$= -x - \frac{1}{2} = -\left(x + \frac{1}{2}\right) = -f(x) \tag{2}$$

(1) এবং (2) সম্পর্ক দুটি থেকে প্রমাণিত হচ্ছে যে

$$f(-x) = -f(x)$$

অর্থাৎ $f(x)$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক।

আবার, যেহেতু

$$f(x+1) = (x+1) - [x+1] - \frac{1}{2}$$
$$= (x+1) = ([x]+1) - \frac{1}{2}$$
$$= x - [x] - \frac{1}{2}$$
$$= f(x) \qquad \text{যখন } x \text{ অখণ্ড সংখ্যা নয়}$$

এবং $f(x + 1) = 0 = f(x)$ যখন, অখণ্ড সংখ্যা। তাই $f(x)$ অপেক্ষকটি 1 পর্যায়ের একটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক। অপেক্ষকটির $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ অন্তরালে $x = 0$ বিন্দুতে একটি সসীম অসান্তত্য আছে। সামান্যীকৃত বামপক্ষীয় অন্তরকলজ $f'_L(0) = 1$ এবং সামান্যীকৃত দক্ষিণপন্থীয় অন্তরকলজ $f'_R(0) = 1$. তাই অপেক্ষকটি এই অন্তরালে দিরিক্লের শর্তগুলি পালন করছে। অতএব অপেক্ষকটিকে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করা সম্ভব। অপেক্ষকটি অযুগ্ম বলে বিস্তৃতিটি কোসাইন অপেক্ষক বর্জিত হবে এবং

$$b_k = \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{1/2} f(x) \sin k \frac{\pi}{\frac{1}{2}} x \, dx$$

$$= 4\int_0^{1/2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sin 2k\pi x\, dx$$

$$= 4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{\cos 2k\,\pi x}{-2k\pi} - 1.\left(\frac{\sin 2k\pi x}{-4k^2\pi^2}\right)\right]_0^{1/2}$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2k\pi} = -\frac{1}{k\pi}$$

অতএব নির্ণেয় ফুরিয়ার শ্রেণী

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)\frac{1}{k\pi}\sin 2k\pi x$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{k\pi}\right)\sin 2k\pi x$$

উদাহরণ 2 : $f(x) = \frac{\pi}{4}$ অপেক্ষকটিকে $(0, \pi)$ অন্তরালে সাইন শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন। এবং এই বিস্তৃতিটি প্রয়োগ করে নিচের (a) এবং (b) শ্রেণী দুটির যোগফল নির্ণয় করুন।

(a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$

(b) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots$

সমাধান : ধরি $F(x) = f(x) = \frac{\pi}{4}$, যখন $0 < x < \pi$

এবং $F(-x) = -F(x) = -\frac{\pi}{4}$, যখন $-\pi < x < 0$

তাহলে $F(x)$ অপেক্ষকটির $(-\pi, \pi)$ অন্তরালে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃতিটিই নির্ণেয় বিস্তৃতি। a_k, b_k এই বিস্তৃতিটির সহগ হলে $a_k = 0$, $k = 0, 1, 2 \cdots$

এবং $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x)\sin kx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\left[-\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2k}\left[1-(-1)^k\right]$$

অতএব $b_k = 0$ যখন k যুগ্ম সংখ্যা

এবং $b_k = b_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$ যখন $k = 2n - 1 =$ অযুগ্ম।

তাই নির্ণেয় ফুরিয়ার শ্রেণীটি হচ্ছে

$$f(x) \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)x = S(x) \quad \text{(ধরি)}$$

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], \qquad \text{যখন } 0 < x < \pi$$

তাই $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

অর্থাৎ $\quad \frac{\pi}{4} = S\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[\frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin 5\frac{\pi}{2} + \frac{1}{7}\sin 7\frac{\pi}{2} + \cdots\right]$

$$= \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right]$$

অতএব (a) শ্রেণীটির যোগফল $\frac{\pi}{4}$.

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], \qquad 0 < x < \pi$$

সম্পর্কটিতে $x = \frac{\pi}{3}$ বসিয়ে পাই

$$\frac{\pi}{4} = \left[1\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\sin 3\frac{\pi}{3} + \frac{1}{5}\sin 5\frac{\pi}{3} + \frac{1}{7}\sin 7\frac{\pi}{3}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{9}\sin 9\frac{\pi}{3} + \frac{1}{11}\sin 11\frac{\pi}{3} + \frac{1}{13}\sin 13\frac{\pi}{3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots\right]$$

অতএব (b) শ্রেণীটির যোগফল $= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

উদাহরণ 3 : প্রদত্ত $f(x) = c, \quad 0 < x < a$

$$= d, \quad a < x < b$$

যেখানে $f(x + b) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$

উপরের বর্ণিত অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী নির্ণয় করুন।

সমাধান : প্রদত্ত অপেক্ষকটির b পর্যায়ের একটি পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক। এটি $(0, b)$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালন করছে। এখন $t = \frac{2\pi}{b}x$ অর্থাৎ $x = \frac{b}{2\pi}t$ প্রতিস্থাপন করে আমরা $F(t) \equiv f\left(\frac{b}{2\pi}t\right) = f(x)$ অপেক্ষকটি পাই।

$f(x)$ অপেক্ষকটি b পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক বলে

$$f(x + b) = f(x)$$

অতএব
$$f\left(\frac{b}{2\pi}t + b\right) = f\left(\frac{b}{2\pi}(t + 2\pi)\right) = f\left(\frac{b}{2\pi}t\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{F}(t + 2\pi) = \mathrm{F}(t)$$

অর্থাৎ $F(t)$ অপেক্ষকটি 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক হবে।

আবার
$$\mathrm{F}(t) = c, \quad 0 < t < \frac{2\pi}{b}a$$

$$= d, \quad \frac{2\pi}{b}a < t < 2\pi$$

অপেক্ষকটি $(0, 2\pi)$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালন করছে। অতএব অপেক্ষকটিকে $(0, 2\pi)$ অন্তরালে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করা সম্ভব।

এই বিস্তৃতিটি হচ্ছে

$$F(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kt + b_k \sin kt\right)$$

যেখানে

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi\frac{a}{b}} c\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{2\pi\frac{a}{b}}^{2\pi} d\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\times 2\pi\frac{a}{b}c + \frac{1}{\pi}\times 2\pi d\left(1-\frac{a}{b}\right)$$

$$= 2(c-d)\frac{a}{b} + 2d$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{b}a} c\cos kt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{2\pi}{b}a}^{2\pi} d\cos kt\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{c}{k}[\sin kt]_0^{\frac{2\pi}{b}c} + \frac{1}{\pi}\frac{d}{k}[\sin kt]_{\frac{2\pi}{b}a}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}(c-d)\sin 2\pi\frac{a}{b}k$$

এবং

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{b}a} c\sin kt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{2\pi\frac{a}{b}}^{2\pi} d\sin kt\,dt$$

$$= \frac{c}{\pi}\left(\frac{-\cos kt}{k}\right)_0^{\frac{2\pi}{b}a} + \frac{d}{\pi}\left(\frac{-\cos kt}{k}\right)_{2\pi\frac{a}{b}}^{2\pi}$$

$$= -\left(\frac{c-d}{\pi k}\right)\cos 2\frac{\pi}{b}ak + \left(\frac{c-d}{\pi}\right)\frac{1}{k}$$

$$= \frac{c-d}{\pi}\left[1-\cos 2\pi\frac{a}{b}k\right]$$

অতএব $F(t) \sim (c-d)\frac{a}{b} + d + \frac{c-d}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{k}\sin 2k\frac{\pi}{b}a\cos kt$

$$+\frac{c-d}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{k}\left(1-\cos 2\pi\frac{a}{b}k\right)\sin kt$$

অর্থাৎ $f(x) \sim (c-d)\frac{a}{b} + d + \frac{c-d}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{k}\sin 2k\frac{\pi}{b}a\cos 2k\frac{\pi}{b}x$

$$+\frac{c-d}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{k}\left(1-\cos 2k\pi\frac{a}{b}\right)\sin 2k\frac{\pi}{b}x$$

উদাহরণ 4 : প্রমাণ করুন যে $0 < x < l$, অন্তরালে $f(x) = x$ অপেক্ষকের কোসাইন শ্রেণীটি হচ্ছে

$$x = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2}\cos 3\frac{\pi}{l}x + \frac{1}{5^2}\cos 5\frac{\pi}{l}x + \ldots..\right)$$

এবং পারসেভ্যালের সূত্র প্রয়োগ করে দেখান যে

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots. = \frac{\pi^4}{96}$$

সমাধান : $(0, l)$ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকের ফুরিয়ার কোসাইন শ্রেণীটি হচ্ছে

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_k \cos k\frac{\pi}{l}x$$

যেখানে

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\cos k\frac{\pi}{l}x\,dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= \frac{2}{l}\int_0^\pi f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos kt\left(\frac{l}{\pi}\right)dt, \qquad \left(\frac{\pi}{l}x = t\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{t}{\pi}t\cos kt\,dt$$

$$= \frac{2l}{\pi^2}\left[\frac{t}{k}\sin kt - 1.\left(\frac{-\cos kt}{k^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2l}{\pi^2}\cdot\left[\frac{1-\cos k\pi}{k^2}\right] = 0 \text{ যখন } k \text{ যুগ্ম।}$$

$$= \frac{-4l}{\pi^2 k^2} \quad \text{যখন } k \text{ অযুগ্ম।}$$

অর্থাৎ $a_{2n-1} = \dfrac{-4l}{(2n-1)^2\pi^2}$, $\quad a_2n = 0, \qquad n = 1, 2, 3, ...$

এবং $\qquad a_0 = \dfrac{2l}{\pi^2}\left(\dfrac{1}{2}t^2\right)_0^{\pi}$

$\qquad\quad = l$

অএতব নির্ণেয় কোসাইন শ্রেণীটি হচ্ছে

$$x \sim \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

দক্ষিণ-পক্ষের ফুরিয়ার শ্রেণীটি $(0, l)$ অন্তরালে সম-অভিসারী ধরে নিয়ে আমরা পারসেভ্যালের সূত্র প্রয়োগ করতে পারি এবং এর ফলে

$$\int_0^l x^2 dx = l\left\{\frac{l^2}{2} - \frac{16l^2}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\right\} \tag{1}$$

এই সমীকরণটি পাই।

অর্থাৎ $\qquad \dfrac{l^3}{3} = l^3\left\{\dfrac{1}{2} - \dfrac{16}{\pi^4}\sum_1^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^4}\right\}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6} = -\frac{16}{\pi^4}\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\Rightarrow \sum_1^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

অর্থাৎ $\quad \dfrac{1}{1^4} + \dfrac{1}{3^4} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)^4} + \ldots \dfrac{\pi^4}{96}$

উদাহরণ 5 : $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{যখন} \quad 0 < x < l \\ a, & \text{যখন} \quad l < x < 2l \end{cases}$

অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীর সহগ নির্ণয়ে জটিলরাশি প্রয়োগ করে দেখান যে

$$f(x) \sim \frac{a}{2} - \frac{2a}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)} \sin(2m-1)\frac{\pi}{l}x$$

সমাধান : $f(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীটি হল

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{l}x}$$

যেখানে $$c_n = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} f(x) e^{-in\frac{\pi}{l}x} dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

এখন $$c_0 = \frac{1}{2l}\int_l^{2l} f(x) dx = \frac{1}{2l}\int_0^l 0\, dx + \frac{1}{2l}\int_l^{2l} a\, dx$$

$$= \frac{a}{2}$$

এবং $$c_n = \frac{1}{2l}\int_0^l 0.\, dx + \frac{1}{2l}\int_l^{2l} a e^{-in\frac{\pi}{l}x} dx$$

$$= -\frac{a}{2l}\left[\frac{e^{-in\frac{\pi}{l}x}}{in\frac{\pi}{l}}\right]_l^{2l}$$

$$= -\frac{a}{2n\pi i}\left[e^{-2n\pi i} - e^{-in\pi i}\right]$$

$$= -\frac{a}{2n\pi i}[1 - \cos n\pi] = 0, \qquad \text{যখন } n \text{ যুগ্ম}$$

$$= -\frac{a}{(2m-1)\pi i}, \qquad \text{যখন } n = 2m - 1 = \text{অযুগ্ম।}$$

অনুরূপভাবে $$c_{-n} = \frac{a}{(2m-1)\pi i}, \qquad \text{যখন } n = 2m - 1$$

অতএব ফুরিয়ার শ্রেণীটি হচ্ছে

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n e^{in\frac{\pi}{l}x} + c_{-n}e^{-in\frac{\pi}{l}x}\right]$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)}\left\{e^{(2m-1)i\frac{\pi}{l}x} - e^{-(2m-1)i\frac{\pi}{l}x}\right\}$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{2ai}{\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)\frac{\pi}{l}x}{(2m-1)}$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{2a}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)\frac{\pi}{l}x}{(2m-1)}$$

উদাহরণ 6 : $f(x) = x$ অপেক্ষকটি $o < x < 2$ অন্তরালে

(a) অর্ধ-পাল্লার কোসাইন শ্রেণীতে

(b) অর্ধ-পাল্লার সাইন শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন।

সমাধান : (i) ধরি, $F(x) = f(x) = x$, যখন $0 < x < 2$

এবং $F(x) = F(-x) = f(-x) = -x$, যখন $-2 < x < 0$

তাহলে $[-2, 2]$ অন্তরালে $F(x)$ অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃতিটিই হবে প্রদত্ত অপেক্ষকের $[0, 2]$ অন্তরালে অর্ধ-পাল্লার কোসাইন শ্রেণীতে বিস্তৃতি।

a_k, b_k নির্ণেয় শ্রেণীটির ফুরিয়ার সহগ হলে $b_k = 0$, $(k = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$

এবং $$a_k = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos k\frac{\pi}{2}x\,dx$$

$$= \int_0^2 x\cos k\frac{\pi}{2}x\,dx = \left[\frac{x\sin k\frac{\pi}{2}x}{k\frac{\pi}{2}} - 1.\left(\frac{-\cos k\frac{\pi}{2}x}{\left(k\frac{\pi}{2}\right)^2}\right)\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{k^2\pi^2}(\cos k\pi - 1), \quad k \neq 0$$

$$= -\frac{8}{k^2\pi^2}, \quad \text{যখন } k \text{ অযুগ্ম।}$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x\,dx = 2$$

ফলে নির্ণেয় শ্রেণীটি হচ্ছে

$$1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)\frac{\pi}{2}x}{2m-1}$$

(ii) ধরি $\quad G(x) = f(x) = x$, যখন $0 < x < 2$

এবং $\quad G(x) = -\,G(-x) = -f(-x)$

$$= x, \quad -2 < x < 0$$

তাহলে $G(x)$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক। $G(x)$ অপেক্ষকটির $-2 \le x \le 2$ অন্তরালে ফুরিয়ার শ্রেণীই হবে নির্ণেয়, প্রদত্ত অপেক্ষকটির (0, 2) অন্তরালে অর্ধ-পাল্লার সাইন শ্রেণীতে বিস্তৃতি। a_k, b_k এই শ্রেণীটি সহগ হলে

$$a_k = 0, \ (k = 0, 1, 2, \ldots) \text{ এবং}$$

$$b_k = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin k\frac{\pi}{2}x\,dx = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi} u\sin ku\,du$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left[-\frac{u\cos ku}{k}+\frac{1}{k^2}\sin ku\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{-\pi\cos k\pi}{k}\right)$$

$$= \frac{-4}{\pi}\frac{(-1)^k}{k}$$

অতএব নির্ণেয় বিস্তৃতিটি হচ্ছে

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2}x-\frac{\sin 2\frac{\pi x}{2}}{2}+\frac{\sin 3\frac{\pi x}{2}}{3}-\frac{\sin 4\frac{\pi x}{2}}{4}+\cdots\right]$$

উদাহরণ 7 : $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ অপেক্ষকটির $(0, \pi)$ অন্তরালে সাইন শ্রেণীতে বিস্তৃতিটি নির্ণয় করুন।

সমাধান : ধরি $g(x) = f(x),$ যখন $0 \le x \le \pi$

এবং $g(x) = -g(-x)$

$= -f(-x),$ যখন $-\pi \le x \le 0$

তাহলে $-\pi \le x \le \pi$ অন্তরালে $g(x)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃতিটিই হবে নির্ণেয় বিস্তৃতি।

a_k, b_k এই শ্রেণীটির সহগ হলে $a_k = 0$ $(k = 0, 1, 2, ...)$

এবং
$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}\sin kx\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, ...)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right]dx$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x}{k - \frac{1}{2}} - \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{k + \frac{1}{2}}\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(k\pi - \frac{1}{2}\pi\right)}{k - \frac{1}{2}} - \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{k + \frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}(-1)^{k+1}\left[\frac{1}{k - \frac{1}{2}} + \frac{1}{k + \frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{8}{\pi}(-1)^{k+1}\frac{k}{4k^2 - 1}$$

অতএব নির্ণেয় বিস্তৃতি

$$\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{4k^2 - 1}\sin kx$$

উদাহরণ 8 : $f(x) = \sin x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

$$= \cos x, \quad \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

এবং $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty$

উপরের বর্ণিত অপেক্ষকটিকে ফুরিয়ার শ্রেণীতে বিস্তৃত করুন।

সমাধান : 13.4.4 পরিচ্ছেদে $[a, b]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত $b - a$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণী নির্ণয়ের পদ্ধতি বর্ণিত হয়েছে।

এখানে $a = 0, \ b = \frac{\pi}{2}$

অতএব নির্ণেয় শ্রেণীটি হবে

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}\right)$$

অর্থাৎ $$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(4nx-\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(4nx-\pi)$$

যেখানে $$a_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi/2} f(u)\cos(4nu-\pi)du, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(u)du$$

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(u)\sin(4nu-\pi)du, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

অর্থাৎ $$a_n = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(u)\cos 4nu\, du$$

এবং $$b_n = -\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2} f(u)\sin 4nu\, du \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

অতএব

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(u)du = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin u\, du + \frac{4}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos u\, du$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin u\, du + \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du$$

$$= \frac{8}{\pi}[-\cos u]_0^{\pi/4} = \frac{8}{\pi}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[2 - \sqrt{2}\right]$$

$$a_n = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(u)\cos 4nu\, du = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin u\cos 4nu\, du - \frac{4}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos u\cos 4nu\, du$$

$$= -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin u\cos 4nu\, du - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\cos 4n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)dt$$

$$= -\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin u\cos 4nu\, du$$

$$= -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\left[\sin(4n+1)u - \sin(4n-1)u\right] du$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos(4n-1)u}{(4n-1)} - \frac{\cos(4n+1)u}{4n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left[\cos n\pi\cos\frac{\pi}{4} - 1\right]\left[\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1}\right]$$

$$= -\frac{8}{\pi}\frac{1}{16n^2 - 1}\left[\cos n\pi\cos\frac{\pi}{4} - 1\right]$$

$$= -\frac{4}{\pi}\sqrt{2}\,\frac{1}{16n^2 - 1}\left[(-1)^n - \sqrt{2}\right]$$

এবং $b_n = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin u\sin 4nu\,du - \frac{4}{\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos u\sin 4nu\,du$

$$= -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin u\sin 4nu\,du - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin(2n\pi - 4nt)dt$$

$$= -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\sin u(\sin 4nu - \sin 4nu)du = 0$$

কাজেই নির্ণেয় ফুরিয়ার শ্রেণীটি হচ্ছে

$$\frac{4-2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - \sqrt{2}}{16n^2-1}\right]\cos 4nx$$

উদাহরণ 8 : বিকল্প পদ্ধতি : এখানে $f(x)$ অপেক্ষকটি $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ অন্তরালে সংজ্ঞিত। আমরা চলের প্রতিস্থাপন দ্বারা একটি নতুন অপেক্ষক গঠন করি যার সংজ্ঞার ক্ষেত্র হবে $[-\pi, \pi]$ অন্তরাল। ধরি $t = \text{A}x + \text{B}$; A, B ধ্রুবক দুটি নির্ণয় করা হবে নিচের শর্তসাপেক্ষে।

$t = -\pi$, যখন $x = 0$ এবং $t = \pi$, যখন $x = \frac{\pi}{2}$ তাহলে $t = 4x - \pi$ অর্থাৎ $x = \frac{t}{4} + \frac{\pi}{4}$

ফলে $f(x) = f\left(\frac{t}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = F(t)$

এবং $\text{F}(t) = \sin x = \sin\left(\frac{t+\pi}{4}\right)$, যখন $-\pi \le t \le 0$

$$= \cos x = \cos\left(\frac{t+\pi}{4}\right), \quad \text{যখন } 0 \le t \le \pi$$

অর্থাৎ $F(t) = \left[\cos\frac{t}{4} + \sin\frac{t}{4}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}$, যখন $-\pi \le t \le 0$

$$= \left[\cos\frac{t}{4} - \sin\frac{t}{4}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{যখন } 0 \le t \le \pi$$

দেখা যাচ্ছে যে, $\text{F}(-t) = \text{F}(t)$ অর্থাৎ $\text{F}(t)$ অপেক্ষকটি যুগ্ম অপেক্ষক। ফলে $\text{F}(t)$ অপেক্ষকের বিস্তৃতিতে সাইন অপেক্ষক থাকবে না এবং বিস্তৃতিটি হবে

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_k\cos kx$$

যেখানে $$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi}\left(\cos\frac{t}{4} - \sin\frac{t}{4}\right)dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[4\sin\frac{t}{4} + 4\cos\frac{t}{4}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} - 1\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left[\sqrt{2} - 1\right]$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(t)\cos kt\, dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\cos kt\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\left(k + \frac{1}{4}\right)\right)\right] + \cos\left[\left(t\left(k - \frac{1}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right)\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left[t\left(k + \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\right]}{\left(k + \frac{1}{4}\right)} + \frac{\sin\left[t\left(k - \frac{1}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right]}{k - \frac{1}{4}}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left\{\frac{\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\left(k + \frac{1}{4}\right)} + \frac{\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{k - \frac{1}{4}}\right\} - \sin\frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{k + \frac{1}{4}} - \frac{1}{k - \frac{1}{4}}\right\}\right]$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\cos k\pi \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{k + \frac{1}{4}} - \frac{1}{k - \frac{1}{4}}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\cos k\pi - \sin\frac{\pi}{4}\right)\frac{-\frac{1}{2}}{k^2 - \frac{1}{16}}$$

$$= -\frac{8}{\pi}\left[(-1)^k - \frac{1}{\sqrt{2}}\right]\frac{1}{16k^2-1}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left[\sqrt{2}(-1)^k - 1\right]\frac{1}{16k^2-1}$$

অতএব নির্ণেয় বিস্তৃতিটি হচ্ছে

$$F(t) = \frac{4-2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sqrt{2}(-1)^k - 1\right\}\frac{1}{16k^2-1}\cos kt$$

অর্থাৎ
$$f(x) = \frac{4-2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sqrt{2}(-1)^k - 1\right\}\frac{1}{16k^2-1}\cos(4kx - k\pi)$$

$$= \frac{4-2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sqrt{2} - (-1)^k\right\}\frac{1}{16k^2-1}\cos 4kx$$

13.7 সারাংশ

A. যুগ্ম এবং অযুগ্ম অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণী

$f(x)$ একটি যুগ্ম অপেক্ষক হলে $(-\pi, \pi)$ অন্তরালে এর ফুরিয়ার শ্রেণীর পদগুলি সাইন অপেক্ষক বর্জিত হবে এবং এক্ষেত্রে ফুরিয়ার শ্রেণীটি হবে

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\,dt\right)\cos kx$$

এই শ্রেণীটির যোগফলকে $S(x)$ লিখে পাই $S(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, যখন $0 < x < \pi$ এবং $S(0) = f(0)$, $S(\pi) = f(\pi - 0)$.

আবার, $f(x)$ একটি অযুগ্ম অপেক্ষক হলে $(-\pi, \pi)$ অন্তরালে এর ফুরিয়ার শ্রেণীর পদগুলি কোসাইন অপেক্ষক বর্জিত হবে এবং এক্ষেত্রে ফুরিয়ার শ্রেণীটি হবে

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$$

S(x) এই শ্রেণীটির যোগফল হবে

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],\ \ 0 < x < \pi$$

এবং S(0) = S(π) = 0.

B. সাইন শ্রেণী এবং কোসাইন শ্রেণী। অর্ধপাল্লার শ্রেণী বা অসম্পূর্ণ শ্রেণী (Half Range or Incomplete Series)

[0, π] অন্তরালে সংজ্ঞিত, দিরিক্লের শর্ত পালনকারী পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$-এর সাইন শ্রেণীটি হল

$$\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\sin nx\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

S(x) এই শ্রেণীটির যোগফল হলে

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \qquad \text{যখন } 0 < x < \pi$$

এবং S(0) = S(π) =0

অনুরুপ ক্ষেত্রে ঐ অপেক্ষকটির কোসাইন শ্রেণীটি হবে

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)dt\,\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\cos kx\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\,dt$$

এই শ্রেণীটির যোগফলকে S(x) দিয়ে নির্দেশিত করলে

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] \qquad \text{যখন } 0 < x < \pi$$

এবং S(0) = f(0+), S(π) = f(π – 0).

C. ($-\pi$, π) **ব্যতীত অন্যান্য অন্তরালে ফুরিয়ার শ্রেণী**

1. অন্তরাল (0,2π)

(0,2π) অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালনকারী 2π পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$ এর ফুরিয়ার শ্রেণীটি হল

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt\,\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\cos nx\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\sin nx\int_0^{2\pi} f(t)\sin dt$$

S(x) এই শ্রেণীটির যোগফল হলে

$$S(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)],\ \text{যখন}\ 0 < x < 2\pi$$

এবং $\quad S(0)=\frac{1}{2}\left[f(0+)_+ f(2\pi-)\right]=S(2\pi).$

2. অন্তরাল $[a,b]$

$[a,b]$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালনকারী $(b-a)$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$ এর ফুরিয়ার শ্রেণীটি হবে

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\Big(\frac{n\pi}{b-a}(2x-a-b)\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\Big(\frac{n\pi}{b-a}(2x-a-b)\Big)$$

যেখানে $\quad a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)\cos\Big(\frac{n\pi}{b-a}(2u-a-b\Big)du,\quad n=0,1,2\ldots$

এবং $\quad b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(u)\sin\Big(\frac{n\pi}{b-a}(2u-a-b)\Big)du\quad n=1,2,3\ldots$

S(x) এই শ্রেণীটির যোগফল হলে

$$S(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)],\qquad \text{যখন}\ a < x < b$$

এবং $\quad S(a)=S(b)=\frac{1}{2}[f(a+)+f(b-)]$

$[a,b]$ অন্তরালে সংজ্ঞিত অপেক্ষকের সাইন শ্রেণী, কোসাইন শ্রেণী।
$[a,b]$ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকের কোসাইন শ্রেণীটি হচ্ছে

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt+\frac{2}{b-a}\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\pi\,\frac{(x-a)}{b-a}\int_a^b f(t)\cos k\pi\,\frac{(t-a)}{b-a}\,dt$$

এবং সাইন শ্রেণীটি হচ্ছে

$$\frac{2}{b-a}\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\pi\,\frac{(x-a)}{b-a}\int_a^b f(t)\sin k\pi\,\frac{(t-a)}{b-a}\,dt$$

3. অন্তরাল $(-\ l,\ l)$

$[a,b]$ অন্তরালে বর্ণিত ফলগুলিতে $a = -\ l$ এবং $b = l$ বসিয়ে পাই

$[-l, l]$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালনকারী $2l$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$ এর ফুরিয়ার শ্রেণীটি হবে

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\frac{\pi}{l}x + b_n \sin n\frac{\pi}{l}x\right)$$

যেখানে $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\cos n\frac{\pi}{l}u\,du.\quad n = 0,1,2\ldots$

এবং $b_n = \frac{l}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\sin n\frac{\pi}{l}u\,du.\quad n = 1,2,3,\ldots$

এই শ্রেণীটির যোগফল $S(x)$ হলে

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], \qquad \text{যখন } -l < x < l$$

এবং $S(-l) = \frac{1}{2}[f(-l+0) + f(l-0)] = s(l)$

$(0,l)$ অন্তরালে অর্ধ-পাল্লার সাইন ও কোসাইন শ্রেণী। $(0,l)$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালনকারী $2l$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$ এর কোসাইন শ্রেণীটি হচ্ছে

$$\frac{1}{l}\int_0^l f(t)dt + \frac{2}{l}\sum_{l}^{\infty}\cos n\frac{\pi}{l}x\int_0^l f(t)\cos n\frac{\pi}{l}t\,dt \qquad \text{যখন } 0 \le x \le l$$

এর যোগফল $S(x)$ হলে, $S(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0],\qquad$ যখন $0 < x < l$

এবং $\qquad S(0) = f(0+),\ S(l) = f(l-)$

$(0,\ l)$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালনকারী, $2l$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষক $f(x)$ এর সাইন শ্রেণীটি হচ্ছে

$$\frac{2}{l}\sum_{l}^{\infty}\sin n\frac{\pi}{l}x\int_0^l f(t)\sin n\frac{\pi}{l}t\,dt \qquad \text{যখন } 0 \le x \le l$$

এই শ্রেণীটির যোগফল $S(x)$ হলে

$S(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)],\quad$ যখন $0 < x < l$

এবং $\qquad S(0) = S(l) = 0$

D. জটিল রাশির মাধ্যমে ফুরিয়ার শ্রেণী। (Complex Form of Fourier Series)

$(-l,\ l)$ অন্তরালে দিরিক্লের শর্ত পালনকারী $2l$ পর্যায়ের পর্যাবৃত্ত অপেক্ষকের ফুরিয়ার শ্রেণীটিকে নিচের সংক্ষিপ্ত আকারে প্রকাশ করা সম্ভব।

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{l}x}$$

যেখানে $c_n = \dfrac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-in\frac{\pi}{l}x} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

E. পারসেভ্যালের সূত্র। (Parseval's Formula)

যদি $(-l,l)$ অন্তরালে সংজ্ঞিত কোন অপেক্ষক $f(x)$ এর ফুরিয়ার শ্রেণী

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos k\frac{\pi}{l}x + b_k \sin k\frac{\pi}{l}x\right)$$

ঐ অন্তরালে সম-অভিসারী হয়, তাহলে

$$\int_{-l}^{l}[f(x)]^2\,dx = l\left\{\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\right\}$$

13.8 সর্বশেষ প্রশ্নাবলী

1. $0 < x < \pi$ অন্তরালে $f(x)$ অপেক্ষকটির প্রতিরূপ, x এর গুণিতক এর সাইন শ্রেণীটি নির্ণয় করুন

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\pi, \quad && 0 < x < \frac{\pi}{3} \\ &= 0, && \frac{1}{3}\pi < x < \frac{2}{3}\pi \\ &= -\frac{1}{3}\pi, && \frac{2}{3}\pi < x < \pi \end{aligned}$$

$x = 2\dfrac{\pi}{3}$ এবং $x = \pi$ বিন্দুতে প্রাপ্ত শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করুন।

[$b_{2m} = \dfrac{2}{3m}\left[1 - \cos 2m\dfrac{\pi}{3}\right] = \dfrac{1}{m}$ যখন m, 3 এর গুণিতক নয়।

$$\sin 2x + \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 8x}{4} + \frac{\sin 10x}{5} + \frac{\sin 14x}{7} + \ldots$$

$S\left(\dfrac{2}{3}\pi\right) = -\dfrac{1}{6}\pi,\ s(\pi) = 0$]

2. দেখান যে $0 < x < \pi$ অন্তরালে e^x এর অর্ধপাল্লার সাইন ও কোসাইন শ্রেণী দুটি হল যথাক্রমে

$$\frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}(1 - (-1)^n e^{\pi})\frac{n \sin nx}{n^2 + 1}$$

এবং $\qquad \dfrac{e^{\pi}-1}{\pi}-\dfrac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}(1-(-1)^n e^{\pi})\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$

3. প্রমাণ করুন যে $0 < \theta < 2\pi$ অন্তরালে $\frac{1}{2}(\pi-\theta)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীটি হল

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$$

$\theta = 0$ এবং $\theta = 2\pi$ বিন্দু দুটিতে শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করুন।

4. $-\frac{1}{2}l < x < \frac{1}{2}l$ অন্তরালে $f(x) = x^2$ অপেক্ষকটির কোসাইন শ্রেণীটি নির্ণয় করুন।

$$\left(\frac{l^2}{1^2}+\frac{l^2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\cos 2m\frac{\pi}{l}x}{m^2}\right)$$

5. $\qquad \phi(x) = 0 \qquad$ যখন $0 < x < 1$

$\qquad = x - 1, \quad$ যখন $1 \le x < 2$

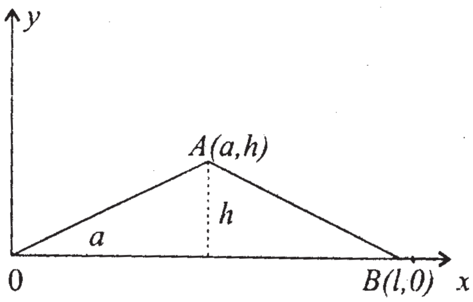
$\qquad \phi(2) = 0$

এবং $\qquad \phi(x+4) = \phi(x), \qquad -\infty < x < \infty$

উপরে বর্ণিত অপেক্ষকটির সাইন শ্রেণীটি নির্ণয় করুন।

$$\left(: \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^{k-1}}{k\pi}-\frac{4}{k^2\pi^2}\sin k\frac{\pi}{2}\right]\sin k\frac{\pi}{2}x\right)$$

6. পাশ্ববর্তী লেখচিত্রে OAB রেখাখণ্ড দুটি দ্বারা সংজ্ঞিত অপেক্ষকটির অর্ধ-পাল্লার সাইন শ্রেণীটি নির্ণয় করুন



[ইংগিত : $f(x)=\dfrac{h}{a}x, 0 \le x \le a$

$\qquad = \dfrac{h}{a-1}(x-l), a \le x \le l$

উত্তর $b_n = \dfrac{2hl^2}{n^2\pi^2}\dfrac{1}{a(l-a)}\sin n\dfrac{\pi}{l}a$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2hl^2}{a(l-a)}\dfrac{1}{\pi^2}\sin n\dfrac{\pi}{l}a\sin n\dfrac{\pi}{l}x/n^2$]

7. দেখান যে

$$\frac{1}{96}\pi(\pi-2x)(\pi^2+2\pi x-x^2)=\cos x+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^4}+\ldots \quad \text{যখন } 0\le x\le \pi.$$

8. দেখান যে $f(t)=\frac{t^2}{4}$, $(-\pi \le t \le \pi)$

অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণীটি হচ্ছে

$$S(t)\,\frac{\pi^2}{12}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nt}{n^2}$$

আরো দেখান যে, S(0) শ্রেণীটি $f(0)$ মানে অভিসারী।

[S(0) converges to $f(0)$]

অতঃপর প্রমাণ করুন যে

$$\frac{\pi}{12}^2=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$$

এবার পারসেলভ্যালের সূত্র প্রয়োগ করে দেখান যে

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi}{90}^4$$

9. (a) $f(t) = |\,t\,|$ $(-\pi \le t \le \pi\,)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী ব্যবহার করে

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots$$

শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করুন। (উত্তর : $\frac{\pi^2}{8}$)

(b) $$\frac{1}{1^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{7^4}+\ldots$$

শ্রেণীটির যোগফল নির্ণয় করুন। (উত্তর : $\frac{\pi}{96}^4$)

10. $f(t) = t$ $(-\pi \le t \le \pi)$ অপেক্ষকটির ফুরিয়ার শ্রেণী এবং বেসেলের অসমতা (Bessel's Inequality) ব্যবহার করে দেখান যে $1+2^{-2} + 3^{-2} + \cdots + n^{-2} \le \frac{\pi^2}{6}$

সহায়ক পাঠ্যপুস্তকাবলী

1. A*dvanced* C*alculus*, David V. Widder, Prentice Hall of India Private Limited. 1974.
2. M*ethods of* R*eal* A*nalysis*. Richard. R. Goldberg. Oxford and I. B. H. Publishing Company. 1973.
3. I*ntroduction to the* F*ourier* S*eries and* I*ntegrals*. H. S. Carslaw. Dover Publications Inc., 1930.
4. M*athematical* A*nalysis*. Malik and Arora. Wilcy Eastern Limited 1991.
5. A C*ourse of* M*athematical* A*nalysis*. Shanti Narayan. S. Chand and Co. 1985.

Notes

Notes